Milan Kolibiar

Тернарная операция в структурах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 3, 318–329

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100200

Чехословацкий математический журнал, т. 6 (81) 1956, Прага

ТЕРНАРНАЯ ОПЕРАЦИЯ В СТРУКТУРАХ

МИЛАН КОЛИБИАР, Братислава.

(Поступило в редакцию 22/VI 1955 г.)

В работе [1] исследовались некоторые свойства тернарной операции $(a, b, c) = (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a)$ в дистрибутивных структурах. В предлагаемой работе эти результаты обобщаются на случай произвольных структур.[1])

1. На протяжении всей статьи S означает структуру.

1.1. Определение. Мы будем говорить, что элемент $t \in S$ обладает свойством (c), если t — нейтральный элемент и если в каждом интервале $\langle a, b\rangle$ $(a, b \in S)$, содержащем элемент t, имеется дополнение элемента t, т. е. существует элемент $t' \in S$, для которого $t \cap t' = a$, $t \cup t' = b$.

Очевидно, дополнение t' элемента t в данном интервале $\langle a, b\rangle$ единственно.

1.2. *Элемент $t \in S$ обладает свойством* (c) *тогда и только тогда, если существует структура A с наибольшим элементом I и структура B с наименьшим элементом* 0, *так, что $S \simeq A \times B$,*[2]) *причем элемент $t \in S$ соответствует элементу $(I, 0) \in A \times B$.*

Доказательство. 1. Пусть t обладает свойством (c). Обозначим через $A(B)$ подструктуру структуры S, образованную всеми элементами $x \in S$, для которых $x \leqq t$ $(x \geqq t)$. Рассмотрим отображение φ, ставящее каждому элементу $x \in S$ в соответствие элемент $\varphi(x) = (t \cap x, t \cup x) \in A \times B$.

φ является отображением множества S на множество $A \times B$. Действительно, пусть $(x, y) \in A \times B$. Тогда $x \leqq t \leqq y$. Элемент t имеет в интервале $\langle x, y\rangle$ дополнение t'. Имеем $t \cap t' = x$, $t \cup t' = y$, следовательно, $\varphi(t') = (t \cap t', t \cup t') = (x, y)$.

[1]) В работе [1] в формулировку свойства D вкралась ошибка, с которой связана ошибка в формулировке теоремы 6.2.15. Правильная формулировка упомянутого свойства D приводится в § 4.3 настоящей работы. В этом смысле нужно исправить и формулировку теоремы 6.2.15 в работе [1].

[2]) $\simeq$ означает изоморфизм структур, $A \times B$ — кардинальное произведение структур A, B.

Отображение φ есть изоморфизм: Если $x \leqq y$, то очевидно, $\varphi(x) \leqq \varphi(y)$. Наоборот, из соотношения $\varphi(x) \leqq \varphi(y)$, т. е. $t \cap x \leqq t \cap y$, $t \cup x \leqq t \cup y$, следует $x = x \cup (t \cap x) \leqq x \cup (t \cap y) = (x \cup t) \cap (x \cup y) \leqq (y \cup t) \cap (y \cup x) = y \cup (t \cap x) \leqq y \cup (t \cap y) = y$.

Итак, φ — изоморфное отображение структуры S на структуру $A \times B$, причем $\varphi(t) = (t, t)$ (t является наибольшим элементом в A и наименьшим элементом в B).

2. Пусть φ — изоморфное отображение структуры S на структуру $A \times B$ и $\varphi(t) = (I, 0)$. Тогда t будет нейтральным элементом в S ([5], гл. II, теорема 10). Если $x_1 \leqq t \leqq x_2$, $\varphi(x_1) = (a_1, b_1)$, $\varphi(x_2) = (a_2, b_2)$, то $a_1 \leqq \mathrm{I} \leqq a_2$, $b_1 \leqq 0 \leqq b_2$, откуда $a_2 = \mathrm{I}$, $b_1 = 0$. Следовательно, $\varphi(x_1) = (a_1, 0)$, $\varphi(x_2) = (\mathrm{I}, b_2)$. Обозначим через t' элемент, для которого $\varphi(t') = (a_1, b_2)$. Тогда $\varphi(t \cup t') = (\mathrm{I}, 0) \cup (a_1, b_2) = (\mathrm{I}, b_2) = \varphi(x_2)$ и аналогично $\varphi(t \cap t') = \varphi(x_1)$, следовательно, $t \cup t' = x_2$, $t \cap t' = x_1$.

Доказательство закончено.

