Miroslav Katětov

О размерности несепарабельных пространств, II

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 4, 485–516

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100217

Чехословацкий математический журнал, т. 6 (81) 1956, Прага

О РАЗМЕРНОСТИ НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ, II

МИРОСЛАВ КАТЕТОВ (Miroslav Katětov), Прага.
(Поступило в редакцию 1/IX 1955 г.)*)

В статье содержатся, главным образом, результаты, касающиеся размерности непрерывного образа пространства и расширения непрерывных отображений в связи с вопросами теории размерности; содержание статьи указано подробнее в ее введении.

Настоящая работа является продолжением статьи „О размерности несепарабельных пространств, I", Чехословацкий математический журнал, 1952, *2* (*77*), 333—368. Эта статья цитируется в дальнейшем знаком I с указанием номера теоремы или определения, напр. I 2.12; впрочем, большей частью я употребляю понятия и обозначения из I, не оговаривая этого особо. Результаты первого параграфа настоящей работы касаются размерности образа данного пространства при непрерывном отображении в Банахово пространство; исследуются некоторые свойства и соотношения, и имеющие место для почти каждого (в смысле категории) непрерывного отображения.

Во втором параграфе доказываются теоремы, касающиеся, примерно говоря, существования покрытий таких, что взяв пересечение границ m элементов покрытия с любым из наперед заданных (в счетном числе) замкнутых множеств, мы снижаем размерность этого множества по крайней мере на m. Аналогичные результаты получил уже К. Морита [7]; мы даем их здесь ввиду несколько иной формулировки некоторых теорем и существенно отличного метода доказательства (при помощи отображений в некоторое пространство Банаха). В данном случае доказательство получается довольно сложным, однако метод, может быть, и заслуживает внимания в связи с возможностью других приложений.

Третий параграф содержит ряд теорем о продолжении непрерывных отображений, причем требуется, чтобы образ дополнения множества, на котором первоначально определено отображение (или, иногда, образ всего пространства) имел по возможности малую размерность; эти теоремы находятся в тесной связи с теорией ретрактов.

*) Некоторые изменения и дополнения текста поступили в редакцию 2?/VIII 1956 г.

§ 1

1.1. *Пусть пространство P нормально, его подмножество S замкнуто. Пусть R — пространство Банаха, $B \subset R$ замкнуто. Тогда для $m = -1, 0, 1, \ldots$ отображения $f \in C'(P, R)$*[1]) *такие, что* $\dim \overline{f(S)}\, B \leqq m$, *образуют G_δ-множество в $C'(P, R)$.*

Доказательство. Обозначим через T_k $(k = 1, 2, \ldots)$ множество тех $f \in C'(P, R)$, для которых существует конечная система $\{G_i\}$ открытых в R множеств такая, что (1) $\Sigma G_i \supset \overline{f(S)}\, B$, (2) $\operatorname{ord} \{G_i\} \leqq m$, (3) $\operatorname{diam} G_i < 1/k$. Пусть $f \in T_k$ и пусть $\{G_i\}$ обладает упомянутыми свойствами. Так как $\overline{f(S)}$ компактно, то существует такое $\delta > 0$, что из $\varrho(y, \overline{f(S)}) < \delta$ всегда вытекает $y \operatorname{non} \in B - \Sigma G_i$. Легко установить, что $g \in T_k$ как только $g \in C'(P, R)$, $|g - f| < \delta$. Следовательно, множества T_k открыты в $C'(P, R)$. Теперь пусть $f \in C'(P, R)$, $\dim B\overline{f(S)} \leqq m$. Тогда (для любого $k = 1, 2, \ldots$) существует конечная система $\{H_i\}$ открытых в $B\overline{f(S)}$ множеств такая, что $\Sigma H_i = B\overline{f(S)}$, $\operatorname{ord} \{H_i\} \leqq m$, $\operatorname{diam} H_i < 1/k$, и, следовательно, также конечная система $\{G_i\}$ открытых в R множеств, для которой $\Sigma G_i \supset B\overline{f(S)}$, $\operatorname{ord} G_i \leqq m$, $\operatorname{diam} G_i < 1/k$. Итак, $f \in T_k$.

С другой стороны, если $f \in \prod\limits_k T_k$, то для каждого $\varepsilon > 0$ имеем конечное открытое покрытие множества $B\overline{f(S)}$ множествами диаматра $< \varepsilon$, причем порядок покрытия не превышает m. Так как $B\overline{f(S)}$ компактно, то из этого следует, что $\dim B\overline{f(S)} \leqq m$.

1.2. Напомним определение линейной размерности и линейного декремента линейных пространств (см. I 1.3 D, F). Если R — нормированное линейное пространство, то его линейной размерностью называем наименьшую мощность множеств $M \subset R$ таких, что их линейная оболочка плотна в R. Линейным декрементом (относительно R) замкнутого линейного подпространства $L \subset R$ мы называем линейную размерность фактор-пространства R/L.

Линейная размерность (декремент) линейного подмножества определяется, конечно, как линейная размерность (декремент) линейного подпространства, сдвигом которого оно возникло. Напомним также (см. I 1.3 G), что система $\{x_\lambda\}$ точек нормированного линейного пространства R находится, по определению, в общем положении (линейно свободно расположена), если любое линейное множество $L \subset R$, $L \neq R$, содержит не более чем $n + 1$ точку x_λ, где n — линейная размерность L.

1.3. Приведем следующее, почти очевидное утверждение из теории линейных пространств.

[1]) $C'(P, R)$ означает множество всех вполне ограниченных непрерывных отображений P в R; см. I 2.1.

Пусть дано нормированное линейное пространство R и замкнутое линейное подмножество $L \subset R$ с линейным декрементом m; пусть $G_k \subset R$ открыты, $G_k \neq \emptyset$. Тогда существуют $a_k \in G_k$ такие, что множестсо A всех a_k имеет следующее свойство: если $\emptyset \neq M \subset A$, M конечно, Q — наименьшее линейное множество, содержащее M, $r = \operatorname{lin}\dim Q$, то $QL = \emptyset$ для $r < m$, $\operatorname{lin}\dim QL = r - m$ для $r \geqq m$.

1.4. *Пусть дано нормальное пространство P, сепарабельное нормированное линейное пространстсо R и замкнутое линейное множество $L \subset R$ с конечным декрементом m. Тогда для любого $f \in C(P, R)$ и $\varepsilon > 0$ существует $g \in C(P, R)$ такое, что (1) $|f - g| \leqq \varepsilon$; (2) $g(P)$ содержится в сумме счетного (в случае $f \in C'(P, R)$ конечного) числа симплексов, пересечение каждого из которых с L или пусто или имеет размерность $\leqq \dim P - m$; (3) $\dim L \,.\, g(P) \leqq \dim P - m$ (или же $Lg(P) = \emptyset$). Если $f \in C'(P, R)$, то $g \in C'(P, R)$ и $\dim L\overline{g(P)} \leqq \dim P - m$ (или же $L\overline{g(P)} = \emptyset$).*

Доказательство. Существует (см., например, I 2.10) счетное локально конечное открытое покрытие $\{U_\lambda\}$ пространства $f(P)$ такое, что $\operatorname{diam} U_\lambda < \varepsilon$; если $f \in C'(P, R)$, то можно предполагать, что $\{U_\lambda\}$ конечно; из замечания после I 1.11 следует существование открытых в P множеств $G_\lambda \subset f^{-1}(U_\lambda)$ таких, что $\Sigma G_\lambda = P$, $\operatorname{ord}\{G_\lambda\} \leqq \dim P$. Выберем элемент $a_\lambda \in U_\lambda$, имеющий свойства, приведенные в 1.3. К системе $\{G_\lambda\}$ построим функции φ_λ, обладающие свойствами, указанными в I 1.6; положим $g(x) = \sum\limits_\lambda \varphi_\lambda(x)\, a_\lambda$. Тогда $g \in C(P, R)$; если $x \in P$, то имеем (см. I 1.6) $g(x) = \sum\limits_{x \in G_\lambda} \varphi_\lambda(x)\, a_\lambda$, $f(x) = \sum\limits_{x \in G_\lambda} \varphi(x) \,.\, f(x)$, $|f(x) - g(x)| \leqq \sum\limits_{x \in G_\lambda} \varphi_\lambda(x) |f(x) - a_\lambda|$, $a_\lambda \in U_\lambda$, $f(x) \in U_\lambda$ (для $x \in G_\lambda$); значит, $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$. Свойство (2) непосредственно вытекает из выбора a_λ, так как $g(P)$ содержится в сумме счетного, соответственно, конечного числа симплексов, каждый из которых имеет в качестве вершин самое большее $\dim P + 1$ точек a_λ. Из этого следует далее также свойство (3).

1.5. В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение, которое, по существу, хорошо известно (и является частным случаем некоторых результатов из § 3 настоящей работы).

Пусть R — сепарабельное пространство Банаха; пусть $K \subset R$ есть замкнутое выпуклое непустое множество. Пусть P — нормальное пространство, $S \subset P$ — замкнутое множество. Тогда для любого $f \in K^S$ существует $F \in K^P$ так, что $F_S = f$.

1.6. *Пусть R — сепарабельное пространство Банаха. Пусть пространство P нормально, множество $S \subset P$ замкнуто. Обозначим через Φ отображение $C(P, R)$ в $C(S, R)$, переводящее $f \in C(P, R)$ в $f_S \in C(S, R)$. Тогда Φ есть открытое непрерывное линейное отображение $C(P, R)$ на $C(S, R)$ и $|\Phi| = 1$; Φ отображает $C'(P, R)$ на $C'(S, R)$; частичное отображение $\Phi_{C'(P,R)}$ также является открытым и его норма равна 1.*

Доказательство легко вытекает из 1.5 (и из того обстоятельства, что выпуклая оболочка вполне ограниченной части нормированного линейного пространства является также вполне ограниченной).

1.7. Теорема. *Пусть R — сепарабельное пространство Банаха; пусть замкнутое линейное множество $L \subset R$ имеет конечный линейный декремент m. Пусть P — нормальное пространство, $S \subset P$ замкнуто. Тогда для почти каждого*[2] $f \in C'(P, R)$ *справедливо следующее*:

$$\text{если} \dim S < m, \text{ то } \overline{f(S)}\, L = \emptyset,$$
$$\text{если} \dim S \geqq m, \text{ то } \dim \overline{f(S)}\, L \leqq \dim S - m.$$

Доказательство. Если $S = P$, то отображения, обладающие указанным выше свойством, образуют G_δ - множество в силу 1.1, и плотное множество в силу 1.4. В случае $S \neq P$ применяем 1.6.

Замечание. Только что высказанную теорему доказал для случая, когда P — сепарабельное метрическое пространство, $L = R$, R (в отличие от нашего предположения) является компактным метрическим пространством, обладающим некоторыми специальными свойствами, К. Борсук [1] уже в 1937 г.

Теорема, конечно, верна и для более общих $L \subset R$ чем линейные множества; это обстоятельство может послужить основанием для одной из возможных попыток определения топологической „дополнительной размерности".

1.8. Теорема. *Пусть R — сепарабельное нормированное линейное пространство; пусть P — нормальное пространство, $S \subset P$ — замкнуто. Пусть m — натуральное число, $m \leqq \dim S \leqq \operatorname{lin}\dim R$. Тогда $\dim f(S) \geqq m$ для каждого $f \in C'(P, R)$, за исключением нигде не плотного множества.*

Замечание. Аналогичное утверждение справедливо и для $C(P, R)$, если при $\operatorname{lin}\dim R = \infty$ предположить, что R содержит бесконечное равномерно линейно независимое множество.

Доказательство. Как видно из 1.6, достаточно провести доказательство для $S = P$. Обозначим через T множество тех $f \in C'(P, R)$, для которых $\dim f(P) \leqq m - 1$. Предположим, что T не является нигде не плотным множеством, что приведет нас к противоречию.

Пусть $\{G_\lambda\}$ есть конечное открытое покрытие P. Пусть U означает множество $\{G_\lambda\}$-нульмерных (см. I 2.7) отображений $f \in C'(P, R)$; по теореме I 2.8 оно является открытым. Если $\dim P < \infty$, то U плотно, ввиду I 2.12, и, следовательно, $TU \neq \emptyset$. Если $\dim P = \infty$, и потому также $\operatorname{lin}\dim R = \infty$, то положим $r = \operatorname{ord}\{G_\lambda\}$. Легко можно установить, что для любого $f \in T$ и $\alpha > 0$ существует конечное открытое покрытие $\{\Gamma_\nu\} \leqq \{G_\lambda\}$ такое,

[2]) В смысле категории; см. I 2.11.

что $\operatorname{ord}\{\Gamma_\nu\} \leqq mr + m - 1$, $\operatorname{diam} f(\Gamma_\nu) < \alpha$ (это следует из $\dim f(P) < m - 1$). Из этого на основании I 2.9, где вместо $\{\Gamma_\lambda\}$ подставляем $\{\Gamma_\nu\}$, вместо n подставляем $mr + m - 1$, вытекает $T \subset \overline{U}$ и, следовательно, $TU \neq \emptyset$.

Пусть теперь $f \in TU$. Существует (см. I 2.7 и I 2.3) $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $Q \subset P$, для которого $\operatorname{diam} f(Q) < \varepsilon$, найдутся открытые в Q множества H_μ, для которых $\Sigma H_\mu = Q$, $\operatorname{ord}\{H_\mu\} = 0$, $\{H_\mu\} \leqq \{G_\lambda\}$. Существует конечное открытое покрытие $\{V_\varrho\}$ пространства $f(P)$ такое, что $\operatorname{ord}\{V_\rho\} \leqq m - 1$, $\operatorname{diam} V_\rho < \varepsilon$. По доказанному, $f^{-1}(V_\rho) = \Sigma W_{\rho\sigma}$, где $W_{\rho\sigma}$ открыты, $\operatorname{ord}\{W_{\rho\sigma}\}_\sigma \leqq 0$, $\{W_{\rho,\sigma}\}_{\rho,\sigma} \leqq \{G_\lambda\}$. Очевидно, $\operatorname{ord}\{W_{\rho,\sigma}\}_{\rho,\sigma} \leqq m - 1$. Так как $\{G_\lambda\}$ было произвольным, получаем $\dim P \leqq m - 1$, что противоречит предположению.

1.9. Из утверждения 1.7 и 1.8 следует:

Теорема. *Пусть R — сепарабельное пространстэо Банаха. Пусть P — нормальное пространство, $S \subset P$ — замкнутое множество, $\dim S \leqq \lim \dim R$. Тогда для почти всех $f \in C'(P, R)$*

$$\dim \overline{f(S)} = \dim f(S) = \dim S\,.$$

Теперь перейдем к теоремам, касающимся пересечений образов (или замыканий образов) и размерности этих пересечений. Результаты, которые здесь приводятся, большей частью хорошо известны для сепарабельного P.

