Ján Jakubík

Об аксиомах теории мультиструктур

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 3, 426–430

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100208

Чехословацкий математический журнал, т. 6 (81) 1956, Прага.

ОБ АКСИОМАХ ТЕОРИИ МУЛЬТИСТРУКТУР

ЯН ЯКУБИК (Ján Jakubík) Кошице.

(Поступило в редакцию 21/XI 1955 г.)

В заметке дано решение двух проблем, предложенных *М. Бенадо* в недавно опубликованной работе [2].

Пусть $\mathfrak{M}$ — непустое множество. Предположим, что каждой упорядоченной паре (a, b), $a, b \in \mathfrak{M}$ поставлены в соответствие два подмножества множества $\mathfrak{M}$ (они могут быть и пустыми), которые мы обозначим следующим образом:

$$a \vee b\,, \quad a \wedge b\,. \tag{1}$$

Если $A, B \subset \mathfrak{M}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, то положим

$$A \vee B = \bigcup_{a \in A,\, b \in B} (a \vee b)\,, \quad A \wedge B = \bigcup_{a \in A,\, b \in B} (a \wedge b)\,;$$

если какое-либо из множеств A, B пусто, то положим $A \vee B = A \wedge B = \emptyset$. Для $a \in \mathfrak{M}$ обозначим буквой a также множество, содержащее только элемент a. Если p, p' — высказывания, описывающие свойства операций (1) на множестве $\mathfrak{M}$, и если высказывание p' возникает из высказывания p так, что в высказывании p мы заменяем знак $\vee$ знаком $\wedge$ и наоборот, то мы говорим, что высказывания p, p' двойственны друг другу (см. [1]). Множество $\mathfrak{M}$ с операциями $\vee$, $\wedge$ называем мультиструктурой (см. [2]), если выполнены следующие условия $\mathfrak{M}$ I—$\mathfrak{M}$ VI (по сравнению с [2] словесная формулировка здесь несколько изменена; a, b, c — произвольные элементы множества $\mathfrak{M}$):

$\mathfrak{M}$ I. *Справедливо* $a \vee b = b \vee a$, *и двойственно* (*коммутативность*).

$\mathfrak{M}$ II. *Если* $M \in (a \vee b) \vee c$, *то существует* $M' \in a \vee (b \vee c)$ *так, что* $M \vee M' = M$; *и двойственно* (*частичная ассоциативность*).

$\mathfrak{M}$ III. *Если* $a \vee b \neq \emptyset$, *то* $a \wedge (a \vee b) = a$; *и двойственно* (*закон поглощения*).

$\mathfrak{M}$ IV. $a \vee a \neq \emptyset$; *и двойственно.*

$\mathfrak{M}$ V. *Если* $a = b$, *то* $a \vee c = b \vee c$; *и двойственно.*

$\mathfrak{M}$ VI. *Если* $M, M' \in a \vee b, M^* \in M \vee M', M \neq M'$, *то* $M \neq M^* \neq M'$; *и двойственно.*

В работе [2] М. Бенадо поставил следующие вопросы:

Проблема 1. Является ли аксиома $\mathfrak{M}$ VI независимой от аксиом $\mathfrak{M}$ I—$\mathfrak{M}$ V?

Проблема 2. Существуют ли ассоциативные мультиструктуры, не являющиеся структурами? (Ассоциативной называется такая структура, в которой для любых $a, b, c \in \mathfrak{M}$ имеет место $(y \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, и двойственно.)

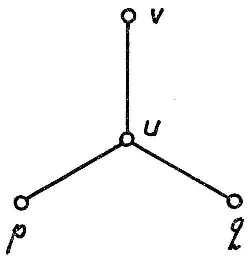

Рис. 1.

1. Докажем, что ответ на первый вопрос положителен. Заметим при этом, что аксиома $\mathfrak{M}$ V нетривиальна лишь в том случае, если знак $=$ на множестве $\mathfrak{M}$ выражает некоторое отношение эквивалентности, а не обычное „тождественное“ равенство. Далее, если для любых $a, b, c \in \mathfrak{M}$ справедливы равенства

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)\,, \tag{2}$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \tag{3}$$

то, очевидно, выполняется и $\mathfrak{M}$ II.