1.3. *Пусть S обладает непустым центром.*[3]) *Элемент $t \in S$ имеет свойство* (c) *тогда и только тогда, если он входит в центр.*

Доказательство. Пусть t — элемент центра. Тогда он является нейтральным элементом и имеет в S дополнение t'. Пусть $a \leqq t \leqq b$. Обозначим $t^* = a \cup (b \cap t')$. Нетрудно убедиться, что $t \cup t^* = b$, $t \cap t^* = a$. Наоборот, если элемент t имеет свойство (c), то он имеет в интервале $\langle 0, \mathrm{I} \rangle$, т. е. в структуре S, дополнение, а так как он нейтрален, то входит в центр.

1.4. *Если элемент t обладает свойством* (c) *в структуре S, то он обладает свойством* (c) *и в структуре $\tilde{S}$, двойственной S.*

Утверждение очевидно.

1.5. *Множество всех элементов из S, имеющих свойство* (c), *образует подструктуру структуры S.*

Доказательство. Пусть t_1, t_2 имеют свойство (c). Так как нейтральные элементы образуют подструктуру в S, $t_1 \cap t_2$ является нейтральным элементом. Пусть $a, b \in S$, $a \leqq t_1 \cap t_2 \leqq b$. Обозначим $t_1 \cup t_2 \cup b = c$. Элементы t_1, t_2 имеют в интервале $\langle a, c \rangle$ дополнения $\bar{t}_1, \bar{t}_2$. Нетрудно показать, что элемент $t^* = (\bar{t}_1 \cup \bar{t}_2) \cap b$ является дополнением элемента $t_1 \cap t_2$ в интервале $\langle a, b \rangle$. Значит, $t_1 \cap t_2$ имеет свойство (c). Ввиду 1.4, также и элемент $t_1 \cup t_2$ имеет свойство (c).

1.6. *Пусть A_1, A_2 — структуры, $S = A_1 \times A_2$. Элемент $a = (a_1, a_2) \in S$ будет нейтральным тогда и только тогда, если a_i будет нейтральным элементом в A_i ($i = 1, 2$).*

---

[3]) Т. е. S содержит элементы 0 и I.

Доказательство нетрудно провести, если воспользоваться упражнением 1 § 10 гл. II книги Биркгофа [5].

1.7. *Пусть A_1, A_2 — структуры, $S = A_1 \times A_2$. Элемент $t = (t_1, t_2) \in S$ имеет в каждом интервале $\langle a, b\rangle$ $(a, b \in S)$, содержащем элемент t, дополнение тогда и только тогда, если элемент $t_i \in A_i$ (для $i = 1, 2$) имеет дополнение в каждом интервале $\langle a_i, b_i\rangle$ $(a_i, b_i \in A_i)$, содержащем элемент t_i.*

Доказательство. Пусть элемент t обладает указанным в теореме свойством. Пусть $a_1, b_1 \in A_1$, $a_1 \leqq t_1 \leqq b_1$. Обозначим $(a_1, t_2) = a$, $(b_1, t_2) = b$. Пусть $\bar{t} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2)$ — дополнение элемента t в интервале $\langle a, b\rangle$. Тогда элемент t_1 имеет в интервале $\langle a_1, b_1\rangle$ дополнение $\bar{t}_1$. Для элемента t_2 применимо то же доказательство. Доказательство обратного утверждения очевидно.

1.8. *Пусть A_1, A_2 — структуры, $S = A_1 \times A_2$. Элемент $t = (t_1, t_2) \in S$ имеет свойство* (c) *тогда и только тогда, если элемент t_1 имеет свойство* (c) *в структуре A_1 и t_2 имеет свойство* (c) *в A_2.*

Утверждение следует из 1.6 и 1.7.

1.9. *Пусть A_1, A_2, S_1, S_2 — структуры, $S_1 = A_1 \times A_2$, $S_2 = \tilde{A}_1 \times A_2$. Если элемент $t \in |S_1| = |S_2|$*[4]) *имеет свойство* (c) *в S_1, то он имеет свойство* (c) *и в S_2 и наоборот.*

Доказательство. Утверждение следует из 1.8 и 1.4.

Следствие. *Если S_1 обладает наибольшим и наименьшим элементом, то структуры S_1, S_2 в теореме* 1.9 *имеют общий центр* (т. е. каждый элемент центра в S_1 является элементом центра в S_2 и наоборот).

Замечание. Ввиду 1.3, теоремы 1.5 и 1.9 (а также следствие 1.9) дают обобщение теоремы 9 гл. II в [5].

2. Если для элементов a, b, c структуры S

$$(a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a) = (a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a)\,, \tag{1}$$

то мы определим для этих трех элементов a, b, c тернарную операцию

$$(a, b, c) = (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a)\,.$$[5])

В частности, если b — нейтральный элемент структуры S, то равенство (1) справедливо для любых элементов a, c структуры S. В этом случае будет, кроме этого,

$$(a, b, c) = (a \cup c) \cap [b \cup (a \cap c)] = (a \cap c) \cup [b \cap (a \cup c)]$$

для любых $a, c \in S$.