1.10. *Пусть R — сепарабельное пространство Банаха. Пусть пространсmсо P нормально, $S_1 \subset P$, $S_2 \subset P$ замкнуты. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ множество $f \in C'(P, R)$ таких, что при подходящем $\vartheta > 0$ для всякого $y \in \overline{f(S_1)}\,\overline{f(S_2)}$ имеет место $\varrho(y, f(S_1S_2)) < \vartheta < \varepsilon$, открыто в $C'(P, R)$.*

Доказательство. Будем пользоваться (во всей статье) следующим обозначением: если M — метрическое пространство, $A \subset M$, $B \subset M$, то $\varrho(A, B) = \sup\limits_{x \in A} \inf\limits_{y \in B} \varrho(x, y)$; в частности, имеем $\varrho(A, \emptyset) = \infty$ при $A \neq \emptyset$, и $\varrho(\emptyset, B) = -\infty$. Для непустых A, B, C имеем $\varrho(A, B) + \varrho(B, C) \geqq \varrho(A, C)$.

Доказательство проведем для случая $S_1S_2 \neq \emptyset$; в случае $S_1S_2 = \emptyset$ доказательство проводится аналогичным способом с некоторыми изменениями технического характера. Возьмем $f \in C'(P, R)$ такое, чтобы было $\varrho(\overline{f(S_1)}\,\overline{f(S_2)}, f(S_1S_2)) = \eta < \varepsilon$; пусть U означает множество тех $y \in R$, расстояние которых от $\overline{f(S_1)}\,\overline{f(S_2)}$ будет $< \frac{1}{4}(\varepsilon - \eta)$. Возьмем положительное $\delta < \frac{1}{4}(\varepsilon - \eta)$ такое, чтобы ни для какого $y \in R$ не было $\varrho(y, \overline{f(S_i)} - U) < \delta$ одновременно для $i = 1$ и $i = 2$; это возможно, так как $\overline{f(S_i)}$ компактны. Пусть теперь $g \in C'(P, R)$, $|g - f| < \delta$. Если $y \in \overline{g(S_1)}$, $y \in \overline{g(S_2)}$, то $\varrho(y, \overline{f(S_1)}) < \delta$, $\varrho(y, \overline{f(S_2)}) < \delta$; следовательно, для $i = 1$ или $i = 2$ имеем $\varrho(y, \overline{f(S_i)}\, U) < \delta$, из чего вытекает $\varrho(y, \overline{f(S_1)}\,\overline{f(S_2)}) < \frac{1}{2}(\varepsilon - \eta)$. Так как $\varrho(\overline{f(S_1)}\,\overline{f(S_2)}, f(S_1S_2)) = \eta$, $\varrho(f(S_1S_2), g(S_1S_2)) < \frac{1}{4}(\varepsilon - \eta)$, получаем $\varrho(\overline{g(S_1)}\,\overline{g(S_2)}, g(S_1S_2)) < \varepsilon$.

1.11. *Пусть R — сепарабельное пространстэо Банаха. Пусть P — нормальное пространство, $S_1 \subset P$, $S_2 \subset P$ замкнуты. Пусть $f \in C'(P, R)$. Пусть*

$$\min[\dim S_1, \dim f(P)] + \min[\dim S_2, \dim f(P)] + 1 \leqq \operatorname{lin}\dim R .$$

Тогда для любых $f \in C'(P, R)$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ существует $g \in C'(P, R)$ так, что

$$|f - g| < \delta , \quad \varrho(\overline{g(S_1)}\,\overline{g(S_2)} , \quad g(S_1S_2)) < \varepsilon .$$

Доказательство достаточно провести (см. 1.6) при предположении, что $S_1 + S_2 = P$. Возьмем $\eta > 0$, $\eta < \frac{1}{2}\delta$, $\eta < \frac{1}{6}\varepsilon$. Пусть $\{U_\lambda\}$ — конечное открытое покрытие пространства $f(P)$, $\operatorname{ord}\{U_\lambda\} \leqq \dim f(P)$, $\operatorname{diam} U_\lambda < \eta$. Легко установить, что существуют открытые $V_{0\mu} \subset P$ (в конечном числе) так, что $\{V_{0\mu}\} \leqq \{f^{-1}(U_\lambda)\}$, $\operatorname{ord}\{V_{0\mu}\} \leqq \dim f(P)$, $V_0 = \sum\limits_\mu V_{0\mu} \supset S_1S_2$, $V_{0\mu}S_1S_2 \neq \emptyset$, $\operatorname{ord}\{V_{0\mu}\} \leqq \dim S_1S_2$. Аналогично существуют (для $i = 1, 2$) конечные системы $\{V_{i\mu}\}$ такие, что $V_{i\mu}$ открыты в P, $\{V_{i\mu}\} \leqq \{f^{-1}(U_\lambda)\}$, $V_i = \sum\limits_\mu V_{i\mu} \supset S_1 - V_0$, $\operatorname{ord}\{V_{i\mu}\} \leqq \dim S_i$, $\operatorname{ord}\{V_{i\mu}\} \leqq \dim f(P)$, $V_1V_2 = \emptyset$, $V_{i\mu}(S_i - V_0) \neq \emptyset$. Выберем для каждого $V_{i\mu}$ точку $b_{i\mu} \in R$ так, чтобы $\varrho(b_{i\mu}, f(V_{i\mu})) < \eta$ и чтобы точки $b_{i\mu}$ находились в общем положении (были свободно линейно расположены). Построим теперь для множеств $V_{i\mu}$ функции $\varrho_{i\mu}$ со свойствами, указанными в I 1.6 и для $x \in P$ положим $g(x) = \Sigma\varphi_{i\mu}(x)\, b_{i\mu}$; очевидно, $g \in C'(P, R)$. Так как $\operatorname{diam} f\{V_{i\mu}\} < \eta$, то для любого $x \in P$ те точки $b_{i\mu}$, для которых $\varphi_{i\mu}(x) \neq 0$, имеют от $f(x)$ расстояние $< 2\eta$; из этого вытекает $|f(x) - g(x)| < 2\eta$ и, следовательно, $|f - g| < \delta$. Положим $\operatorname{ord}\{V_{i\mu}\} = r_i$, так что $r_i = \min[\dim S_i, \dim f(P)]$. Очевидно, что (при $i = 1, 2$) $g(S_i - V_0)$ содержится в сумме выпуклых оболочек множества, состоящих из не более чем $r_i + 1$ точек $b_{i\mu}$. Из $r_1 + r_2 + 1 \leqq \operatorname{lin}\dim R$ и общего положения точек $b_{i\mu}$ теперь сразу вытекает $\overline{g(S_1 - V_0)}\,\overline{g(S_2 - V_0)} = \emptyset$ и, следовательно, $\overline{g(S_1)}\,\overline{g(S_2)} \subset \overline{g(V_0)}$. Пусть теперь $x \in V_0$; возьмем $V_{0\nu}$ так, чтобы $x \in V_{0\nu}$ и выберем $z \in V_{0\nu}S_1S_2$. Тогда $|f(x) - f(z)| < \eta$, $|g(x) - f(x)| \leqq 2\eta$, $|f(z) - g(x)| \leqq 2\eta$, следовательно $|g(x) - g(z)| < 5\eta$. Итак, если $y \in \overline{g(V_0)}$, то $\varrho(y, g(S_1S_2)) \leqq 5\eta$. Тем более будет $\varrho(\overline{g(S_1)}\,\overline{g(S_2)}, g(S_1S_2)) \leqq 5\eta < \varepsilon$.

1.12. *Пусть R — сепарабельное пространство Банаха. Пусть P — нормальное пространство, $S_1 \subset P$, $S_2 \subset P$ замкнуты; пусть $\dim S_1 + \dim S_2 + 1 \leqq \operatorname{lin}\dim R$. Тогда для почти всех $f \in C'(P, R)$*

$$\overline{f(S_1)}\,\overline{f(S_2)} = \overline{f(S_1S_2)} .$$

Доказательство. Обозначим через T множество $f \in C'(P, R)$, обладающих указанным свойством, через T_k множество $f \in C'(P, R)$ таких, что

$$\varrho(\overline{f(S_1)}\,\overline{f(S_2)} , \quad \overline{f(S_1S_2)}) < \frac{1}{k} .$$

Тогда, очевидно, будет $T = \prod_{k=1}^{\infty} T_k$; T_k являются открытыми в силу 1.10, и плотными в силу 1.11.

1.13. Теорема. *Пусть R — сепарабельное пространство Банаха; пусть P — нормальное пространство, $S_i \subset P$ $(i = 1, 2, \ldots)$ замкнуты. Пусть $2 \dim \Sigma S_i + 1 \leqq \operatorname{lin} \dim R$. Тогда для почти всех $f \in C'(P, R)$ справедливо следующее утверждение: для любых $i_1, i_2, \ldots, i_k$ имеем*

$$\overline{f(S_{i_1})} \ldots \overline{f(S_{i_k})} = \overline{f(S_{i_1} \ldots S_{i_k})}\,,$$

$$\dim \overline{f(S_{i_1})} \ldots \overline{f(S_{i_k})} = \dim f(S_{i_1} \ldots S_{i_k}) = \dim S_{i_1} \ldots S_{i_k}\,.$$

Доказательство проводится на основании 1.12 индукцией по k; затем используется 1.9.

1.14. Теорема. *Пусть R — сепарабельное пространство Банаха. Пусть P — нормальное пространство; пусть множества $A \subset P$, $B \subset P$ имеют одновременно тип F_σ и G_δ; пусть $\dim A + \dim B + 1 \leqq \operatorname{lin} \dim R$. Тогда для почти всех $f \in C'(P, R)$*

$$f(A)\, f(B) = f(AB)\,.$$

Доказательство. Множества $A - B$, $B - A$ являются, очевидно, множествами типа F_σ; положим $A - B = \Sigma C_i$, $B - A = \Sigma D_j$, где C_i, D_j замкнуты. Тогда из 1.12 следует: для почти всех $f \in C'(P, R)$ множество $\overline{f(C_i)}\,\overline{f(D_j)}$ пусто, следовательно, $f(A - B)\, f(B - A) = \emptyset$, и потому, $f(A)\,.$ $.\, f(B) = f(AB)$.

1.15. Теорема. *Пусть R — сепарабельное пространство Банаха. Пусть P — нормальное пространство; пусть $A \subset P$ есть открытое F_σ-множество (замкнутое G_δ-множество). Пусть $\dim A + \dim(P - A) + 1 \leqq$ $\leqq \operatorname{lin} \dim R$. Тогда для почти всех $f \in C'(P, R)$ верно утверждение: $f(A)$ открыто (замкнуто) в $f(P)$ и $f^{-1}[f(A)] = A$.*

Доказательство. Пусть A открыто, $A = \Sigma A_i$, A_i — замкнутые множества. Положим $B = P - A$. Тогда $A_i B = \emptyset$, следовательно, согласно 1.12, для почти всех $f \in C'(P, R)$ будет $\overline{f(A_i)}\,\overline{f(B)} = \emptyset$, значит, $f(A)\,\overline{f(B)} = \emptyset$. Из этого уже следует доказываемое утверждение.

1.16. Теорема. *Пусть R — сепарабельное пространство Банаха бесконечной размерности. Пусть P — нормальное пространство и пусть дано его непрерывное отображение φ на сепарабельное пространство Q. Тогда для почти всех $f \in C'(P, R)$ существует непрерывное отображение g пространства $f(P)$ на Q такое, что $gf = \varphi$.*

Доказательство. Пусть множества U_i образуют открытую базу в Q. Положим $G_i = \varphi^{-1}(U_i)$. Тогда G_i являются открытыми F_σ-множествами, следовательно, по 1.15 для почти всех $f \in C'(P, R)$ множества $f(G_i)$ открыты в $f(P)$, и $G_i = f^{-1}(f(G_i))$. Пусть теперь $x \in P$, $x' \in P$, $f(x) = f(x')$. Если бы

$\varphi(x) \neq \varphi(x')$, то существовали бы U_i, U_j такие, что $\varphi(x) \in U_i$, $\varphi(x') \in U_j$, $U_iU_j = \emptyset$, значит и $G_iG_j = \emptyset$, $H_iH_j = \emptyset$, где $H_i = f(G_i)$; но мы имеем $x \in G_i$, $x' \in G_j$ и потому $f(x) \in H_i$, $f(x') \in H_j$, $f(x) = f(x')$. Итак, мы пришли к противоречию; следовательно, для $f(x) = f(x')$ мы всегда имеем $\varphi(x) = \varphi(x')$. Благодаря этому, однозначно определяется отображение g множества $f(P)$ на Q такое, что $jgf = \varphi$. Так как, очевидно, $g^{-1}(U_i) = f(\varphi^{-1}(U_i)) = H_i$, то отображение g является непрерывным.

1.17. В качестве последнего результата этого параграфа приведем теорему о размерности образа при продолжении отображения, которая по своему характеру до некоторой степени аналогична некоторым теоремам § 3 настоящей работы.

Теорема. *Пусть R — сепарабельное пространство Банаха. Пусть P — нормальное пространство, $S \subset P$ — замкнутое G_δ-множество, $f \in C'(P, R)$. Тогда для почти каждого $F \in (P, R)$ такого, что $F_S = f$, имеем* $\dim F\ (P—S) \leqq \dim(P - S)$.

Замечание. Множество таких $F \in C'(P, R)$, что $F_S = f$, не пусто, в силу 1.5; оно, очевидно, замкнуто в $C'(P, R)$ и, следовательно, является полным. Ввиду этого утверждение теоремы имеет смысл (ср. I 2.11).

Доказательство. Пусть $P - S = \Sigma A_i$, A_i замкнуты. Обозначим через T множество тех $F \in C'(P, R)$, для которых $F_S = f$; через Z обозначим множество $F \in T$ таких, что $\dim F(P - S) \leqq \dim(P - S)$, а через Z_k — множество тех $F \in T$, для которых $\dim F(A_k) \leqq \dim(P - S)$. Тогда $\prod\limits_{k=1}^{\infty} Z_k \subset$ $\subset Z$, и Z_k являются по 1.1 G_δ-множествами в T. Достаточно доказать: каждое Z_k плотно в T. Возьмем определенное k. Пусть $G \in C'(P, R)$, $G_S = f$; пусть $\varepsilon > 0$. По 1.7 существует $F_1 \in C'(P, R)$ так, что $\dim \overline{F_1(A_k)} \leqq \dim A_k$, $|F_1 - G| < \varepsilon$. Возьмем далее $\varphi \in (P, E)$ так, чтобы $x \in P \Rightarrow 0 \leqq \varphi(x) \leqq 1$, $x \in S \Rightarrow \varphi(x) = 0$, $x \in A_k \Rightarrow \varphi(x) = 1$, и положим $F(x) = (1 - \varphi(x))\, G(x) +$ $+ \varphi(x)\, F_1(x)$. Легко видеть, что $F \in C'(P, R)$, $|F - G| \leqq |F_1 - G| < \varepsilon$, $F_S = G_S = f$, $F_{A_k} = (F_1)_{A_k}$, так что $\dim \overline{F(A_k)} = \dim \overline{F_1(A_k)} \leqq \dim A_k \leqq$ $\leqq \dim(P - S)$. Значит, Z_k плотно в T, и теорема доказана.