Пример 1. Пусть множество $\mathfrak{M} = \{p, q, u, v\}$ частично упорядочено, см. рис. 1, пусть знак $\leq$ означает частичное упорядочение в множестве $\mathfrak{M}$. Для каждой пары элементов $x, y \in \mathfrak{M}$, для которых $x \leq y$, положим

$$x \vee y = y \vee x = y\,, \quad x \wedge y = y \wedge x = x\,. \tag{4}$$

Далее положим $p \vee q = q \vee p = \{u, v\}$, $p \wedge q = q \wedge p = \emptyset$. Исследуем справедливость аксиом $\mathfrak{M}$ I—$\mathfrak{M}$ VI для введенных таким образом операций $\vee, \wedge$ на $\mathfrak{M}$. (Знак $=$ на $\mathfrak{M}$ означаст тождественное равенство.) Аксиомы $\mathfrak{M}$ I, $\mathfrak{M}$ III, $\mathfrak{M}$ IV, $\mathfrak{M}$ V, очевидно, справедливы. Аксиома $\mathfrak{M}$ VI не справедлива, так как $u, v \in p \vee q$, $u \neq v$, $u \vee v = v$. Докажем, что выполняется и аксиома $\mathfrak{M}$ II. Если все элементы $a, b, c \in \mathfrak{M}$ сравнимы, то справедливы равенства (2), (3), так как операции $\vee$, $\wedge$ совпадают с соответствующими теоретико-структурными операциями в цепи, образованной элементами a, b, c. Итак, достаточно исследовать случай, когда два из элементов a, b, c несравнимы. Так как имеет место закон коммутативности, можно без ограничения общности предположить, что или 1. $a = p$, $b = q$ или 2. $a = p$, $c = q$. Нетрудно проверить, что в случае 2. справедливы равенства (2), (3). В случае же 1., если элемент c равен какому-либо из элементов p, q, v, то справедливы равенства (2), (3); если же $c = u$, то имеет место равенство (3), и выражение в правой (левой) части равенства (2) равно $u(\{u, v\})$, так что равенство (2) не имеет места, но условие, высказанное в $\mathfrak{M}$ II, выполняется. Таким образом мы доказали, что справедлива

Теорема 1. *Аксиома $\mathfrak{M}$ VI независима от аксиом $\mathfrak{M}$ I—$\mathfrak{M}$ V.*

2. Ответ на вопрос 2 также положителен. Простейшим примером является мультиструктура $\mathfrak{M}_1 = \{a, b\}$, в которой $a \vee a = a \wedge a = a$, $b \vee b = b \wedge b = b$, $a \vee b = b \vee a = a \wedge b = b \wedge a = \emptyset$. Закон ассоциативности в мультиструктуре $\mathfrak{M}_1$, очевидно, выполняется. Менее тривиальнымя вляется пример мультиструктуры $\mathfrak{M}_2$, образованной частично упорядоченным множеством на рис. 2, в которой для любых $x, y \in \mathfrak{M}_2$, $x \leq y$ справедливо (4); далее, положим

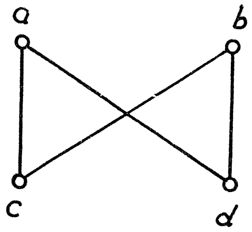

Рис. 2.

$$a \vee b = b \vee a = \emptyset\,, \quad a \wedge b = b \wedge a = \{c, d\}\,,$$

$$c \vee d = d \vee c = \{a, b\}\,, \quad c \wedge d = d \wedge c = \emptyset\,.$$

Для проверки ассоциативности, очевидно, достаточно проверить уравнение $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

Лемма 1. *Каждую мультиструктуру $\mathfrak{M}$, в которой для всех пар $x, y \in \mathfrak{M}$ $x \vee y \neq \emptyset \neq x \wedge y$, можно считать частично упорядоченным множеством, в котором 1. $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$ и одновременно $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$. 2. Если $a \vee b \neq \emptyset$, $c \geq a$, $c \geq b$, то существует $c_1 \in a \vee b$, $c_1 \leq c$; и двойственно.*

См. [2], теорема 1 и 2 (раздел 2.2). (См. также [3].)