---

[4]) Если S — структура, то знаком $|S|$ мы будем обозначать множество ее элементов.

[5]) Эту операцию в алгебре Буля исследовал А. А. Грау [2]. В дистрибутивные структуры ее ввел С. А. Кисс в работах [3], [4]. В настоящем и последующих разделах обобщаются результаты работы [1], касающиеся дистрибутивных структур.

Если P — множество с ассоциативной и коммутативной бинарной операцией $a \circ b$ $(a, b \in P)$, причем каждый элемент $a \in P$ идемпотентен, то мы говорим, что P-полуструктура. Если полуструктура P имеет то свойство, что для каждых двух элементов $a, b \in P$ существует элемент $c \in P$ такой, что $a \circ c = a$, $b \circ c = b$ и $a \circ c' = a$, $b \circ c' = b$, $c' \in P$ влечет за собой $c \circ c' = c$, то множество P с операциями $a \circ b$ и $a \times b = c$ является структурой. В таком случае будем коротко говорить, что полуструктура P является структурой.

2.1. *Пусть t есть нейтральный элемент структуры S. Множество $|S|$ с операцией $a \circ b = (a, t, b)$ $(a, b \in S)$ образует полуструктуру.*[6])

Доказательство. Пусть $a, b, c \in S$. Очевидно, $a \circ a = a$, $a \circ b = b \circ a$. Далее (мы постоянно пользуемся нейтральностью элемента t),

$$\begin{aligned}(a \circ b) \circ c &= [(a \circ b) \cup c] \cap [(a \circ b) \cup t] \cap (c \cup t) = \\ &= (\{(a \cup b) \cap [(a \cap b) \cup t]\} \cup c) \cap ((a \cap b) \cup [(a \cup b) \cap t] \cup t) \cap (c \cup t) = \\ &= (\{(a \cup b) \cap [(a \cap b) \cup t]\} \cup c) \cap ([(a \cap b) \cup t] \cap (c \cup t)) = \\ &= (\{(a \cup b) \cap [(a \cap b) \cup t]\} \cup c) \cap [(a \cap b \cap c) \cup t] = \\ &= (a \cap b \cap c) \cup [(\{(a \cup b) \cap [(a \cap b) \cup t]\} \cup c) \cap t] = \\ &= (a \cap b \cap c) \cup \{(a \cup b) \cap [(a \cap b) \cup t] \cap t\} \cup (c \cap t) = \\ &= (a \cap b \cap c) \cup [(a \cup b) \cap t] \cup (c \cap t) = \\ &= (a \cap b \cap c) \cup [(a \cup b \cup c) \cap t]\,.\end{aligned}$$

Итак, мы получили $(a \circ b) \circ c = (a \cap b \cap c) \cup [(a \cup b \cup c) \cap t] = (b \circ c) \circ a = a \circ (b \circ c)$ и доказательство закончено.

Замечание. Для каждого элемента $x \in S$ имеет место $t \circ x = t$.

2.2. *Если элемент t имеет свойство* (c), *то полуструктура в* 2.1 *является структурой.*

Обозначение. Эту структуру мы обозначим через S_t.

Доказательство. Пусть t имеет свойство (c). Обозначим $x \circ y = x \wedge y$. Если $a, b \in S$, $a \leqq t \leqq b$, то элемент t имеет в интервале $\langle a, b\rangle$ (единственное) дополнение. Обозначим его через $a * b$. Определим на множестве $|S|$ дальнейшую операцию (обозначим ее через $\vee$):

$$x \vee y = (t \cap x \cap y) * (t \cup x \cup y)\,.$$

Тогда для элемента $x \vee y$ имеем

$$t \cap (x \vee y) = t \cap x \cap y\,, \quad t \cup (x \vee y) = t \cup x \cup y\,. \tag{2}$$

[6]) Б. Х. Арнольд [7] рассматривал дистрибутивные структуры с третьей операцией * в том смысле, что множество $|S|$ с операцией * образует полуструктуру и операция * взаимно дистрибутивна со структурными операциями структуры S. В случае дистрибутивной структуры операция $\circ$ из теоремы 2.1 имеет свойства арнольдовской операции * (см. [1]).