§ 2

2.1. *Пусть R — пространство Банаха (c_0), т. е. пространство, элементами которого являются сходящиеся к нулю последовательности $x =$ $= \{x_j\}$ действительных чисел, причем в пространстве введена норма $|x| =$* $= \sup|x_j|$.

Существуют множества $U_{k\mu} \subset R$ такие, что

(1) *при $k = 1, 2, \ldots$ система $\{U_{k\mu}\}$ является счетным локально конечным открытым покрытием пространства R;*

(2) $\operatorname{diam} U_{k\mu} \to 0$ *для* $k \to \infty$ *равномерно относительно* μ;

(3) *пересечение границ* m *различных* $U_{k\mu}$ *содержится в объединении счетного числа некоторых линейных множеств, линейный декремент каждого из которых равен* m.

Доказательство. I. Обозначим через M множество всех $\mu = \{\mu_j\} \in R$ таких, что μ_j — целые числа (тогда, очевидно, будет всегда $\mu_j = 0$ при больших j). Очевидно, что M счетно. Возьмем для $\mu \in M$, $j, k = 1, 2, \dots$ положительные рациональные $\varepsilon(\mu, k, j)$ так, чтобы (1) $\varepsilon(\mu, k, j) < \frac{1}{5k}$, (2) $\varepsilon(\mu, k, j) \neq \varepsilon(\mu', k', j')$ для $(\mu, k, j) \neq (\mu', k', j')$. Возьмем далее иррациональное число ϑ, $0 < \vartheta < 1$. Теперь положим

$$\tau(\mu, k, j) = \frac{4}{5k} - \vartheta \,.\, \varepsilon(\mu, k, j)\,.$$

Пусть $U_{k\mu}$ означает множество всех $x = \{x_j\} \in R$ таких, что $\left|x_j - \frac{1}{k}\mu_j\right| < \tau(\mu, k, j)$ для $j = 1, 2, \dots$

II. Если $x \in U_{k\mu}$, то, ввиду $\tau(\mu, k, j) > \frac{3}{5k}$, существует всегда $\alpha > 0$ так, что $\left|x_j - \frac{1}{k}\mu_j\right| + \alpha < \tau(\mu, k, j)$; отсюда следует, что каждое $U_{k\mu}$ открыто. Если $x \in R$, то для $k = 1, 2, \dots$ существует $\mu \in M$ так, что $|kx - \mu| \leqq \frac{1}{2}$, следовательно, $\left|x - \frac{1}{k}\mu\right| \leqq \frac{1}{2}k < \tau(\mu, k, j)$ и потому $x \in U_{k\mu}$. Следовательно, каждая система $\{U_{k\mu}\}_\mu$ является открытым покрытием R. Пусть заданы $k = 1, 2, \dots$ и $x \in R$. Обозначим через V множество $y \in R$, для которых $|x - y| < \frac{1}{10k}$. Возьмем p так, чтобы для $j > p$ было $x_j < \frac{1}{10k}$. Теперь докажем, что V пересекается не более чем с 2^p множествами $U_{k\mu}$. Если $VU_{k\mu} \neq \emptyset$, то выберем $y \in VU_{k\mu}$; тогда для $j > p$ имеем $|y_j| < \frac{1}{5}k$, и, следовательно, ввиду $\tau(\mu, j, k) < \frac{4}{5k}$, получаем $\left|\frac{1}{k}\mu_j\right| < \frac{1}{k}$, значит $\mu_j = 0$; для $j \leqq p$ из $|x - y| < \frac{1}{10k}$, $y \in U_{k\mu}$ вытекает $\left|x_j - \frac{1}{k}\mu_j\right| < \frac{1}{10k} + \tau(\mu, k, j) < \frac{1}{k}$ $|kx_j - \mu_j| < 1$, так что μ_j имеет не более двух возможных значений. Следовательно, V действительно пересекается самое большее с 2^p множествами $U_{k\mu}$; из этого вытекает что каждая $\{U_{k\mu}\}_\mu$ локально конечна. Очевидно, $\operatorname{diam} U_{k\mu} = 2 \sup \tau(\mu, k, j) \leqq \frac{8}{5k}$, так что $\operatorname{diam} U_{k\mu} \to 0$ для $k \to \infty$ равномерно относительно μ.

III. Остается доказать, что $U_{k\mu}$ имеют свойство (3). Пусть c — вещественное число и $j = 1, 2, \ldots$; через L_{jc} обозначим множество $x = \{x_i\} \in R$, для которых $x_j = c$; L_{jc} является линейным множеством с декрементом, равным 1. При $s = 1$ или $s = -1$ положим $\alpha(k, \mu, j, s) = \frac{1}{k}\mu_j + s\tau(\mu, k, j)$; легко установить, что $\alpha(k, \mu, j, s)$ попарно отличны друг от друга. Далее легко обнаружим, что граница $U_{k\mu}$ является частью соединения множеств $L_{j, \alpha(k, \mu, j, s)}$. Отсюда следует, что пересечение границ m различных $U_{k\mu}$ содержится в соединении счетного числа множеств, каждое из которых является пересечением m различных $L_{j, \alpha(k, \mu, j, s)}$. Но такое пересечение или пусто или является линейным множеством, декремент которого равен m (если все индексы j различны). Этим доказательство завершается.

2.2. *Пусть R — сепарабельное пространство Банаха, содержащее бесконечное равномерно линейно независимое множество. Пусть P — метрическое пространстэо; пусть $S \subset P$ замкнуто и $f \in C'(P, R)$. Тогда для почти ссех $f \in C'(P, R)$ отображение f_S является равномерно нульмерным.*[3]

2.3. *Пусть P — метризуемое пространство. Пусть $A_i \subset P$ — замкнутые множества,* $\dim A_i < \infty$. *Пусть даны открытые множества $G_{k\lambda}$ и замкнутые множества F_k такие, что (для $k = 1, 2, \ldots$) $F_k \subset \sum_\lambda G_{k\lambda}$, система $\{G_{k\lambda}\}_\lambda$ локально конечна в P и* $\operatorname{ord} \{G_{k\lambda}\}_\lambda < \infty$. *Тогда существуют открытые множества $H_{k\lambda}$ так, что* (1) *$\overline{H}_{k\lambda} \subset G_{k\lambda}$ (следовательно, каждая $\{H_{k\lambda}\}_\lambda$ локально конечна),* (2) *$F_k \subset \sum_\lambda H_{k\lambda}$,* (3) *пересечение множества A_i с границами m различных $H_{k\lambda}$, если оно не пусто, имеет размерность не превышающую* $\dim A_i - m$.

Доказательство. I. Предположим сначала, что $F_k = P$ для всех k. Пусть R означает, как и в 2.1, пространство (c_0), и пусть $U_{k\mu}$ имеют свойства, указанные в 2.1. Выберем еще δ_k так, чтобы $\operatorname{diam} U_{k\mu} < \delta_k$, $\delta_k > \delta_{k+1}$, $\lim \delta_k = 0$. Из 2.1 следует существование линейных множеств $L_{mq} \subset R$ таких, что линейный декремент L_{mq} равен m и пересечение границ m произвольных различных $U_{k\mu}$ является частью множества $\sum_q L_{mq}$.

В пространстве P введем определенную метрику. Из I 2.14, 1.7 и 2.2 теперь уже следует, что почти все $f \in C'(P, R)$ имеют следующие свойства:

(1) f является нульмерным относительно каждой системы $\{G_{k\lambda}\}_\lambda$, $k = 1, 2, \ldots$;

(2) $\dim L_{mq}\, \overline{f(A_i)} \leq \dim A_i - m$ или $L_{mq}\, \overline{f(A_i)} = \emptyset$;

(3) каждое f_{A_i} является равномерно нульмерным.

Возьмем теперь определенное f, обладающее указанными свойствами. Из (1) вытекает существование чисел $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k > \varepsilon_{k+1}$ таких, что $\delta(S) \leq \{G_{k\lambda}\}_\lambda$ как только $S \subset P$, $\operatorname{diam} f(S) < \varepsilon_k$. Теперь возьмем j_k так,

[3]) См. I 2.7.

чтобы было $\delta_{jk} < \varepsilon_k$ и положим $V_{k\mu} = f^{-1}(U_{jk\mu})$. Если B есть пересечение границ каких-нибудь m различных $V_{k\mu}$, C — пересечение соответствующих $U_{jk\mu}$, то, очевидно, $B \subset f^{-1}(C)$, $C \subset \sum_q L_{mq}$. Из (2) далее следует для любого A_i, что или $\dim C\overline{f(A_i)} \leqq \dim A_i - m$, или $C\overline{f(A_i)} = \emptyset$. Отсюда, согласно (3) и I 3.3, вытекает, что $\dim A_i B \leqq \leqq \dim A_i - m$ или $BA_i = \emptyset$. Имеем, очевидно, $\sum_\mu V_{k\mu} = f^{-1}(\sum_\mu U_{jk\mu}) = P$. Из локальной конечности $\{U_{jk,\mu}\}_\mu$ следует, что также $\{V_{k\mu}\}_\mu$ локально конечна. Так как $\operatorname{diam} f(V_{k\mu}) < \varepsilon_k$, то имеем $\delta(\overline{V_{k\mu}}) \leqq \{G_{k\lambda}\}_\lambda$, так что должны существовать открытые в $\overline{V_{k\mu}}$ множества $W^*_{k\mu\varrho}$ такие, что $\sum_\varrho W^*_{k\mu\varrho} = \overline{V_{k\mu}}$, $\{W^*_{k\mu\varrho}\}_{\mu\varrho} \leqq \{G_{k\lambda}\}_\lambda$, $W^*_{k\mu\varrho}$ замкнуты в $\overline{V_{k\mu}}$, $\operatorname{ord} \{W^*_{k\mu\varrho}\} \leqq 0$. Положим еще $W_{k\mu\varrho} = V_{k\mu} W^*_{k\mu\varrho}$. Тогда $W_{k\mu\varrho}$ открыты, $\sum_\varrho W_{k\mu\varrho} = V_{k\mu}$, $\{\overline{W}_{k\mu\varrho}\}_{\mu\varrho} \leqq \{G_{k\lambda}\}_\lambda$, каждая система $\{W_{k\mu\varrho}\}_{\mu\varrho}$ является локально конечным покрытием P. Очевидно, что граница каждого $W_{k\mu\varrho}$ является частью границы $V_{k\mu}$, и что границы двух $W_{k\mu\varrho}$ с одинаковым k, μ, но различными ϱ, дизъюнктны. Отсюда следует, что пересечение A_i с границами m различных $W_{k\mu\varrho}$ или пусто, или его размерность $\leqq \dim A_i - m$. Далее, для каждого k подберем для всех μ, ϱ индексы $\lambda = \varphi(\mu, \varrho)$ так, чтобы $W^*_{k\mu\varrho} \subset G_{k\lambda}$, и положим $H_{k\lambda} = \sum W_{k\mu\varrho}$, причем сумма берется по таким μ, ϱ, что $\varphi(\mu, \varrho) = \lambda$. Из локальной конечности $\{W_{k\mu\varrho}\}_{\mu\varrho}$ теперь уже следует, что $\overline{H}_{k\lambda} \subset G_{k\lambda}$; очевидно $\sum_\lambda H_{k\lambda} = \sum_{\mu\varrho} W_{k\mu\varrho} = P$, $\dot{H}_{k\lambda} = \dot{H}_{k\lambda} = \sum(\overline{W}_{k\mu\varrho} - W_{k\mu\varrho})$, где сумма берется по тем μ, ϱ, для которых $\varphi(\mu, \varrho) = \lambda$. Из этого видно, что $H_{k\lambda}$ удовлетворяют условиям теоремы.

II. В общем случае прибавим к $\{G_{k\lambda}\}$ еще множество $P - F_k$. Тем самым дело сводится к предыдущему случаю, так что существуют $H_{k\lambda}$ и Γ_k такие, что (1) $\overline{H_{k\lambda}} \subset G_{k\lambda}$, (1′) $\overline{\Gamma}_k \subset P - F_k$, (2′) $\sum H_{k\lambda} + \Gamma_k = P$, (3) размерность пересечения A_i с границами m различных $H_{k\lambda}$, если оно не пусто, не превышает $\dim A_i - m$. Так как $\Gamma_k F_k = \emptyset$, получаем (2) $F \subset \sum H_{k\lambda}$, чем и завершается доказательство.

2.4. Теорема. *Пусть P — метризуемое пространство, $A_i \subset P$ замкнуты, $\dim A_i < \infty$. Пусть даны открытые множества $G_{k\lambda}$ и замкнутые множества F_k, причем всегда $F_k \subset \sum_\lambda G_{k\lambda}$. Тогда существуют открытые множества $H_{k\lambda}$ такие, что (1) $\overline{H}_{k\lambda} \subset G_{k\lambda}$, всякая система $\{H_{k\lambda}\}_\lambda$ локально конечна в P; (2) $F_k \subset \sum_\lambda H_{k\lambda}$; (3) пересечение A_i с границами m различных $H_{k\lambda}$ или пусто или имеет размерность, непревышающую $\dim A_i - m$.*

Доказательство. I. Сначала докажем следующее: если множества $G'_{k\mu}$ открыты, $\{G'_{k\mu}\}_\mu \leqq \{G_{k\lambda}\}_\lambda$ для любого k, $F_k \subset \sum G'_{k\mu}$ и если к множествам $G_{k\lambda}$ существуют $H_{k\lambda}$, имеющие свойства (1)—(3). Действительно, для

$k = 1, 2, \ldots$ выберем для каждого μ индекс $\lambda = \varphi(\mu)$, так чтобы $G'_{k\mu} \subset G_{k\lambda}$, и положим $H_{k\lambda} = \sum_{\varphi(\mu)=\lambda} H'_{k\mu}$; тогда, ввиду локальной конечности $\{H'_{k\mu}\}_\mu$, имеем $\overline{H}_{k\lambda} \subset G_{k\lambda}$, $\overline{H}_{k\lambda} - H_{k\lambda} = \sum_{\varphi(\mu)=\lambda} (\overline{H'_{k\mu}} - H'_{k\mu})$, откуда следует, согласно 1.9, что условие (3) выполняется также для $H_{k\lambda}$.

II. Из I 2.10 и I 1.7 следует, что существуют $G'_{k\mu}$ такие, что (при $k = 1, 2, \ldots$) $\{G'_{k\mu}\}_\mu \leqq \{G_{k\lambda}\}$, $F_k \subset \sum_\mu G'_{k\mu}$, $\{G'_{k\mu}\}$ локально конечна в P и является соединением счетного числа систем порядка 0. Итак, ввиду I, достаточно доказать теорему для случая, когда данные множества $G_{k\lambda}$ удовлетворяют условию: каждая система $\{G_{k\lambda}\}$ локально конечна и является соединением счетного числа систем порядка 0.