Лемма 2. *Пусть мультиструктура $\mathfrak{M}$ не является структурой и пусть для любых $a, b \in \mathfrak{M}$ множества $a \vee b$, $a \wedge b$ непусты. Тогда в множестве $\mathfrak{M}$ (в частичном упорядочении, согласно лемме 1), существует подмножество, частично упорядоченное, как на рис. 3; при этом $a, b \in c \vee d$, $c, d \in a \wedge b$, $0 \in c \wedge d$.*

Доказательство. Пусть выпольнены условия леммы. Если бы для любых $a, b \in \mathfrak{M}$ каждое из множеств $a \vee b$, $a \wedge b$ содержало только один элемент, то, как нетрудно обнаружить по $\mathfrak{M}$ I—$\mathfrak{M}$ VI, $\mathfrak{M}$ было бы структурой. Следовательно, должны существовать элементы $a_1, b_1 \in \mathfrak{M}$ такие, что или $a_1 \vee b_1$ или $a_1 \wedge b_1$ содержит более одного элемента. Предположим, например, что $c, d \in a_1 \wedge b_1$, $c \neq d$ (в противном случае рассуждаем двойственно). По лемме 1 и $\mathfrak{M}$ VI элементы c, d несравнимы; далее, по лемме 1 существуют элементы $a, b \in \mathfrak{M}$ так, что $a, b \in c \vee d$, $a \leq a_1$, $b \leq b_1$.[1]) Если бы элемент c не принадлежал множеству $a \wedge b$, то по лемме 1 существовал бы элемент $c_1 \in a \wedge b$, $c_1 > c$, $c_1 \leq a$, $c_1 \leq b$. Согласно лемме 1, существовал

[1]) См. также лемму 4, стр. 322, [2]. Легко обнаружить, что $a \neq b$.

бы, далее, элемент $c_2 \geq c_1$, $c_2 \in a_1 \wedge b_1$. Тогда имело бы место $c_2 > c$, $c_2 \wedge \wedge c = c$, $c, c_2 \in a_1 \wedge b_1$, что противоречит аксиоме $\mathfrak{M}$ VI. Итак, $c \in a \wedge b$ и аналогично $d \in a \wedge b$. Подберем элементы 0, 1 так, чтобы $0 \in c \wedge d$, $1 \in \in a \vee b$. Элементы $0, 1, a, b, c, d$ упорядочены в частично упорядоченном множестве $\mathfrak{M}$ так, как на рис. 3, чем и доказывается утверждение леммы.

Теорема 2. *Существуют ассоциативные мультиструктуры, не являющиеся структурами. Если мультиструктура $\mathfrak{M}$ ассоциативна и если для любых a, $b \in \mathfrak{M}$ множества $a \vee b$, $a \wedge b$ непусты, то $\mathfrak{M}$ есть структура.*

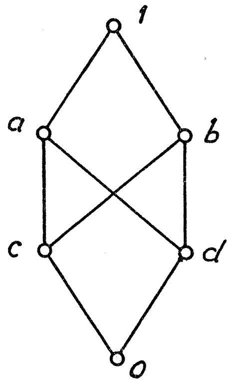

Рис. 3.

Доказательство. Первое утверждение было доказано на примерах перед леммой 1; докажем второе утверждение. Пусть выполняются условия теоремы. Если бы $\mathfrak{M}$ не была структурой, то по лемме 2 она содержала бы подмножество, частично упорядоченное, как на рис. 3. Однако, для соответствующих элементов справедливо

$$(c \wedge a) \wedge b = c \wedge b = c$$

и одновременно $c \wedge (a \wedge b) \supset c \wedge \{c, d\} \supset \{c, 0\}$, так что ассоциативный закон не имел бы места, что противоречит предположению.

Замечание. Все предыдущие рассуждения остаются в силе, если аксиому $\mathfrak{M}$ III заменить следующей более сильной аксиомой:

$\mathfrak{M}$ III*. *Если $M \in a \vee b$, то $M \wedge a = a$; и двойственно.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. Birkhoff:* Lattice theory, New York 1948.

[2] *M. Benado:* Les ensembles partiellement ordonnées et le théorème de raffinement de Schreier, II, Чехосл. мат. журнал *5* (*80*), 308—344.

[3] *M. Benado:* Rectification à mon travail „Les ensembles partiellement ordonnées ...,'' Чехосл. мат. журнал *6* (*81*), 1956, 287-288.

Résumé

SUR LES AXIOMES DES MULTISTRUCTURES

JÁN JAKUBÍK, Košice.

(Reçu le 21 novembre 1955.)

Dans le mémoire [2] M. Mihail Benado a posé deux questions concernant l'axiomatique des multistructures. La solution de ces problèmes est suivante:

1. *L'axiome* $\mathfrak{M}\,6$ *est indépendant de* $\mathfrak{M}\,\mathrm{I}$—$\mathfrak{M}\,\mathrm{V}$.

2. *Il y a des multistructures associatives qui ne sont pas des structures; mais, si S est une multistructure qui est en même temps un ensemble filtrant, alors, S est une structure.*