Пусть $x, y, z \in S$. Очевидно, $x \vee y = y \vee x$ и $(t \cap x) * (t \cup x) = x$, т. е. $x \vee x = x$. Далее, согласно (2), $(x \vee y) \vee z = [t \cap (x \vee y) \cap z] * [t \cup \cup (x \vee y) \cup z] = (t \cap x \cap y \cap z) * (t \cup x \cup y \cup z) = [t \cap (y \vee z) \cap x] * * [t \cup (y \vee z) \cup x] = (y \vee z) \vee x = x \vee (y \vee z)$. Ввиду 2.1, остаются доказать уже только законы поглощения. Имеем [используя (2) и нейтральность элемента t]

$$
\begin{aligned}
(x \wedge y) \vee x &= [t \cap x \cap (x \wedge y)] * [t \cup x \cup (x \wedge y)] = \\
&= [t \cap x \cap (x \cup t) \cap (t \cup y) \cap (y \cup x)] * \\
&\quad * [t \cup x \cup (x \cap t) \cup (t \cap y) \cup (y \cap x)] = (t \cap x) * (t \cup x) = x\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x \vee y) \wedge x &= [(x \vee y) \cup t] \cap (t \cup x) \cap [x \cup (x \vee y)] = \\
&= (t \cup x \cup y) \cap (t \cup x) \cap [x \cup (x \vee y)] = \\
&= (x \cup t) \cap [x \cup (x \vee y)] = x \cup [t \cap (x \vee y)] = \\
&= x \cup (t \cap x \cap y) = x\,.
\end{aligned}
$$

Этим и заканчивается доказательство.

Следствие. *Если t — элемент центра, то полуструктура в* 2.1 *является структурой.*

В самом деле, согласно 1.3, рассматриваемый илемент имеет свойство (с).

Замечание. По замечанию в 2.1 t является наименьшим элементом в структуре S_t.

2.3. *Пусть t — нейтральный элемент в S. Если полуструктура в* 2.1 *является структурой, то элемент t имеет свойство* (с).

Замечание. Ввиду 2.2, справедливо утверждение: Полуструктура в 2.1 будет структурой тогда и только тогда, если элемент t имеет свойство (с).

Доказательство. Обозначим рассматриваемую структуру через S'. Структурные операции и частичное упорядочение в S' (S) обозначим символами $\wedge$, $\vee$, $\leqq$ ($\cap$, $\cup$, $\subseteqq$).

Пусть $a \subseteqq t \subseteqq b$. Обозначим $a \vee b = t'$. Покажем, что $t \cup t' = b$, $t \cap t' = a$. (Мы будем постоянно пользоваться нейтральностью элемента t в S.)

Имеем $a = a \wedge t' = (a \cap t) \cup (t \cap t') \cup (t' \cap a) = a \cup (t \cap t') \cup (a \cap t') = a \cup [(t \cup a) \cap t'] = a \cup (t \cap t')$; аналогично, $b = b \wedge t' = b \cap (t \cup t')$. Следовательно,

$$t \cap t' \subseteqq a\,, \quad b \subseteqq t \cup t'\,. \tag{3}$$

Обозначим $(a \cup t', t, b \cap t') = s$. Имеем $s = (a \cup t' \cup t) \cap [t \cup (b \cap t')] \cap \cap [(b \cap t') \cup a \cup t'] = (t \cup t') \cap (t \cup b) \cap (t \cup t') \cap (a \cup t') = b \cap [(t \cap a) \cup \cup t'] = b \cap (a \cup t')$ и одновременно $s = [(a \cup t') \cap t] \cup (t \cap b \cap t') \cup [b \cap \cap t' \cap (a \cup t')] = (a \cap t) \cup (t' \cap t) \cup (b \cap t') = a \cup [(t \cup b) \cap t'] = a \cup (b \cap t')$.

Отсюда следует

$$a \subseteq s \subseteq b\,. \tag{4}$$

Далее имеем

$$a \leqq s\,, \quad b \leqq s\,. \tag{5}$$

Действительно, согласно (3) и (4), будет $a \wedge s = (a \cup t) \cap (t \cup s) \cap (s \cup a) = t \cap (t \cup s) \cap s = t \cap s = t \cap b \cap (a \cup t') = t \cap (a \cup t') = (t \cap a) \cup (t \cap t') = a \cup (t \cap t') = a$,
$b \wedge s = (b \cap t) \cup (t \cap s) \cup (s \cap b) = t \cup (t \cap s) \cup s = t \cup s = t \cup a \cup (b \cap t') = t \cup (b \cap t') = (t \cup b) \cap (t \cup t') = b$.

Из (5) следует

$$t' \leqq s\,. \tag{6}$$

Однако, $t' \wedge s = (t' \cup t) \cap (t \cup s) \cap (s \cup t') = (t' \cup t) \cap [t \cup a \cup (b \cap t')] \cap [t' \cup a \cup (b \cap t')] = (t' \cup t) \cap [t \cup (b \cap t')] \cap (a \cup t') = (t' \cup t) \cap (t \cup b) \cap (t \cup t') \cap (a \cup t') = b \cap [(t \cap a) \cup t'] = b \cap (a \cup t') = s$, и, следовательно, $s \leqq t'$. Отсюда и из (6) следует $t' = s$. Итак, согласно (4), будет $a \subseteq t' \subseteq b$. Это соотношение вместе с (3) дает $t \cap t' = a$, $t \cup t' = b$, чем и завершается доказательство.