III. Предполагая, что имеет место только что высказанное условие, обозначим $G_{k\lambda}$ через $G_{kp\varrho}$, причем $\operatorname{ord} \{G_{kp\varrho}\}_\varrho = 0$. Положим $G^*_{kp} = \sum_\varrho G_{kp\varrho}$; тогда $\{G^*_{kp}\}_p$ локально конечны, $\sum_p G^*_{kp} \supset F_k$, откуда следует, что существуют замкнутые B_{kp} такие, что $B_{kp} \subset F_k G^*_{kp}$, $\sum_p B_{kp} = F_k$. Теперь из 2.3 вытекает, что существуют открытые $H_{kp\varrho}$ так, что $\overline{H}_{kp\varrho} \subset G_{kp\varrho}$, $B_{kp} \subset \sum_\varrho H_{kp\varrho}$ (и следовательно, $F_k \subset \sum_{p\varrho} H_{kp\varrho}$), размерность пересечения A_i с границами m различных $H_{kp\varrho}$, если оно не пусто, не превышает $\dim A_i - m$. Ввиду того, что $G_{kp\varrho}$ суть как раз $G_{k\lambda}$, причем между встречающимися парами индексов (p, ϱ) и индексами λ существует взаимно однозначное соответствие, утверждение теоремы доказано для $\{G_{k\lambda}\}$ с упомянутым условием, а тем самым, согласно II, доказана и вся теорема.

2.5. Теорема. *Пусть P — метризуемое пространство, пусть $A_i \subset P$ замкнуты, $\dim A_i < \infty$. Тогда существует открытая база пространства P, которая является соединением счетного числа локально конечных систем и обладает тем свойством, что пересечение любого A_i с границами m различных множеств базы или пусто или имеет размерность, не превышающую $\dim A_i - m$.*

Замечание. Эта теорема давно известна, также как и теоремы 2.4, 2.6 и 2.9, для случая сепарабельных метрических пространств; см. например, С. Эйленберг и Э. Отто [2]. Для общего случая метрических пространств эту теорему доказал К. Морита [7].

Доказательство. Вытекает непосредственно из 2.4, если в качестве системы $\{G_{k\lambda}\}$ взять систему всех открытых множеств, диаметр которых $< 1/k$.

2.6. Теорема. *Пусть P — метризуемое пространство, пусть $A_i \subset P$ замкнуты, $\dim A_i < \infty$. Пусть $\{G_\lambda\}$ — открытое покрытие P. Тогда существуют замкнутые $F_\lambda \subset G_\lambda$ так, что $\{F_\lambda\}$ есть локально конечное за-*

мкнутое покрытие P, и пересечение любого A_i с $m+1$ различными F_λ или пусто или имеет размерность, не превышающую $\dim A_i - m$.

Доказательство. Согласно 2.4, существуют открытые H_λ такие, что $\overline{H}_\lambda \subset G_\lambda$, $\{H_\lambda\}$ есть локально конечное открытое покрытие P, H_λ удовлетворяют условию (3) из 2.4. Предположим, что индексы λ образуют вполне упорядоченное множество, и положим $F_\lambda = \overline{H}_\lambda - \sum\limits_{\mu<\lambda} H_\mu$. Тогда $F_\lambda \subset G_\lambda$, $\{F_\lambda\}$ локально конечна, $\sum F_\lambda = P$. Пусть $B = F_{\lambda_1} \ldots F_{\lambda_{m+1}}$, причем предполагается, что $\lambda_1 < \ldots < \lambda_{m+1}$. Тогда имеем $B \subset (\overline{H}_{\lambda_{m+1}} - \sum\limits_{k=1}^{m} H_{\lambda_k}) \prod\limits_{k=1}^{m} \overline{H}_{\lambda_k}$, следовательно, $B \subset \prod\limits_{k=1}^{m} (\overline{H}_{\lambda_k} - H_{\lambda_k})$, откуда вытекает $\dim BA_i \leqq \dim A_i - m$ или $BA_i = \emptyset$.

2.7. *Пусть P — нормальное пространство, $\{A_\lambda\}$ — локально конечное замкнутое покрытие P. Тогда существуют замкнутые множества $F_\lambda \subset A_\lambda$ такие, что $\sum F_\lambda = P$ и справедливо следующее утверждение: если $F'_\lambda \subset F_\lambda$ замкнуты, $\sum F'_\lambda = P$, то $F'_\lambda = F_\lambda$ для каждого λ.*

Для доказательства достаточно заметить следующее: если $F_\lambda^{(0)} = A_\lambda$, $F_\lambda^{(\xi)} \supset F_\lambda^{(\eta)}$ для $\xi < \eta$, (ξ, η — порядковые числа, меньшие α), $\sum\limits_\lambda F_\lambda^{(\xi)} = P$ для каждого $\xi < \alpha$, то $\sum\limits_\lambda \prod\limits_{\xi<\alpha} F_\lambda^{(\xi)} = P$, как вытекает из локальной конечности $\{A_\lambda\}$.

Замечание. Достаточно было предполагать только то, что ни одно x не лежит в бесконечно многих A_λ.

2.8. *Пусть P — нормальное пространство, $\{F_\lambda\}$ — локально конечное замкнутое покрытие P, и пусть имеет место следующее: если $F'_\lambda \subset F_\lambda$ — замкнутые множества, $\Sigma F'_\lambda = P$, то $F'_\lambda = F_\lambda$ для каждого λ. Пусть U_λ — множество внутренних точек F_λ. Тогда* $\operatorname{ord} \{U_\lambda\} \leqq 0$, $F_\lambda = \overline{U}_\lambda$.

Доказательство. Если бы существовали λ_1, λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, такие, что $V = U_{\lambda_1} U_{\lambda_2} \neq \emptyset$, то полагая $F'_{\lambda_1} = F_{\lambda_1} - V$ и $F'_\lambda = F_\lambda$ для $\lambda \neq \lambda_1$, получаем $\Sigma F'_\lambda = P$, что ведет к противоречию. Множества $F_\lambda - U_\lambda$ являются, очевидно, нигде не плотными, и потому, ввиду локальной конечности $\{F_\lambda\}$, нигде не плотно также множество $P - \sum\limits_\lambda U_\lambda$, так что $P = \overline{\Sigma U_\lambda} = \Sigma \overline{U}_\lambda$. Отсюда непосредственно следует $\overline{U}_\lambda = F_\lambda$.

2.9. Теорема. *Пусть P — метризуемое пространство; пусть $\{G_\lambda\}$ — локально конечное открытое покрытие P. Пусть $A_i \subset P$ — замкнутые множества,* $\dim A_i < \infty$. *Тогда существуют открытые U_λ такие, что* $\operatorname{ord} \{U_\lambda\} = 0$, $\overline{U}_\lambda \subset G_\lambda$, $\Sigma \overline{U}_\lambda = P$, $P - U_\lambda = \overline{P - F_\lambda}$, *где $F_\lambda = \overline{U}_\lambda$ — пересечение любого A_i с $m+1$ различными F_λ или пусто или имеет размерность, не превышающую* $\dim A_i - m$.

Доказательство. Согласно 2.6, существуют замкнутые $B_\lambda \subset G_\lambda$ такие, что $\Sigma B_\lambda = P$ и пересечение любого A_i с $m+1$ различными B_λ или пусто или имеет размерность $\leqq \dim A_i - m$. Найдем теперь F_λ, имеющие (по отношению к B_λ) свойства, указанные в 2.7, положим $U_\lambda = P - \overline{P - F_\lambda}$ и применим 2.8.

2.10. Теорема. *Пусть P — метризуемое пространство, пусть $\{G_{k\lambda}\}_\lambda$ суть (для $k = 1, 2, \ldots$) локально конечные открытые покрытия P. Пусть множества $A_i \subset P$ замкнуты,* $\dim A_i < \infty$. *Тогда существуют открытые $U_{k\lambda}$ такие, что $U_{k\lambda}$ есть множество внутренних точек множества $F_{k\lambda} = \overline{U}_{k\lambda}$,* $\operatorname{ord} \{U_{k\lambda}\}_\lambda = 0$ *для каждого k, $U_{k\lambda} \subset G_{k\lambda}$, $\sum\limits_\lambda F_{k\lambda} = P$ для каждого k и пересечение любого A_i с $m + p$ различными $F_{k\lambda}$, принадлежащими p системам $\{F_{k\lambda}\}_\lambda$, или пусто или имеет размерность, не превышающую* $\dim A_i - m$.

Доказательство опирается на 2.9 и проводится индукцией по k, причем при переходе от k к $k+1$ и применении 2.9 принимаются во внимание не только множества A_i, но также множества $A_iC_{n,q}$, где $C_{n,q}$ означает сумму всех пересечений $n + q$ различных $F_{h\lambda}$, принадлежащих q системам $\{F_{h\lambda}\}_\lambda$, $1 \leqq h \leqq k$.

2.11. Следующий результат является (конечно, скорее только формально) усилением леммы I 3.1.

Пусть P—нормальное пространство. Тогда два следующих свойства эквивалентны: (1) *P является метризуемым пространством,* $\dim P = 0$, (2) *существуют локально конечные открытые покрытия $\{G_{k\lambda}\}_\lambda$ такие, что их соединение является открытой базой P и* $\operatorname{ord} \{G_{k\lambda}\}_\lambda = 0$.

Доказательство. Известно, что из (1) вытекает (2) (ср. I 2.10, I. 1.11). Пусть справедливо (2); пусть M_k — дискретное пространство, имеющее подходящую мощность, и пусть φ_k — отображение P в M_k, $\varphi_k(x) = \varphi_k(y)$, если и только если x, y лежат в одном и том же $G_{k\lambda}$. Обозначим через Q топологическое произведение пространств M_k; положим $\varphi(x) = \{\varphi_k(x)\} \in Q$. Очевидно, что Q метризуемо. Легко обнаружить, что φ является гомеоморфным отображением P в Q; согласно I 3.7, $\dim Q = 0$; следовательно, $\dim P = 0$.

2.12. Следующая теорема является в некотором смысле обратной к теореме 2.5.

Теорема. *Пусть P — метризуемое пространство; пусть $\{G_{k\lambda}\}_\lambda$ — локально конечные открытые покрытия P и пусть их соединение является открытой базой P. Пусть $1 \leqq p < \infty$, $-1 \leqq q < \infty$ и пусть размерности пересечений границ p различных $G_{k\lambda}$ не превышают q. Тогда* $\dim P \leqq p + q$.

Доказательство только наметим в главных чертах. Если теорема справедлива для $q = -1$, то пусть в общем случае C означает соединение всех пересечений границ p различных $G_{k\lambda}$. Легко установить, что $\dim C \leqq q$. Положим $H_{k\lambda} = G_{k\lambda} - C$; тогда $\{H_{k\lambda}\}$ суть локально конечные открытые покрытия пространства $S = P - C$, соединение которых является открытым базисом S; пересечения границ (в S) p различных $H_{k\lambda}$ пусты; значит, по предположению, $\dim\, S \leqq p - 1$. Отсюда следует $\dim\, P = \dim\,(C + S) \leqq p + q$.

Итак, достаточно доказать теорему для $q = -1$. Доказательство проводится индукцией по p. Для $p = 1$ утверждение, согласно 2.11, справедливо. Если, для $p > 1$, D означает сумму границ всех $G_{k\lambda}$, $H_{k\lambda} = DG_{k\lambda}$, то пересечения границ $p - 1$ различных $H_{k\lambda}$ пусты, следовательно, $\dim D \leqq p - 2$. Из 2.11 следует, что $\dim(P - D) = 0$, так что $\dim P \leqq p - 1$.

§ 3

3.1. Прежде всего исправим недостаток в доказательстве леммы I 1.13, которое не вполне закончено — не доказана локальная конечность системы $\{G_k\}$.

Сформулируем эту лемму снова (в несколько усиленном, но только формально, виде) и приведем ее доказательство.

Пусть P — нормальное пространство, $S \subset P$ замкнуто. Пусть $\{H_k\}$ — счетное локально конечное открытое покрытие пространства S. Тогда существует локально конечная в P система открытых (в P) множеств $\{G_k\}$ такая, что

$$G_kS \subset H_k\,, \quad \Sigma G_k \supset S\,, \quad \{G_kS\} \cong \{H_k\} \cong \{G_k\} \cong \{\overline{G}_k\}\,.$$

Если даны замкнутые множества $F_k \subset H_k$ и открытые (в P) множества $U_k \supset H_k$, то при этом можно еще потребовать, чтобы было $F_k \subset G_k \subset U_k$.

Доказательство. В I 1.13 было в действительности доказано утверждение, которое возникает из только что приведенной леммы, если в ней опустим слова „локально конечная в P“. На это уже доказанное утверждение мы будем опираться. Согласно I 1.7, существует счетное локально конечное открытое покрытие $\{W_\nu\}$ пространства S такое, что каждое W_ν пересекается только с конечным числом множеств H_k. Для удобства обозначим теперь эти W_ν через H_k, где k пробегает множество целых отрицательных чисел (обозначим его через Z); у первоначально введенных H_k индекс k пробегает множество натуральных чисел, которое обозначим через K. Тогда система $\{H_k\}_{k \in K+Z}$ является счетным локально конечным открытым покрытием S. Далее возьмем еще замкнутые $C_k \subset H_k$ так, чтобы было $\sum\limits_{k \in Z} C_k = S$, $\sum\limits_{k \in K} C_k = S$ (что возможно ввиду 1.5), и положим $F'_k = F_k + C_k$; наконец, положим $U_k = P$ для $k \in Z$. Согласно тому, что было уже доказано, существуют открытые в P множества G'_k, $k \in K + Z$, такие, что $G'_kS \subset H_k$, $\Sigma G_k \supset S$, $\{G'_kS\} \cong \{H_k\} \cong \{\overline{G'_k}\}$, $F'_k \subset G'_k \subset U_k$.

Тогда $\sum\limits_{k\in K} G'_k \supset \sum\limits_{k\in K} F'_k \supset \sum\limits_{k\in K} G_k = S$ и аналогично $\sum\limits_{k\in Z} G'_k \supset S$. Возьмем открытое множество Γ так, чтобы было $S \subset \Gamma$, $\overline{\Gamma} \subset \sum\limits_{k\in Z} G'_k$ и для $k \in K$ положим $G_k = \Gamma G'_k$. Тогда (для $k \in K$) будет $G_k S \subset H_k$, $\Sigma G_k \supset S$, $\{G_k S\} \cong \{H_k\} \cong \{G_k\} \cong \{\overline{G_k}\}$, $F_k \subset G_k \subset U_k$. Ввиду того, что $\{G'_k\}_{k\in K+Z} \cong \{H_k\}_{k\in K+Z}$, каждое G'_k, $k \in Z$, пересекается только с конечным числом G'_k, $k \in K$. Из этого и из $\sum\limits_{k\in K} G_k \subset \sum\limits_{k\in K} G'_k$ непосредственно следует, что $\{G_k\}_{k\in K}$ локально конечна в P.