2.4. *Пусть t — элемент структуры S, имеющий свойство* (с). *Пусть S_t — соответствующая структура. Пусть A (B) — подструктура структуры S, образованная всеми элементами $x \in S$, для которых (в структуре S) $x \subseteq t$ ($x \supseteq t$). Тогда существует отображение φ множества $|S|$ на множество $|A| \times |B|$ такое, что φ есть изоморфное отображение структуры S (S_t) на структуру $A \times B$ ($\tilde{A} \times B$).*

Доказательство. Рассмотрим отображение φ, которое каждому элементу $x \in |S|$ ставит в соответствие элемент $\varphi(x) = (t \cap x,\ t \cup x) \in |A| \times |B|$. Согласно 1.2, φ будет изоморфным отображением структуры S на кардинальное произведение $A \times B$. Нужно еще доказать, что φ является изоморфным отображением структуры S_t на $\tilde{A} \times B$. Обозначим структурные операции и частичное упорядочение в S_t(S) символами $\wedge$, $\vee$, $\leqq$ ($\cap$, $\cup$, $\subseteq$).

а) Пусть $x, y \in S_t$, $x \leqq y$. Обозначим $x_1 = t \cap x$, $x_2 = t \cup x$, $y_1 = t \cap y$, $y_2 = t \cup y$, следовательно, $\varphi(x) = (x_1, x_2)$, $\varphi(y) = (y_1, y_2)$. Так как $x \leqq y$, то $x = x \wedge y = (x \cup t) \cap (t \cup y) \cap (y \cup x)$, $x_1 = t \cap x = (x \cup y) \cap t$; так как $y_1 = t \cap y$, то будет $x_1 \cap y_1 = (x \cup y) \cap t \cap y = t \cap y = y_1$, следовательно, $y_1 \subseteq x_1$. Аналогично $x_2 = t \cup x = t \cup (x \cap t) \cup (t \cap y) \cup (y \cap x) = t \cup (x \cap y)$, и так как $y_2 = t \cup y$, $x_2 \cup y_2 = t \cup y = y_2$, будет следовательно, $x_2 \subseteq y_2$. Итак, $\varphi(x) \leqq \varphi(y)$ ($\varphi(x) \in \tilde{A} \times B$, $\varphi(y) \in \tilde{A} \times B$).

б) Пусть для $x, y \in S_t$ $\varphi(x) \leqq \varphi(y)$ ($\varphi(x) \in \tilde{A} \times B$, $\varphi(y) \in \tilde{A} \times B$). Тогда $t \cap x \supseteq t \cap y$, $t \cup x \subseteq t \cup y$ и, следовательно, $x \wedge y = (x \cup t) \cap (t \cup y) \cap (y \cup x) = (x \cup t) \cap (x \cup y) = x \cup (t \cap y) \subseteq x \cup (t \cap x) = x$, $x \wedge y = (x \cup t) \cap (x \cup y) \supseteq x$. Отсюда следует $x = x \wedge y$, т. е. $x \leqq y$. Этим и завершается доказательство.

2.5. *Относительно структур S, S_t справедливо утверждение: Если подмножество X образует выпуклую подструктуру в одной из структур S, S_t, то оно образует выпуклую подструктуру и в другой структуре.*

Доказательство. Утверждение вытекает из 2.4 и из работы [6] (утверждение 3.4).

2.6. *Если a является нейтральным элементом в S, то оно будет нейтральным элементом и в S_t и наоборот.*

Доказательство. Утверждение следует из 2.4 и 1.6.

2.7. *Пусть A — структура с наибольшим элементом I, B — структура с наименьшим элементом 0. Пусть $S = A \times B$, $S' = \tilde{A} \times B$. Тогда $S' = S_t$, где $t = (\mathrm{I}, 0)$.*

Доказательство. Обозначим структурные операции в структурах A, B, S символами $\cap$, $\cup$, в S' — символами $\wedge$, $\vee$. Согласно 1.2, элемент t имеет в S свойство (c). Пусть $x, y \in S$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ $(x_1, y_1 \in A, x_2, y_2 \in B)$. Имеем $(x \cup t) \cap (t \cup y) \cap (y \cup x) = ((x_1 \cup \mathrm{I}) \cap (\mathrm{I} \cup y_1) \cap (y_1 \cup x_1), (x_2 \cup 0) \cap (0 \cup y_2) \cap (y_2 \cup x_2)) = (x_1 \cup y_1, x_2 \cap y_2) = x \wedge y$, т. е. элементы x, y имеют одно и то же пересечение в обеих структурах S', S_t. Отсюда следует $S' = S_t$.

3. На протяжении всего настоящего раздела мы будем предполагать, что структура S имеет наименьший элемент 0 и наибольший элемент I.

3.1. *Пусть t — элемент центра структуры S, а t' — его дополнение. Тогда структурные операции структуры S_t будут даны тернарными операциями в S:*

$$a \wedge b = (a, t, b)\,, \quad a \vee b = (a, t', b)\,.$$

Доказательство. Операции $\wedge$, $\vee$ коммутативны, ассоциативны и каждый элемент является, согласно 2.1, идемпотентным. Согласно следствию в 2.2. операцией $\wedge$ определяется структура S_t. Нужно только показать, что операция $\vee$ является объединением в S_t, т. е. $a \vee b = (t \cap a \cap b) * (t \cup a \cup b)$.

Если обозначить $\bar{t} = a \vee b = (a \cup t') \cap (t' \cup b) \cap (b \cup a) = (a \cap t') \cup (t' \cap b) \cup (b \cap a)$, то нужно доказать, что $t \cap \bar{t} = t \cap a \cap b$, $t \cup \bar{t} = t \cup a \cup b$. Однако, так как t, t' — нейтральные элементы в S, имеем $t \cup \bar{t} = t \cup (a \cap t') \cup (t' \cap b) \cup (b \cap a) = t \cup (a \cap b) \cup [(a \cup b) \cap t'] = (a \cap b) \cup [(a \cup b \cup t) \cap (t \cup t')] = (a \cap b) \cup (a \cup b \cup t) = a \cup b \cup t$. Второе соотношение доказывается двойственным образом.

3.2. *Пусть t — элемент центра в S. Обозначим $S' = S_t$. Тогда $S = (S')_0$.*

Доказательство. Расстмотрим в структуре S интервалы $\langle 0, t\rangle = A$, $\langle t, \mathrm{I}\rangle = B$. Обозначим $S_1 = A \times B$, $S_1' = \tilde{A} \times B$. Согласно 2.4, существует отображение φ множества $|S|$ на множество $|A| \times |B|$ такое, что φ является изоморфным отображением структуры S на S_1 и структуры S' на S'_1. Согласно 2.7, будет $S_1 = (S'_1)_p$, где $p = (0, t) \in S'_1$. При отображении φ элемент p будет образом элемента 0. Ввиду изоморфизма φ тогда будет $S = (S')_0$.

3.3. *Если элемент a входит в центр одной из структур S, S_t, то он входит и в центр другой структуры (т. е. структуры S, S_t обладают общим центром).*

Доказательство. Утверждение следует из 2.4, 1.9 и 1.3.

3.4. *Пусть S, S' — структуры с наибольшим и наименьшим элементами, определенные на одном и том же множестве M. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

B. *Если множество $X \subset M$ образует выпуклую подструктуру в одной из структур S, S', то оно образует выпуклую подструктуру и в другой структуре.*

E. *В структуре S существует элемент t со свойством* (c), *для которого имеет место $S' = S_t$.*

Доказательство. Импликация **E** $\Rightarrow$ **B** справедлива в силу 2.5. Пусть структуры S, S' имеют свойство **B**. В работе [6] (теорема 3.6) было доказано, что в таком случае существуют такие структуры A, B, что $S \simeq A \times B$, $S' \simeq \tilde{A} \times B$. Притом эти изоморфизмы даны оба одним и тем же отображением φ множества $|S|$ на множество $|A| \times |B|$. Структуры A, B имеют, очевидно, наибольший и наименьший элемент. Если при изоморфизме $S \simeq A \times \times B$ элементу (I, 0) соответствует элемент t, то, согласно 2.7, будет $S' = S_t$.

3.5. *Пусть t, u — элементы центра в структуре S. Обозначим $S' = S_t$, $S'' = S'_u$. Тогда $S'' = S_u$.*

Доказательство. Согласно 3.4, пара S, S'' обладает свойством **B**, следовательно, $S'' = S_v$, где v — элемент из S, имеющий свойство (c). Нетрудно показать, что $u = v$.

3.6. Рассмотрим структуры с наименьшим и наибольшим элементом, определенные на одном и том же множестве M. Свойство **E** является, согласно 3.2, симметричным, согласно 3.5 — транзитивным; кроме того оно, очевидно, рефлексивно, так как $S = S_0$. Итак, оно определяет отношение эквивалентности на множестве рассматриваемых структур. Согласно 3.3, все эквивалентные структуры обладают общим центром.

4. Пусть S — структура. Обозначим через $T(S)$ множество троек $[a, b, c]$ ($a, b, c \in S$), для которых справедливо равенство (1) п. 2. Для этих троек, согласно п. 2., определена тернарная операция (a, b, c). Всюду в дальнейшем мы будем иметь в виду именно эту тернарную операцию. Если $[a, b, c] \in \in T(S)$, то элемент $(a, b, c) \in S$ назовем значением тернарной операции для тройки $[a, b, c]$.