Теперь докажем несколько вспомогательных результатов, касающихся открытых покрытий. Напомним, что система множеств называется звездно конечной, если каждое множество системы пересекается лишь с конечным числом множеств данной системы.

3.2. *Пусть P — нормальное пространство. Пусть $A_k \subset G_k \subset P$, $(k = 1, 2, \ldots)$, пусть A_k являются F_δ-множествами, G_k открыты, $\Sigma A_k = P$. Тогда существует счетное звездно конечное открытое покрытие $\{U_i\}$ пространства P такое, что $\{U_i\} \leqq \{G_k\}$.*

Доказательство. Пусть $A_k = \sum\limits_{h=1} F^h_k$, где F^h_k замкнуты. Существуют, очевидно, открытые H^h_k такие, что $H^h_k \subset G_k$, $\overline{H}^h_k \subset H^{h+1}_k$, $F^h_k \subset H^h_k$ (следовательно, $A_k \subset \sum\limits_h H^h_k$, $P = \sum\limits_{k,h} H^h_k$). Теперь положим $U^h_k = H^h_k - \sum\limits_{j\leqq h-2} \overline{H}^{h-2}_j$ для $h, k = 1, 2, \ldots, h \geqq k$. Тогда U^h_k открыты, $U^h_k \subset G_k$. Пусть $x \in P$; выберем наименьшее h, для которого $x \in \sum\limits_{k=1}^{h} H^h_k$. Пусть $x \in H^h_k$, $k \leqq h$, тогда $x \in U^h_k$, так как не может быть $x \in \overline{H}^{h-2}_j$ (x бы тогда лежало в H^{h-1}_j, что вследствие выбора h невозможно). Следовательно, $\{U^h_k\}_{h,k}$ есть открытое покрытие P. Легко установить, что $U^m_j U^n_k = \emptyset$, если $m \leqq n + 2$. Отсюда следует, что система $\{U^h_k\}_{h,k}$ комбинаторно конечна.

3.3. *Если P — сепарабельное метризуемое пространство, то в каждое его открытое покрытие можно вписать счетное звездно конечное открытое покрытие.*

Этот результат, принадлежащий С. Каплану [5], непосредственно вытекает из 3.2.

3.4. *Пусть P — нормальное пространство, $S \subset P$ замкнуто. Пусть для $k = 1, 2, \ldots$ $\{H_{k\lambda}\}_\lambda$ является счетным локально конечным открытым покрытием S и $\{\overline{H}_{k+1,\lambda}\}_\lambda \leqq \{H_{k\lambda}\}_\lambda$. Тогда существуют открытые в P множества $G_{k\lambda}$ так, что для $k = 1, 2, \ldots$ справедливо следующее:*

(a) $\sum\limits_\lambda G_{k\lambda} \supset S$; (b) $\{G_{k\lambda}\}$ *локально конечна в P;*

(c) $\{\overline{G}_{k\lambda}\} \cong \{SG_{k\lambda}\} \cong \{H_{k\lambda}\}$; (d) $SG_{k\lambda} \subset H_{k\lambda}$ *для каждого λ;*

(e) $\{\overline{H}_{k+1,\lambda}\} \leqq \{G_{k\lambda}\}$; (f) $\{\overline{G}_{k+1,\lambda}\} \leqq \{G_{k\lambda}\}$.

Доказательство. Положим еще $H_{00} = S$. Обозначим (для $k = 0, 1, 2, \ldots$) через L_k множество индексов λ, встречающихся у $H_{k\lambda}$, и для $\lambda \in L_{k+1}$

возьмем $\mu = \varphi(\lambda) \in L_k$ так, чтобы $\overline{H}_{k+1,\lambda} \subset H_{k\mu}$. Положим $F_{k\mu} = \sum_{\varphi(\lambda)=\mu} \overline{H}_{k+1,\lambda}$; $F_{k\mu}$ замкнуты, $F_{k\mu} \subset H_{k\mu}$.

Теперь докажем, что существуют $G_{k\lambda}$, имеющие свойства (a)—(d) и свойство (e′) $H_{k+1,\lambda} \subset G_{k,\varphi(\lambda)}$; (f′) $\overline{G}_{k\lambda} \subset G_{k-1,\varphi(\lambda)}$; из (e′) и (f′), очевидно, вытекает (e) и (f). Требования (a)—(d), (e′), (f′), очевидно, удовлетворяются для $k = 0$, если положить $G_{00} = P$. Итак, предположим, что они уже удовлетворены для $k = 0, 1, \ldots, p$; положим $q = p + 1$ и построим $G_{q\lambda}$. Очевидно, что всегда $F_{q\mu} = G_{p,\varphi(\mu)}$; пусть $U_{q\mu}$ открыты, $F_{q\mu} \subset U_{q\mu} \subset \overline{U}_{q\mu} \subset G_{q,\varphi(\mu)}$. Согласно 3.1, существуют $G_{q\mu}$, имеющие свойства (a)—(d) и удовлетворяющие условию $F_{q\mu} \subset G_{q\mu} \subset U_{q\mu}$, откуда следует $\overline{H}_{q+1,\lambda} \subset G_{q,\varphi(\mu)}$, $\overline{G}_{q\lambda} \subset \overline{U}_{q\lambda} \subset G_{q-1,\varphi(\lambda)}$.

3.5. Следующая лемма имеет основное значение для доказательства результатов, содержащихся в настоящем параграфе.

Лемма. *Пусть P — нормальное пространство, $S \subset P$ — замкнутое G_δ-множество. Пусть f есть непрерывное отображение S в сепарабельное метрическое пространство R. Положим* $r = \min\,[\dim S + 1, \dim f(S) + 1, \dim (P - S)]$. *Пусть $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \geqq \varepsilon_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\lim \varepsilon_k = 0$. Тогда существуют открытые в P множества $V_{k\lambda}$, $G_{k\lambda}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ такие, что*

(1) *для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots$ система $\{V_{k\lambda}\}$ счетна, локально конечна в P и звездно конечна; система $\{V_{0\lambda}\}_\lambda$ содержит только множество P.*

(2) *для каждого k $\{V_{k\lambda}\}_\lambda \cong \{SV_{k\lambda}\}$;*

(3) *для $k \geqq 1$* $\operatorname{diam} f(SV_{k\lambda}) < \varepsilon_k$;

(4) *для каждого k $\sum_\lambda V_{k\lambda} \supset S$;*

(5) $G_{k\lambda} \subset V_{k\lambda}$;

(6) *если $V_{m\mu} G_{k\lambda} \neq \emptyset$, то $k \geqq m - 1$;*

(7) *$\{G_{k\lambda}\}_{k\lambda}$ является счетным звездно конечным открытым покрытием пространства $P - S$;*

(8) $\operatorname{ord} \{G_{k\lambda}\}_{k\lambda} \leqq r$;

(9) *для каждого $x \in P - S$ существует h такое, что, если $x \in G_{k\lambda}$, то или $k = h$, или $k = h - 1$;*

(10) *если $f(S)$ вполне ограничено, то для каждого k системы $\{V_{k\lambda}\}$, $\{G_{k\lambda}\}$ конечны.*

Доказательство. I. Положим $S' = f(S)$. Докажем, что (для $k = 1, 2, \ldots$) существуют счетные звездно конечные открытые покрытия $\{U_{k\lambda}\}_\lambda$ пространства S' такие, что

$$\operatorname{diam} U_{k\lambda} < \varepsilon_k\,, \quad \operatorname{ord}\, \{U_{k\lambda}\}_\lambda \leqq \dim S'\,, \quad \{\overline{U}_{k+1,\lambda}\} \leqq \{U_{k\lambda}\}\,,$$

а в случае, когда S' вполне ограничено (в дальнейшем только коротко „случай ВО"), каждая $\{U_{k\lambda}\}_\lambda$ конечна. Утверждение докажем индукцией по k. Для $k = 1$ оно вытекает непосредственно из 3.3. Пусть теперь уже построены $\{U_{k\lambda}^*\}$ для $h = 1, \ldots, k$. Существуют, (см., например, I 1.5), открытые $U_{k\lambda}^*$ так, что $\overline{U_{k\lambda}^*} \subset U_{k\lambda}$ и $\sum\limits_{\lambda} U_{k\lambda}^* = S$. Далее, существует счетное открытое покрытие $\{W_\mu\}$ пространства S' такое, что $\operatorname{diam} W_\mu < \varepsilon_{k+1}$. Система $\{U_{k\lambda}^* W_\mu\}_{\lambda\mu}$ является счетным открытым покрытием S'. Из 3.3 и из замечания после I 1.11, следует, что в него можно вписать покрытие $\{U_{k+1,\lambda}\}$, которое является счетным звездно конечным и для которого $\operatorname{ord}\{U_{k+1,\lambda}\} \leqq \dim S'$; очевидно, что система $\{U_{k+1,\lambda}\}$ имеет все требуемые свойства. То, что она конечна в случае ВО, следует из конечности $\{U_{k\lambda}\}$ и $\{W_\mu\}$.

II. Положим $s = \min(\dim S, \ \dim S')$. Если $s = \dim S'$, то положим $V'_{k\lambda} = f^{-1}(U_{k\lambda})$. Тогда (a) $\{V'_{k\lambda}\}_\lambda$ есть счетное звездно конечное открытое покрытие S; (b) $\operatorname{diam} f(V'_{k\lambda}) < \varepsilon_k$; (c) $\operatorname{ord}\{V'_{k\lambda}\}_\lambda \leqq s$, (d) $\{\overline{V'}_{k+1,\lambda}\} \leqq \{V_{k\lambda}\}$; (e) в случае ВО системы $\{V'_{k\lambda}\}_\lambda$ конечны. Если $s = \dim S < \dim S'$, то построим открытые множества $V'_{k\lambda}$, обладающие свойствами (a)—(e), индукцией по k. Для $k = 1$ их существование вытекает из 3.3; если $\{V'_{h\lambda}\}$ построены для $h = 1, \ldots, k$, то найдем (см. I 1.5) открытые $V_{k\lambda}^*$ такие, что $\overline{V}_{k\lambda}^* \subset V'_{k\lambda}$. Система $\{V_{k\lambda}^* f^{-1}(U_{k+1,\mu})\}_{\lambda\mu}$ является счетным звездно конечным открытым покрытием S; будем обозначать ее короче через $\{V''_{k+1,\lambda}\}$. Очевидно, что $\{\overline{V}''_{k+1,\lambda}\} \leqq \{V'_{k\lambda}\}$. Из замечания после I 1.11 вытекает существование $V'_{k+1,\lambda} \subset V''_{k+1,\lambda}$ таких, что $\sum\limits_{\lambda} V'_{k+1,\lambda} = S$, $\operatorname{ord}\{V'_{k+1,\lambda}\} \leqq \dim S = s$. $\{V'_{k+1,\lambda}\}$ обладают, очевидно, свойствами (a)—(e).

III. Из 3.4 теперь следует, что существуют открытые в P множества $W_{k\lambda}$, имеющие (относительно $V'_{k\lambda}$) свойства (a)—(f), указанные в 3.4 (где следует теперь писать $H_{k\lambda}$ вместо $V'_{k\lambda}$, $W_{k\lambda}$ вместо $G_{k\lambda}$). Выберем еще открытые Γ_k так, чтобы $S \subset \Gamma_k \subset \overline{\Gamma}_k \subset \sum W_{k\lambda}$, $\Gamma_k \supset \overline{\Gamma}_{k+1}$, $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \Gamma_k = S$, положим, наконец, $V_{k\lambda} = \Gamma_k W_{k\lambda}$, и кроме того, $V_{00} = P$. Множества $V_{k\lambda}$ обладают следующими свойствами:

(α) $V_{k\lambda}$ открыты в P; системы $\{V_{k\lambda}\}_\lambda$ счетны, локально конечны в P и звездно конечны; система $\{V_{0\lambda}\}$ содержит только одно множество P;

(β) для каждого k $\{V_{k\lambda}\} \cong \{SV_{k\lambda}\}$;

(γ) для $k \geqq 1$ $\operatorname{diam} f(SV_{k\lambda}) < \varepsilon_k$;

(δ) $\sum\limits_{\lambda} V_{k\lambda} \supset S$ для $k = 0, 1, 2, \ldots$;

(ε) $\operatorname{ord}\{\overline{V}_{k\lambda}\}_\lambda \leqq s$ для $k = 0, 1, 2, \ldots$;

(ζ) если положим $V_k = \sum\limits_{\lambda} V_{k\lambda}$, то $V_k \supset \overline{V}_{k+1}$, $\prod\limits_{k=1}^{\infty} V_k = S$;

(η) $\{\overline{V}_{k+1,\lambda}\} \leqq \{V_{k\lambda}\}$;

(ϑ) в случае ВО системы $\{\overline{V}_{k\lambda}\}$ конечны.

Свойства (α) следуют из 3.4 (b), (c), свойства же (β) и (ε) — из 3.4 (c); свойство (γ) вытекает из 3.4 (d), свойство (η) из 3.4 (f). Остальные свойства очевидны.

IV. Применим (для $k = 0, 1, 2, \ldots$) лемму I 1.19 к системам $\{\overline{V}_{k+1,\lambda}\}$ и $\{V_{k\lambda}\}$; эта лемма верна (тривиальным образом) также и при $s = \infty$. Получаем существование открытых множеств $H'_{k\lambda}$ таких, что (a) $\overline{H}'_{k\lambda} \subset V_{k\lambda}$; (b) $\sum\limits_{\lambda} H'_{k\lambda} \supset \sum\limits_{\lambda} \overline{V}_{k+1,\lambda} = \overline{V}_{k+1}$; (c) никакое $x \in P$ не лежит в более как $s + 2$ множествах $V_{k+1,\lambda}$, $H'_{k\lambda}$. При этом полагаем $H'_{00} = P$, что, конечно, не может нарушить свойств (a)—(c). Далее положим (*) $H_{k\lambda} = H'_{k\lambda} - \overline{V}_{k+2}$. Тогда (d) $\overline{H}_{k\lambda} \subset V_k - \overline{V}_{k+2}$, так что при $k, m = 0, 1, 2, \ldots$, $|k - m| > 1$ имеем, очевидно, $\overline{H}_{k\lambda}\overline{H}_{m\mu} = \emptyset$. Отсюда и из звездной конечности систем $\{V_{k\lambda}\}$ следует, что (e) система $\{H_{k\lambda}\}_{k\lambda}$ тоже звездно конечна. Из (b) вытекает, что $\sum\limits_{\lambda} H_{k\lambda} \supset \overline{V}_{k+1} - \overline{V}_{k+2}$; отсюда на основании равенств $H_{00} = P - V_2$, $\Pi V_k = S$ получаем, что (f) $\sum\limits_{k,\lambda} H_{k\lambda} = P - S$.

Пусть $x \in P - S$. Выберем такое m, чтобы было $x \in \overline{V}_m - V_{m+1}$. Тогда из (d) следует: (g), если $x \in \overline{H}_{k\lambda}$, то $k = m$ или $k = m - 1$. Согласно (c), точка x лежит не более чем в $s + 2$ множествах $\overline{V}_{m\lambda}$, $\overline{H}_{m-1,\lambda}$ и одновременно не более чем в $s + 2$ множествах $\overline{V}_{m+1,\lambda}$ $\overline{H}_{m\lambda}$. Пусть точка x лежит в p множествах $\overline{H}_{m\lambda}$; тогда она лежит по крайней мере в p множествах $\overline{V}_{m\lambda}$, следовательно, не более чем в $(s + 2) - p$ множествах $\overline{H}_{m-1,\lambda}$, и потому не более чем в $s + 2$ множествах $\overline{H}_{m-1,\lambda}$, $\overline{H}_{m\lambda}$. Из этого следует, что порядок (см. I 1.1 D) системы $\{\overline{H}_{k\lambda}\}_{k\lambda}$ в точке x не превышает $s + 1$. Так как точка $x \in P - S$ была произвольной, получаем (h) ord $\{\overline{H}_{k\lambda}\} \leqq s + 1$.

V. Так как пространство $P - S$ является F_σ-множеством в P и потому нормально, то существуют (см. замечание после I 1.11) открытые множества $G_{k\lambda} \subset H_{k\lambda}$ такие, что $\sum\limits_{k,\lambda} G_{k\lambda} = P - S$, ord $\{G_{k\lambda}\}_{k\lambda} \leqq \dim (P - S)$, следовательно ord $\{G_{k\lambda}\} \leqq r$. Теперь уже легко убедиться в том, что $V_{k\lambda} \subset G_{k\lambda}$ имеют свойства, перечисленные в теореме, а именно: 1 — по IIIα; 2 — по IIIβ; 3 — по IIIγ; 4 — по IIIδ; 5 — по IV(a) и IV(*); 6 — по IV(*); 7 — по IV(*); 7 — по IVe, f; 8 — по только что доказанному; 9 — по IVg, 10 — по IIIδ.

3.6. Теперь докажем, опираясь на 3.5, следующий результат о продолжении непрерывного отображения, из которого мы будем исходить при доказательстве нескольких дальнейших теорем.

Лемма. *Пусть дано нормальное пространство P, замкнутое G_δ-множество $S \subset P$, непрерывное отображение f множества S в сепарабельное нормированное пространство R. Пусть $B_k \subset R$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), $\delta_k \geqq \sup\limits_{y \in f(S)} \varrho(y, B_k)$, $\delta_k \geqq \delta_{k+1}$, $\lim\limits_{k \to \infty} \delta_k = 0$. Положим* $r = \min [\dim S + 1, \dim f(S) + 1, \dim(P - S)]$.

Тогда для любых $\varepsilon_k > 0$ таких, что $\varepsilon_k \geqq \varepsilon_{k+1}$, существует непрерывное отображение F пространства P в R такое, что $F(x) = f(x)$ для $x \in S$ и $F(P - S) \subset \sum_{k=0}^{\infty} Y_k$, где Y_k является суммой счетного числа (в случае вполне ограниченного $f(S)$ даже конечного числа) симплексов,[4] *причем каждый из симплексов, суммой которых является Y_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$), имеет не более чем $r + 1$ вершину, и все эти вершины лежат в $B_k + B_{k+1}$, диаметры же этих симплексов меньше $2(\delta_k + \varepsilon_k)$. Каждое из множеств $F^{-1}(\sum_{k \geqq m} Y_k) + S$ является окрестностью S в P.*

Доказательство. Пусть множества $V_{k\lambda}$, $G_{k\lambda}$ обладают свойствами, указанными в 3.5. Пусть (см. I 1.6) $\varphi_{k\lambda}$ — непрерывные функции в $P - S$ такие, что (1) $\varphi_{k\lambda}(x) = 0$ для $x \in (P - S) - G_{k\lambda}$, (2) $\varphi_{k\lambda}(x) \geqq 0$, $\sum_{k\lambda} \varphi_{k\lambda}(x) = 1$ для каждого $x \in P - S$. Теперь выберем точки $b_{k\lambda}$ так, чтобы было $b_{k\lambda} \in B_k$, $\varrho(b_{k\lambda}, f(SV_{k\lambda})) \leqq \delta_k$. Для $x \in P - S$ положим $F(x) = \sum_{k\lambda} \varphi_{k\lambda}(x)\, b_{k\lambda}$, а для $x \in S$ положим $F(x) = f(x)$.

Пусть $x \in P - S$; тогда, согласно 3.5 (8), (9), точка x содержится как раз в множествах $G_{k\lambda_1}, \ldots, G_{k\lambda_p}, G_{k+1,\lambda_{p+1}}, \ldots, G_{k+1\lambda_q}$, причем $q \leqq r + 1$. Точка $f(x)$, очевидно, лежит в симплексе, натянутом на точки $b_{k\lambda_1}, \ldots, b_{k+1,\lambda_q}$ (этот симплекс обозначим через $Z(x)$ а индекс k через $k(x)$. Расстояние любой из упомянутых точек (обозначим их на минуту через $b_{h\mu}$) от соответствующего $f(SV_{h\mu})$ не превышает δ_h. Согласно 3.5 (2), (5), имеем $\Pi f(SV_{h\mu}) \neq \emptyset$ и, если $k \geqq 1$, $\operatorname{diam} f(SV_{h\mu}) < \varepsilon_h$ (пара (h, μ)) пробегает все пары $(k, \lambda_1), \ldots, (k + 1, \lambda_q)$). Отсюда сразу же следует для $k \geqq 1$, что расстояния между точками $b_{h\mu}$ меньше $2(\delta_k + \varepsilon_k)$ и, следовательно, диаметр соответствующего симплекса меньше чем $2(\delta_k + \varepsilon_k)$.

Полагая $Y_k = \sum_{k(x)=k} Z(x)$, легко устанавливаем все требуемые свойства, кроме непрерывности F и того, что каждое $F^{-1}(\sum_{k \geqq m} Y_k) + S$ является окрестностью S; последнее утверждение, однако вытекает из того, что, согласно 3.5 (6), $V_{m+1,\mu} \sum_{k<m} \sum_{\lambda} G_{k\lambda} = \emptyset$ и потому $S + F^{-1}(\sum_{k \geqq m} Y_k) \supset \sum_{\mu} V_{m+1,\mu}$, а $\sum_{\mu} V_{m+1,\mu}$ является окрестностью S в силу 3.5 (4).

Непрерывность F в точках из $P - S$ вытекает из I 1.6; итак, остается доказать, что F непрерывно в любой точке $x \in S$. Пусть $\eta > 0$; выберем $V_{m\mu}$ так, чтобы $x \in V_{m\mu}$, $2\varepsilon_{m-1} + \delta_{m-1} < \eta$, и докажем следующее: если $y \in V_{m\mu} - S$, то $\varrho(F(y), F(x)) < \eta$. Этим доказательство закончится. Итак,

[4]) Симплексом мы здесь называем замкнутую выпуклую оболочку конечного непустого множества. Если ни одна из точек этого конечного множества не лежит в наименьшем линейном множестве, содержащем остальные точки, то симплекс называется простым. Конечно, в теореме можно говорить о простых симплексах вместо о симплексах, ничуть не меняя ее смысла.

пусть $y \in V_{m\mu} - S$. Пусть (h, ν) пробегает все пары (k, λ) такие, что $x \in G_{k\lambda}$; тогда $F(y)$, очевидно, лежит в выпуклой оболочке точек $b_{h\nu}$. Имеем $V_{m\mu} \cdot G_{h\nu} \neq \emptyset$, следовательно, согласно 3.5 (2), (5), (6), будет $f(SV_{m\mu})\, f(SV_{h\nu}) \neq \emptyset$, $h \geqq m - 1$. Из этого сразу вытекает, что расстояние каждого $b_{h\nu}$ от $f(SV_{m\mu})$ меньше $\varepsilon_{m-1} + \delta_{m-1}$ и потому расстояние $b_{h\nu}$ от $F(x) = f(x) \in f(SV_{m\mu})$ меньше $2\varepsilon_{m-1} + \delta_{m-1}$. Следовательно, $\varrho(F(x), F(y)) < 2\varepsilon_{m-1} + \delta_{m-1} < \eta$.

3.7. Из леммы 3.6 вытекают следующие результаты:

A. **Теорема.** *Пусть дано выпуклое подмножество K сепарабельного нормированного линейного пространства. Пусть пространство P нормально, $S \subset P$ есть замкнутое G_δ-множество. Тогда любое $f \in K^S$ можно продолжить до $F \in K^P$ таким образом, что*

(1) $\dim F(P - S) \leqq \min\,[\dim S + 1,\ \dim f(S) + 1,\ \dim P]$;

(2) $\dim F(P) \leqq \max\,\{s, \min\,[\dim S + 1,\ \dim f(S) + 1,\ \dim P]\}$,

где s — наименьшая размерность множеств $M \subset K$ типа F_σ (в K) таких, что $M \supset f(S)$; в частности, если $f(S)$ является F_σ-множеством (например, если S является суммой счетного числа компактных множеств), то $\dim F(P) \leqq \max\,\{\dim f(S),\ \min\,[\dim S + 1,\ \dim f(S) + 1,\ \dim P]\}$;

(3) *если f вполне ограничено, то также F вполне ограничено и* $\dim \overline{F(P)} \leqq \max\,\{\dim \overline{f(S)},\ \min f(S),\ \min\,[\dim S + 1,\ \dim f(S) + 1,\ \dim P]\}$.

B. **Теорема.** *Пусть дано выпуклое подмножество K сепарабельного нормированного пространства R; пусть $a \in R$ не лежит в линейной оболочке множества $\overline{K}$ и пусть K_1 означает множество всех $\lambda a + x$, $\lambda \geqq 0$, $x \in K$. Пусть пространство P нормально, $S \subset P$ есть замкнутое G_δ-множество. Тогда любое $f \in K^S$ можно продолжить до $F \in K_1^P$ таким образом, что $F(P - S) \subset K_1 - K$ и*

(1) $\dim F(P - S) \leqq \min\,[\dim S + 1,\ \dim f(S) + 1,\ \dim P]$;

(2) $\dim F(P) \leqq \max\,\{\dim f(S),\ \min\,[\dim S + 1,\ \dim f(S) + 1,\ \dim P]\}$;

(3) *если f вполне ограничено, то также F вполне ограничено и*

$\dim \overline{F(P)} \leqq \max\,\{\dim \overline{f(S)},\ \min\,[\dim S + 1,\ \dim f(S) + 1,\ \dim P]\}$.

C. **Теорема.** *Пусть дано топологически полное (т. е. гомеоморфное с полным метрическим пространством) выпуклое подмножество K сепарабельного нормированного пространства. Пусть пространство P нормально, $S \subset P$ замкнуто. Тогда любое $f \in K^S$ можно продолжить до $F \in K^P$ таким образом, что*

(1) $\dim F(P) \leqq \max\,\{s, \min\,[\dim S + 1,\ \dim f(S) + 1,\ \dim P]\}$,

где s — наименьшая размерность множеств $M \subset K$ типа одновременно F_σ и G_δ таких, что $M \supset f(S)$;

(2) *если f вполне ограничено, то также F вполне ограничено и*

$\dim \overline{F(P)} \leqq \max\,\{\dim \overline{f(S)},\ \min\,[\dim S + 1,\ \dim f(S) + 1,\ \dim P]\}$.

D. Теорема. *Пусть дано топологически полное выпуклое подмножество K сепарабельного нормированного линейного пространства R; пусть $a \in R$ не лежит в линейной оболочке множества $\overline{K}$ и пусть K_1 означает множество всех $\lambda a + x$, $\lambda \geqq 0$, $x \in K$. Пусть пространство P нормально, $S \subset P$ замкнуто. Тогда любое $f \in K^S$ можно продолжить до $F \in K_1^P$ таким образом, что при любом наперед заданном G_δ-множестве $N \subset K$, $N \supset f(S)$, имеем $K\,F(P) \subset N$ и*

(1) $\dim F(P) \leqq \max \{\dim f(S),\ \min [\dim S + 1,\ \dim f(S) + 1,\ \dim P]$;

(2) *если f вполне ограничено, то также F вполне ограничено и*

$$\dim \overline{F(P)} \leqq \max \{\dim \overline{f(S)},\ \min [\dim S + 1,\ \dim f(S) + 1,\ \dim P]\}.$$

Доказательство теорем A, B, C, D. I. Теорему A получаем непосредственным применением леммы 3.6 (следует иметь в виду, что для вполне ограниченного f, очевидно, $\overline{F(P)} \subset \overline{f(S)} + \Sigma Y_k$). Также теорема B вытекает немедленно из 3.6 (берем, конечно, $B_k \subset K_1 - K$, так что $f(S)$ замкнуто в $F(P)$).

II. Переходим к доказательству теоремы D. Для краткости положим $r = \min [\dim S + 1,\ \dim f(S) + 1,\ \dim P]$, $r' = \min [\dim f(S) + 1, \dim P]$. Докажем сначала утверждение, которое получается из D, если заменить r через r' (этим мы одновременно докажем D для случая $r' = r$). Пусть $f(S) \subset N \subset K$, N является G_δ-множеством. По хорошо известным теоремам, существует G_δ-множество N_1 такое, что $f(S) \subset N_1 \subset N\,\overline{f(S)}$, $\dim N_1 = \dim f(S)$. Так как N_1 топологически полно, то по доказываемой в дальнейшем лемме 3.9 существует замкнутое G_δ-множество T, $f(S) \subset T \subset P$ и $f_1 \in N_1^T$ такое, что $f_1(x) = f(x)$ для $x \in S$; очевидно, f_1 вполне ограничено, если вполне ограничено f.

Согласно B, существует продолжение $F \in K_1^P$ отображения f_1 такое, что $F(P - T) \subset K_1 - K$ и

$$\dim F(P) \leqq \max \{\dim f_1(T), \min [\dim T + 1,\ \dim f_1(T) + 1,\ \dim P]\},$$

а если f вполне ограничено, то

$$\dim \overline{F(P)} \leqq \max \{\dim \overline{f_1(T)},\ \min [\dim T + 1,\ \dim f_1(T) + 1,\ \dim P]\}.$$

Имеем $f(S) \subset f_1(T) \subset N_1$, $\overline{f_1(T)} = \overline{f(S)}$, и потому $\dim f_1(T) = \dim f(S)$, $\dim \overline{f_1(T)} = \dim \overline{f(S)}$. Поэтому

$$\dim F(P) \leqq \max \{\dim f(S),\ \min [\dim f(S) + 1,\ \dim P]\},$$
$$\dim \overline{F(P)} \leqq \max \{\dim \overline{f(S)},\ \min [\dim f(S) + 1,\ \dim P]\}.$$

Очевидно, $K\,F(P) = f_1(T) \subset N_1 \subset N$. Итак, наше видоизмененное утверждение доказано.