Пусть a, b, $x \in S$. Скажем, что *элемент x лежит между элементами a, b*, если $(a \cap x) \cup (b \cap x) = x = (a \cup x) \cap (b \cup x)$.[7]) Множество всех элементов $x \in S$, находящихся между a, b, обозначим через $G(a, b)$. Если S_1, S_2 — структуры, определенные на одном и том же множестве и если в обеих структурах одновременно имеет или не имеет место $x \in G(a, b)$, то будем говорить, что пара структур S_1, S_2 имеет свойство **G**.

4.1. *Пусть для структур A_1, A_2, S*

$$S = A_1 \times A_2 \,. \tag{7}$$

Составляющие элемента $x \in S$ обозначим через x_1, x_2. В этом случае будет $[a, b, c] \in T(S)$ тогда и только тогда, если $[a_i, b_i, c_i] \in T(A_i)$ $(i = 1, 2)$. Если $[a, b, c] \in T(S)$, то в разложении (7) будет $(a, b, c) = ((a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2))$.

Доказательство не представляет трудностей.

4.2. *Имеем $T(S) = T(\tilde{S})$. Если $[a, b, c] \in T(S)$, то тернарная операция принимает для тройки $[a, b, c]$ одинаковое значение в обеих структурах S, $\tilde{S}$.*

Утверждение очевидно.

4.3. *Пусть пара структур S_1, S_2, определенных на одном и том же множестве M, имеет следующее свойство*:

D. *Существуют структуры A_1, A_2 и отображение φ множества M на множество $|A_1| \times |A_2|$ такое, что φ — изоморфное отображение структуры S_1 на $A_1 \times A_2$ и одновременно структуры S_2 на $\tilde{A}_1 \times A_2$.*

Тогда будет $T(S_1) = T(S_2)$, и если $[a, b, c] \in T(S_1)$, то операция (a, b, c) принимает одинаковое значение в обеих структурах S_1, S_2.

Доказательство. Утверждение вытекает из 4.1 и 4.2.

4.4. *Для элементов a, b, $x \in S$ имеет место $x \in G(a, b)$ тогда и только тогда, если $[a, x, b] \in T(S)$ и $(a, x, b) = x$.*

Доказательство. 1. Пусть $x \in G(a, b)$. Тогда $(a \cap x) \cup (b \cap x) = x = (a \cup x) \cap (b \cup x)$, следовательно, $a \cap b \leqq x \leqq a \cup b$ и далее $a \cup x \leqq a \cup b$, $b \cup x \leqq a \cup b$; $a \cap b \leqq a \cap x$, $a \cap b \leqq b \cap x$. Отсюда следует $(a \cap b) \cup (b \cap x) \cup (x \cap a) = (a \cap x) \cup (b \cap x) = x = (a \cup x) \cap (b \cup x) = (a \cup b) \cap (b \cup x) \cap (x \cup a)$, т. е. $[a, x, b] \in T(S)$ и $(a, x, b) = x$.

2. Пусть $[a, x, b] \in T(S)$, $(a \cap b) \cup (b \cap x) \cup (x \cap a) = x = (a \cup b) \cap (b \cup x) \cap (x \cup a)$. Тогда $a \cap b \leqq x \leqq a \cup b$, $a \cap b \leqq a \cap x$, $a \cap b \leqq b \cap x$; $a \cup x \leqq a \cup b$, $b \cup x \leqq a \cup b$, следовательно, $x = (a \cap b) \cup (b \cap x) \cup (a \cap x) = (a \cap x) \cup (b \cap x)$ и аналогично, $x = (a \cup x) \cap (b \cup x)$, т. е. $x \in G(a, b)$.

[7]) См. [8].

4.5. *Пусть S_1, S_2 — структуры, определенные на одном и том же множестве. Пусть $T(S_1) = T(S_2)$ и пусть для каждой тройки $[a, b, c] \in T(S_1)$ операция (1) принимает одно и то же значение в обеих структурах S_1, S_2. Тогда структуры S_1, S_2 обладают свойством* **G**.

Утверждение вытекает из 4.4.

4.6. *Условия те же, как и в 4.5.*

Утверждение: *Пара S_1, S_2 обладает свойством* **D**.

Доказательство. Утверждение вытекает из 4.5 и из работы [6] (теорема 3.7).

4.7. *Для пары структур S_1, S_2, определенных на одном и том же множестве, свойство* **D** *эквивалентно следующему свойству: $T(S_1) = T(S_2)$, и для каждой тройки $[a, b, c] \in T(S_1)$ тернарная операция дает то же самое значение в обеих структурах S_1, S_2.*

Утверждение вытекает из 4.3 и 4.6.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. Якубик, М. Колибиар:* О некоторых свойствах пар структур. Чехосл. мат. журнал, *4 (79)*, 1954, 1—27.

[2] *A. A. Grau:* Ternary Boolean algebra. Bull. Am. Math. Soc. *53,* 1947, 567—72.

[3] *S. A. Kiss:* Transformations on lattices and structures of logic. New York 1947.

[4] *G. Birkhoff, S. A. Kiss:* A ternary operation in distributive lattices. Bull. Am. Math. Soc. *53,* 1947, 749—52.

[5] *G. Birkhoff:* Lattice theory, II. Ed. New York, 1948.

[6] *M. Kolibiar:* K vzťahom „medzi" vo svázoch. Matematicko-fyzikálny časopis SAV, V, 1955, 162—171.

[7] *B. H. Arnold:* Distributive lattices with a third operation defined. Pacific J. Math. *1,* 1951, 33—41.

[8] *M. C. Гельфанд:* Отрезки в дедекиндовой структуре. Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та *71*, 1953, 199—204.

Résumé

UNE OPÉRATION TERNAIRE DANS LES TREILLIS

MILAN KOLIBIAR, Bratislava.

(Reçu le 22 juin 1955.)

On dit q'un élément t d'un treillis S a la propriété (c), si t est un élément distribuant[1]) et si dans tout segment $\langle a, b\rangle$ telle que $t \in \langle a, b\rangle$, l'élément t admet un complément relatif par rapport à a et b.

[1]) Sur la terminologie voir M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur, R. Croisot: Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. Paris 1953.

Un élément $t \in S$ a la propriété (c) si et seulement si existe un treillis A à élément universel I et un treillis B à élément nul 0 tel que l'on ait $S \simeq A \times B$ (S est isomorph à produit cardinal $A \times B$) t étant image de $(I, 0) \in A \times B$. L'ensemble C de tous éléments $t \in S$ possédents la propriété (c) forme un sous-treillis de S. Si le treillis S admet un élément nul et un élément universel, C est le centre de S. A_1, A_2 étant des treillis, un élément (a_1, a_2) a la propriété (c) dans le treillis $A_1 \times A_2$ si et seulement si il a cette propriété dans le treillis $\tilde{A}_1 \times A_2$ ($\tilde{A}_1$ étant dual de A_1).

La condition

$$(a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a) = (a \cup b) \cap (b \cup c) \cap (c \cup a) \tag{1}$$

étant vérifiée pour des éléments a, b, c, on définit (a, b, c) par

$$(a, b, c) = (a \cap b) \cup (b \cap c) \cup (c \cap a)\,. \tag{2}$$

Nous noterons $T(S)$ l'ensemble de tous les triples $[a, b, c]$ $(a, b, c \in S)$ qui satisfont à (1).

Dans le suivant on généralise les considérations de cette opération ternaire dans les treillis distributifs qui se trouvent dans la travaille [1].

t étant un élément distribuant de S, l'opération (a, t, b) est définie pour chaque $a, b \in S$ et l'ensemble S muni d'une opération $a \circ b = (a, t, b)$ est un demi-treillis. Ce demi-treillis est un treillis si et seulement si t a la propriété (c). Nous notons ce treillis par S_t.

Étant donnés deux treillis S, S' définis sur le même ensemble, on considère des propriétés suivants des couples S, S':

B. Si l'ensemble X forme un sous-treillis convexe dans S, il forme le même sous-treillis dans S' et réciproquement.

O. On a $T(S) = T(S')$ et si $[a, b, c] \in T(S)$, (a, b, c), défini par (2), a la même valeur dans tous les deux treillis S, S'.

E. On éxiste un élément $t \in S$ ayant la propriété (c) tel que l'on ait $S' = S_t$.

D (**D'**). Il y a des treillis A, B (un treillis A à élément universel et un treillis B à élément nul) tels que l'on ait $S \simeq A \times B$, $S' \simeq \tilde{A} \times B$, l'application d'isomorphisme étant la même dans deux les cases.[2])

On démontre les théorèmes suivants:

Les treillis S, S_t ont la propriété **B**. *Les propriétés* **O**, **D** *et les propriétés* **E**, **D'** *sont équivalentes.*

Pour des treillis avec élément nul et élément universel tous quattres propriétés sont équivalentes. Dans ce cas, les treillis ayants une de cettes propriétés ont le

[2]) La formulation d'un théorème analogue 6.2.15 dans [1] est incorrect.

centre commun. On peut éxprimer les opérations de treillis S_t par les opérations de treillis S comme il suit:

$$a \wedge b = (a, t, b) = (a \cap b) \cup (b \cap t) \cup (t \cap a)\,,$$

$$a \vee b = (a, t', b) = (a \cap b) \cup (b \cap t') \cap (t' \cap a)$$

t' étant un complément d'élément t.