III. Теперь достаточно доказать теорему D для случая $r < r'$, т. е. $\dim S + 1 < \min [\dim f(S) + 1, \dim P]$. Пусть дано G_δ-множество N, $f(S) \subset$

$\subset N \subset K$; найдем G_δ-множество N_1 такое, что $f(S) \subset N_1 \subset N\ \overline{f(S)}$, $\dim N_1 = \dim f(S)$. Как вытекает из доказанного в II, существует продолжение $F_1 \in K_1^P$ отображения f такое, что, $K\ F_1(P) \subset N_1$ и

$$\dim F_1(P) \leqq \max(\dim f(S), r'),$$

а в случае вполне ограниченного f также

$$\dim \overline{F_1(P)} \leqq \max(\dim \overline{f(S)}, r').$$

Пусть R^* — любое пространство Банаха бесконечной размерности. Из 1.9 и 1.16 вытекает: для почти каждого $h \in C'(P, R^*)$ имеет место $\dim \overline{h(S)} = \dim h(S) = \dim S$ и существует $g \in K_1^{h(P)}$ такое, что $g(h(x)) = F_1(x)$ для каждого $x \in P$. Положим $P_1 = h(P)$, $S_1 = P_1\ \overline{h(S)}$, $\psi = g_1$. Тогда $F(S) \subset \psi(S_1)$, $\overline{\psi(S_1)} \subset \overline{\psi(h(S))} = \overline{f(S)} \subset K$, $\psi(S_1) \subset g(P_1) = F_1(P)$, $\psi(S_1) \subset K\ F_1(P) \subset N_1$, $h(S) \subset S_1 \subset \overline{h(S)}$, так что $\dim \psi_1(S) = \dim f(S)$, $\dim S_1 = \dim S$.

Согласно B, можно продолжить Ψ до $\psi \in K_1^{P_1}$ так, что $\Psi(P_1 - S_1) \subset K_1 - K$ и

$$\dim \Psi(P_1) \leqq \max\{\dim \psi(S_1), \min[\dim S_1 + 1, \dim \psi(S_1) + 1, \dim P_1]\},$$

а если f вполне ограничено, то также

$$\dim \overline{\Psi(P_1)} \leqq \max\{\dim \overline{\psi(S_1)}, \min[\dim S_1 + 1, \mathrm{din}\ \psi(S_1) + 1, \dim P_1]\}.$$

Теперь для $x \in P$ положим $F(x) = \Psi(h(x))$. Тогда $F \in K_1^P$, $F_S = f$, $F(P) = \Psi(P_1)$ $K\ F(P) = K\ \Psi(P_1) = K\ \Psi(S_1) \subset N_1 \subset N$. Далее, ввиду $\dim \psi(S_1) = \dim f(S)$, $\dim S_1 = \dim S$, $\overline{\psi(S_1)} = \overline{f(S)}$, получаем

$$\dim F(P) \leqq \max\{\dim f(S), \min[\dim S + 1, \dim f(S) + 1, \dim P_1]\},$$

$$\dim \overline{F(P)} \leqq \max\{\dim \overline{f(S)}, \min[\dim S + 1. \dim f(S) + 1, \dim P_1]\},$$

из чего, ввиду $\dim S + 1 \leqq \min[\dim f(S) + 1, \dim P]$, уже вытекают неравенства, указанные в теореме D.

IV. Исходя из только что доказанной теоремы D, докажем теперь теорему C. Пусть $K \subset R$, R — нормированное линейное пространство; можно, разумеется, предполагать существование $a \in R$, упомянутого в теореме D. Существуют множества N, N^* такие, что $f(S) \subset N \subset N^* \subset \overline{f(S)}$, N есть множество типа G_δ, N^* — одновременно типа F_σ и G_σ, $\dim N = \dim f(S)$, $\dim N^* = s$, где s имеет значение, указанное в теореме C. Согласно D, существует $F' \in K_1^P$ такое, что $F'_S = f$, $K\ F'(P) \subset N$ и

$$\dim F'(P) \leqq \max\{\dim f(S), \min[\dim S + 1, \dim f(S) + 1, \dim P]\},$$

а в случае вполне ограниченного f также F' вполне ограничено и

$$\dim \overline{F'(P)} \leqq \max\{\dim \overline{f(S)}, \min[\dim S + 1, \dim f(S) + 1, \dim P]\}.$$

Положим $P_1 = F'(P)$, $S_1 = KP_1$. Согласно A, существует $H \in K^{P_1}$ такое, что $H(x) = x$ для $x \in S_1$,

$$\dim H(P_1) \leqq \max \{s', \min [\dim S_1 + 1, \dim P_1]\},$$

где s' — наименьшая размерность множеств M типа F_σ (в K) таких, что $M \supset S_1$,

и что, кроме того, при вполне ограниченном f также H вполне ограничено и

$$\dim \overline{H(P_1)} \leqq \max \{\dim \overline{S_1}, \min [\dim S_1 + 1, \dim P_1]\}.$$

Теперь для $x \in P$ положим $F(x) = H(F'(x))$. Тогда $F \in K^P$, $F_S = f$, $F(P) = H(P_1)$. Так как N^* является F_σ-множеством, $S_1 = KP_1 \subset N \subset N^*$, то $s' \leqq \dim N^* = s$. Из $f(S) \subset S_1 \subset N \subset \overline{f(S)}$, $\dim f(S) = \dim N$ вытекает $\dim S_1 = \dim f(S)$, $\dim \overline{S_1} = \dim \overline{f(S)}$. Итак, имеем

$$\dim F(P) \leqq \max \{s, \min [\dim f(S) + 1, \dim F'(P)]\},$$
$$\dim \overline{F(P)} \leqq \max \{\dim \overline{f(S)}, \min [\dim f(S) + 1, \dim F'(P)]\}.$$

Теперь легко установить, рассмотрев возможные случаи, что

$$\max \{s, \min [\dim f(S) + 1, \dim F'(P)]\} \leqq$$
$$\leqq \max \{s, \min [\dim S + 1, \dim f(S) + 1, \dim P]\},$$

$$\max \{\dim \overline{f(S)}, \min [\dim f(S) + 1, \dim F'(P)]\} \leqq$$
$$\leqq \max\{\dim \overline{f(S)}, \min[\dim S + 1, \dim f(S) + 1, \dim P]\}.$$

Из этого уже вытекают неравенства, о которых говорится в теореме C.

3.8. Введем теперь понятие экстензора, имея в виду более сжатую формулировку некоторых дальнейших результатов (ср. работы О. Ханнера [3], [4] и Э. Майкла [6]).

Пусть пространство B нормально, $A \subset B$. Назовем B экстензором (полным экстензором) множества A, если для любого нормального P, замкнутого G_δ-множества $S \subset P$ (соответственно, замкнутого $S \subset P$) и отображения $f \in A^S$ существует отображение $F \in B^P$, совпадающее с f на S.

Если B является экстензором (полным экстензором) каждого своего подмножества, то мы называем его кратко экстензором (полным экстензором); заметим, что для пространств, которые мы назвали полными экстензорами, О. Ханнер [3] употребляег термин ,,solid space“. Если B является экстензором (полным экстензором) каждого своего подмножества размерности, не превышающей n, то мы называем B n-экстензором (полным n-экстензором).

Между понятием экстензора и обычным понятием ретракта имеется тесная связь, которой мы, однако, не будем заниматься. Заметим только, что ретракт экстензора (полного экстензора) является опять-таки экстензором (полным экстензором).

3.9. *Пусть сепарабельное метрическое пространство B топологически полно. Если P — нормальное пространство, $S \subset P$ замкнуто, $f \in B^S$, то существует замкнутое G_δ-множество $T \subset P$ и отображение $f^* \in B^T$ такое, что $S \subset T$, $f_S^* = f$.*

Доказательство. Так как B сепарабельное, то можно предполагать, что $B \subset K$, где через K обозначено топологическое произведение счетного числа отрезков. Как известно, K есть полный экстензор; B есть G_δ-множество в K.

Пусть теперь P нормально, $S \subset P$ замкнуто. $f \in B^S$. Тогда существует $f' \in K^P$ так, что $f'_S = f$. Положим $H = (f')^{-1}(B)$. Тогда H является G_δ-множеством в P, $S \subset H$. Пусть $H = \prod_{k=1}^{\infty} H_k$, где H_k — открытые множества. Очевидно, что существуют открытые U_k так, что $S \subset U_k \subset \prod_{i=1}^{\infty} H_i$ и $U_k \supset \supset \overline{U_{k+1}}$. Положим $T = \prod_{k=1}^{\infty} U_k$; тогда $T \supset S$, T есть замкнутое G_δ-множество. Теперь достаточно положить $f^* = f'_T$.

3.10. *Пусть метрическое пространство B имеет следующее свойство: если P — нормальное пространство, $S \subset P$ замкнуто, $f \in B^S$, то существует G_δ-множество $T \subset P$ и отображение $f' \in B^T$ так, что $S \subset T$, $f'_S = f$. Тогда B топологически полно.*

Замечание. Этот (а также и предыдущий) результат, содержится уже в работе О. Ханнера [4].

Доказательство. Пусть $B \subset M$, M — метрическое пространство, $\bar{B} = M$. Пусть M' будет множество M с видоизмененной топологией: открытыми будем считать множества $G + D$, где G открыто в M, $D \subset M - B$. Легко установить, что M' нормально. Очевидно, B замкнуто в M'. Пусть $H \subset M'$ есть G_δ-множество, $B \subset H$, $f \in B^H$, f_B — тождественное отображение. Тогда $H = \prod_{n=1}^{\infty} H_n$, H_n открыты в M', $H_n = G_n + D_n$, G_n открыты в B, $D_n \subset M - B$. Положим $U = \Pi G_n$; тогда $B \subset U$, где U есть G_δ-множество в M. Рассмотрим $f' = f_U$ как отображение $U \subset M$ в B. Легко убедиться, что точки, в которых оно непрерывно, образуют G_δ-множество $V \supset B$. Так как $\bar{B} \supset V$, а f'_B — тождественное отображение, то получаем $V = B$.

3.11. *Сепарабельное метризуемое пространство является полным экстензором тогда и только тогда, если оно топологически полно и является экстензором.*

Доказательство. Непосредственно следует из 3.9 и 3.10.

3.12. *Если сепарабельное метризуемое пространство B является экстензором своей топологически полной части A, то оно является также ее полным экстензором.*

Доказательство. Пусть P — нормальное пространство, $S \subset P$, $\overline{S} = S$, $f \in A^S$. Согласно 3.9, существует замкнутое G_δ-множество $T \supset S$ и $f' \in A^T$ так, что $f'_S = f$. Отображение f' можно теперь продолжить на P.

3.13. Назовем сепарабельное метрическое пространство абсолютным n-ретрактом, если оно является ретрактом каждого сепарабельного метрического пространства, в котором оно содержится как замкнутая часть, причем размерность дополнения не превышает n.

3.14. *Пусть сепарабельное метрическое пространство B является абсолютным n-ретрактом. Пусть P — нормальное пространство, $S \subset P$ — замкнутое G_δ-множество,* $\dim(P - S) \leqq n$, $f \in B^S$. *Тогда существует* $\Phi \in B^P$, $\Phi_S = f$.

Доказательство. Достаточно, конечно, доказать это утверждение (впрочем, хорошо известное), предположив, что $B \subset L \subset R$, где R — нормированное линейное пространство, L — замкнутое линейное множество с декрементом 1. Применим теперь 3.6, причем можно, очевидно, предполагать, что все B_k лежат по одну сторону множества L. Тогда B замкнуто в $C = B + F(P)$, $C - B = F(P - S)$, $\dim(C - B) \leqq n$, следовательно, существует $\varphi \in B^C$ такое, что $\varphi(x) = x$ для $x \in B$. Положим $\Phi = \varphi F$.

3.15. Теорема. *Если сепарабельное метрическое пространство B является абсолютным $(n + 1)$-ретрактом, то оно является также n-экстензором, и сверх того имеет место следующее:*

если P — нормальное пространство, $S \subset P$ — замкнутое G_δ-множество, $f \in B^S$, и если или $\dim S \leqq m$, *или* $\dim f(S) \leqq n$ *или* $\dim(P - S) \leqq n + 1$, *то можно продолжить f до отображения $\Phi \in B^P$.*

Доказательство. Пусть S' гомеоморфно $f(S)$, $S' \subset L \subset R$, где R — нормированное линейное пространство, L — замкнутый линеал, декремент которого равен 1. Пусть φ означает гомеоморфное отображение S' на $f(S)$. Тогда, как вытекает из 3.6, существует (предполагаем, что выбраны подходящие B_k) отображение $F \in R^P$ такое, что $F_S = \varphi^{-1}f$, $F(S) = S'$ замкнуто в $F(P)$, $\dim(F(P) - F(S)) \leqq n + 1$. Согласно 3.14, существует $g \in B^{F(P)}$ так, что $g_{S'} = \varphi$. Положим $\Phi = gF$. Тогда $\Phi \in B^P$, $\Phi_S = f$.

3.16. Теорема. *Если топологически полное сепарабельное метрическое пространство B является абсолютным $(n + 1)$-ретрактом, то оно является полным n-экстензором и сверх того имеет место следующее:*

если P—нормальное пространство, $S \subset P$ замкнуто, $f \in B^S$ и если или $\dim S^* \leqq n$ *для некоторого замкнутого G_δ-множества $S^* \supset S$, или* $\dim f(S) \leqq n$, *или* $\dim Q \leqq n + 1$ *для каждого замкнутово в P множества $Q \subset P - S$, то существует $F \in B^P$, $F_S = f$.*

Доказательство. Согласно 3.9, можно продолжить f до отображения $f^* \in B^T$, где $S \subset T \subset P$, T является замкнутым G_δ-множеством. Если существует замкнутое G_δ-множество $S^* \subset P$, $S^* \supset S$, такое, что $\dim S^* \leqq n$, положим $S_1 = TS^*$. Если $\dim f(S) \leqq n$, то существует G_δ-множество $S' \subset B$, $S' \supset f(S)$, такое, что $\dim S' \leqq n$; тогда $(f^*)^{-1}(S')$ является G_δ-множеством в T (и, следовательно, в P). Так как $(f^*)^{-1}(S') \supset S$, то, очевидно, существует замкнутое G_δ-множество S_1 такое, что $(f^*)^{-1}(S') \supset S_1 \supset S$. Имеем $f^*(S_1) \subset S'$ и потому $\dim f^*(S_1) \leqq n$. Наконец, если $\dim Q \leqq n + 1$ для любого замкнутого $Q \subset P - S$, положим $S_1 = S^*$ и имеем $\dim (P - S_1) \leqq$ $\leqq n + 1$. Очевидно, в каждом из рассматриваемых трех случаев, применяя 3.15 к S_1 и $f^*_{S_1}$, получаем требуемое продолжение.

3.17. Введем теперь одно вспомогательное определение. Пусть R — нормированное линейное пространство; пусть $A \subset R$, $K \subset R$, $B_k \subset R$, $0 \leqq \eta_k \leqq \infty$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Будем говорить, что система A, K, $\{B_k\}$, $\{\eta_k\}$ обладает свойством K_r, если выполняются следующие условия:

(1) B_k не пусты, $\eta_0 = \infty$, $\eta_k \geqq \eta_{k+1} > 0$; для $k = 0, 1, 2, \ldots$ или $\eta_k >$ $> 2\varrho(A, B_k)$ или $\eta_k = \varrho(A, B_k) = \infty$;

(2) $\lim \varrho(A, B_k) = 0$;

(3) если конечное множество $M \subset B_k + B_{k+1}$ содержит не более чем $r + 1$ точек и $\operatorname{diam} M < \eta_k$, то его выпуклая оболочка является частью K.

Если при данных $A \subset R$, $K \subset R$ существуют $\{B_k\}$, $\{\eta_k\}$ такие, что система A, K, $\{B_k\}$, $\{\eta_k\}$ имеет свойство K_r, то мы будем говорить, что K имеет свойство K_r относительно A.

Очевидно, если K имеет свойство K_r относительно A и если $K_1 \supset K$, $A_1 \subset A$, то K_1 имеет свойство K_r относительно A_1.

3.18. Введение свойства K_r до некоторой степени оправдано следующими результатами:

A. *Пусть R — сепарабельное нормированное пространство. Пусть $A \subset R$, $K \subset R$ и пусть K имеет относительно A свойство K_n. Тогда $A + K$ является экстензором каждой не более чем n-мерной части множества A; точнее говоря, справедливо следующее:*

если P — нормальное пространство, $S \subset P$ — замкнутое G_δ-множество, $f \in A^S$, $r = \min [\dim S + 1, \dim f(S) + 1, \dim P] \leqq n$, то существует $F \in (A + K)^P$ так, что $F_S = f$ и $F(P - S) \subset K$.

Доказательство. Выберем $\{B_k\}$ и $\{\eta_k\}$, о которых говорится в 3.17. Положим $\delta_k = \sup \varrho(A, B_k)$; тогда для $k = 0, 1, 2, \ldots$ будет $\eta_k > 2\delta_k$ или $\eta_k = \delta_k = \infty$. Возьмем $\varepsilon_k > 0$ так, чтобы было $\varepsilon_k > \varepsilon_{k+1}$, $\lim \varepsilon_k = 0$, $\eta_k \geqq$ $\geqq 2(\delta_k + \varepsilon_k)$. Теперь наше утверждение уже следует из 3.6.

B. *Пусть R — сепарабельное нормированное пространство. Пусть $K \subset$ $\subset A \subset R$ и пусть K имеет относительно A свойство K_n. Тогда A является абсолютным n-ретрактом.*

Доказательство: если P — сепарабельное метрическое пространство, $P \supset A$, A замкнуто в P, $\dim(P - A) \leq n$, то применяем утверждение А, взяв за f тождественное отображение A на A.

3.19. Из 3.18 вытекают как частные случаи следующие результаты (мы говорим, что A обладает свойством K_r, если оно обладает им относительно самого себя; везде предполагается, что A является частью сепарабельного нормированного линейного пространства).

А. *Если A имеет свойство K_n, то оно является n-экстензором.*

В. *Если A имеет свойство K_∞, то оно является экстензором.*

С. *Если существует выпуклое C такое, что $C \subset A \subset \overline{C}$, то A является экстензором.*

3.20. *Пусть R — сепарабельное нормированное линейное пространство бесконечной размерности. Пусть $A \subset R$ вполне ограничено. Тогда существует линейное подмножество $L \subset R$ так, что $\overline{L} = R$, $L\overline{A} = \emptyset$.*

Доказательство достаточно провести при предположении $0 \text{ non} \in \overline{A}$. Пусть дана открытая база $\{G_i\}$ пространства R. Пусть теперь уже построены a_i, $i = 1, \ldots, p$, так, что $a_i \in G_i$ и $\overline{A}L_p = \emptyset$, где L_p — множество всех элементов вида $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i$. Обозначим через S_p множество всех $\mu y - x$, где $x \in L_p$, $y \in \overline{A}$; легко видеть, что пересечение S_p с любым ограниченным множеством вполне ограничено и потому, как вытекает из известной теоремы, S_p нигде не плотно в R. Следовательно, $G_{p+1} - S_p \neq \emptyset$; возьмем $a_{p+1} \in G_{p+1} - S_p$. Тогда, обозначая через L_{p+1} множество всех $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i a_i$, имеем $\overline{A}L_{p+1} = \emptyset$. Строим теперь по индукции a_k, L_k, $k = 1, 2, \ldots$, и полагаем $L = \sum_{i=1}^{\infty} L_i$.

3.21. Из 3.19С и 3.20 вытекает следствие:

если R — нормированное линейное пространство бесконечной размерности, $A \subset R$ вполне ограничено, то $R - A$ есть экстензор.

3.22. *Если сепарабельное метрическое пространство A есть экстензор, то оно содержится в качестве плотного подмножества в сепарабельном метрическом пространстве той же размерности, являющемся полным экстензором.*

Доказательство. Заменив, если нужно, A гомеоморфным пространством, мы можем предполагать, что A вполне ограничено и содержится в пространстве Банаха R бесконечной размерности. Тогда A замкнуто в множестве $R - (\overline{A} - A)$, следовательно, является его ретрактом. Пусть f — непрерывное отображение этого множества на A такое, что $f(x) = x$

для $x \in A$. Положим $F(x) = f(x)$ для $x \in R - (\bar{A} - A)$, $F(x) = x$ для $z \in \bar{A} - A$. Пусть B означает множество точек, где отображение F непрерывно. Очевидно, $R - (\bar{A} - A) \subset B$, B есть G_δ-множество. Пусть $C = BA$. По известным теоремам существует D, $A \subset D \subset C$, такое, что D является G_δ-множеством в C и $\dim D = \dim A$. Очевидно, D топологически полно и является ретрактом множества $R - (\bar{A} - D)$, которое, согласно 3.21, является экстензором. Следовательно D есть также экстензор, а согласно 3.11, даже полный экстензор.

3.23. Теорема. *Пусть R — сепарабельное нормированное линейное пространство бесконечной размерности. Пусть $A \subset R$ вполне ограничено, $\dim A = n$. Тогда существует абсолютный $(n+1)$-ретракт $B \subset R$ такой, что:*

(1) *$A \subset B$, A замкнуто в B;*

(2) *$\dim B \leq n + 1$;*

(3) *$B - A$ является суммой счетного числа симплексов;*

(4) *если P нормально, $S \subset P$ — замкнутое G_δ-множество, $f \in B^S$, $r = \min [\dim S + 1, \dim f(S) + 1, \dim (P - S)] \leq n + 1$, то можно продолжить f до $F \in B^P$ так, что $F(P - S) \subset B - A$,*

$$\dim F(P - S) \leq r\,, \quad \dim F(P) \leq \max\,(r, \dim f(S))\,.$$

Замечание 1. Настоящая теорема далеко еще не является окончательной. Окончательным мог бы быть примерно следующий результат (если, конечно, он вообще верен): „...существует абсолютный ретракт $B \subset R$ такой, что $A \subset B$, $\dim B \leq n + 1$, $B - A$ является суммой симплексов, образующих евклидов комплекс, регулярный[5]) относительно A, и справедливо (4); при этом, если A компактно, то также B компактно."

Замечание 2. Если A топологически полно, то можно утверждать, что также B топологически полно; кроме (4) тогда имеет место, с видоизмененными неравенствами, аналогичное утверждение без предположения, что S является G_δ-множеством. Эту видоизмененную теорему мы здесь не будем доказывать.

Доказательство. Найдем, согласно 3.20, линейное множество L так, чтобы $\bar{L} = R$, $\bar{A}L = \emptyset$. Очевидно, существует вполне ограниченное $C \subset L$, $A \subset \bar{C}$. Пусть D означает выпуклую оболочку множества C; очевидно, $D \subset L$, D вполне ограничено. Выберем теперь конечные $B_k \subset D$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) так, чтобы $\varrho(D, B_k) \to 0$. Возьмем еще δ_k так, чтобы $\delta_k \geq \varrho(D, B_k)$, $\delta_k \geq \delta_{k+1}$, $\lim \delta_k = 0$. Положим $\eta_0 = \infty$ и возьмем конечные положительные η_k так, чтобы $\eta_k \geq \eta_{k+1}$, $\eta_k > 2\delta_k$. Пусть Y означает соединение выпуклых оболочек всех множеств M, состоящих из не более чем $n + 2$ точек, имею-

[5]) В том смысле, в каком этот термин употребляет, например, *С. Лефшец* (*S. Lefschetz*, Algebraic Topology).

щих диаметр $< \eta_k$ и содержащихся в одном из множеств $B_k + B_{k+1}$. Положим $B = A + Y$. Ввиду $B \subset D$, очевидно, что Y имеет относительно B свойство K_{n+1}. Теперь уже легко проверить на основании 3.6 и 3.18, что B имеет свойства, перечисленные в теореме.

3.24. *Пусть R — сепарабельное нормированное линейное пространство бесконечной размерности. Пусть $A \subset R$ вполне ограничено, $\dim A = n$. Тогда существует $B \subset R$ так, что:*

(1) *$A \subset B$, A замкнуто в B;*

(2) $\dim B \leqq n + 1$;

(3) *$B - A$ является суммой симплексов, образующих евклидов комплекс, регулярный относительно A;*

(4) *если P нормально, $S \subset P$ — замкнутое G_δ-множество и $f \in A^S$, то f можно продолжить до $F \in B^P$ так, что $F(P - S) \subset B - A$, $\dim F \,.\, (P - S) \leqq r$, $\dim F(P) \leqq \max(r, \dim f(S))$, где $r = \min[\dim S + 1, \dim f(S) + 1, \dim(P - S))$;*

(5) *если A компактно, то также и B компактно.*

Замечание. В случае топологически полного A можно видоизменить эту теорему способом, аналогичным указанному в замечании к 3.23.

Доказательство. Согласно 3.20, существует линейное множество L такое, что $\bar{L} = R$, $\bar{A}L$. Найдем конечные множества $B_k \subset L$ так, чтобы $\varrho(A, B_k) \to 0$, $\varrho(B_k, A) \to 0$ и чтобы множество $\sum_{k=0}^{\infty} B_k$ было линейно независимым. Найдем δ_k, η_k так, чтобы $\delta_k \geqq \varrho(A, B_k)$, $\delta_k \geqq \delta_{k+1}$, $\delta_k \to 0$, $\eta_0 = \infty$, $\eta_k > 2\delta_k$, $\eta_k \geqq \eta_{k+1}$, $\eta_k \to 0$. Обозначим через Y соединение выпуклых оболочек всех множеств M, состоящих из не более чем $n + 2$ точек, имеющих диаметр $< \eta_k$ и содержащихся в одном из множеств $B_k + B_{k+1}$. Легко установить, что Y имеет свойство K_{n+1} относительно A, и на основании этого, с помощью 3.6 и 3.18, проверить правильность теоремы.

3.25. Следует отметить, что приведенные в этом параграфе теоремы о продолжении отображений, ретрактах, экстензорах и т. п. остаются (с небольшими изменениями) верными, если заменить указанные понятия соответствующими „локальными" понятиями, т. е. говорить, например, о продолжении $f \in B^S$ до $F \in B^U$, где U — окрестность S, о ретрактах окрестности и (вместо экстензоров) о пространствах B таких, что (при любом нормальном P и замкнутом G_δ-множестве $S \subset P$) каждое $f \in B^S$ продолжается до $F \in B^U$.

3.26. Методы этого параграфа, в особенности применение свойства K_r, недостаточно гибки для решения некоторых вопросов; так с их помощью едва ли возможно (без дальнейших сложных рассуждений) доказать даже известную теорему о возможности погрузить компактное метрическое пространство в компактный абсолютный ретракт таким образом, что добавленное множество является полиэдром. Однако, эту теорему, вероятно, все же можно доказать аналогичным образом, если брать не все, как это делается в 3.6, 3.23, 3.24, а только некоторые малые симплексы с вершинами в $B_k + B_{k+1}$ и применить некоторые дальнейшие леммы, аналогичные резулатам 3.5, 3.6; мы имеем ввиду вернуться к этому в другой работе. Открытым остается также вопрос, будут ли подобные методы достаточны, чтобы решить приблему (см. K. BORSUK, Fundam. Math., 1936, *27*, 235—243) погружения сепарабельного метрического пространства в абсолютный ретракт с повышением размерности не более чем на 1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *K. Borsuk*: Sur les transformations continues n'augmentant pas la dimension. Fundam. Math., 1937, *28*, 90—99.

[2] *S. Eilenberg, E. Otto*: Quelques propriétés caractéristiques de la dimension. Fundam. Math., 1938, *31*, 149—153.

[3] *O. Hanner*: Solid spaces and absolute retracts. Ark. Mat., 1951, *1*, 375—382.

[4] *O. Hanner*: Retraction and extension of mappings of metric and non-metric spaces. Ark. Mat., 1952, *2*, 315—360.

[5] *S. Kaplan*: Homology properties of arbitrary subsets of Euclidean spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1947, *62*, 248—271.

[6] *E. Michael;* Some extension theorems for continuous functions. Pacif. J. Math., 1953, *3*, 789—806.

[7] *K. Morita;* Normal families and dimension theory in metric spaces. Math. Ann., 1954, *128*, 350—362.

Summary

ON THE DIMENSION OF NON-SEPARABLE SPACES, II

MIROSLAV KATĚTOV, Praha.

(Received September 1, 1955.)*)

The present note is a continuation of the previous article ,,О размерности несепарабельных пространств, I "(On the dimension of non-separable spaces, I), Czechoslovak Math. J. 1952, *2* (*77*), 333—368. The first section contains theorems concerning the invariance of the dimension under ,,almost every" mapping and related questions. In the second section, results are given concern-

*) Some alterations and additions received August 20, 1956.

ing the existence of arbitrarily fine coverings $\{G_\lambda\}$ of a metric space such that the dimension of the intersection of the boundaries of m sets G_λ with any of given closed sets A_i, $\dim A_i < \infty$, does not exceed $\dim A_i - m$; some related questions are considered. Many of the theorems contained in this section have been proved (in a different way) by K. MORITA [7]. The last section concerns, mainly, the existence of an extension of a given continuous mapping such that the set of points added to the original image has a small dimension; e. g. it is proved that, P being normal, $S \subset P$ a closed G_δ-set, K a convex subset of a Banach space, every $f \in K^S$ has an extension $F \in K^P$ with

$$\dim F(P - S) \leqq \min [\dim S + 1, \dim f(S) + 1, \dim P] .$$