Sergei Lvovich Sobolew

Некоторые советские работы по применению функционального анализа к дифференциальным уравнениям

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 3, 289–310

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100198

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. 6 (81) ПРАГА 22. IX. 1956 г. • No 3

НЕКОТОРЫЕ СОВЕТСКИЕ РАБОТЫ ПО ПРИМЕНЕНИЮ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

СЕРГЕЙ ЛЬВОВИЧ СОБОЛЕВ, Москва.

Прочитано на IV съезде чехословацких математиков в Праге 6/IX 1955 г.

Одним из важнейших достижений математического анализа в XX веке является возникновение понятия функционального пространства, переход от рассмотрения индивидуальных функций одной или многих переменных к рассмотрению множеств функций. При этом главным становится изучение таких их свойств, которые характеризуют отношение каждой индивидуальной функции к другим функциям того же множества, изучения понятий предельного перехода, расстояния и зависимостей каких-либо функций или чисел от функций.

Перенесение основных классических идей обыкновенного анализа: функциональной зависимости, непрерывности, предельного перехода и т. п. из n-мерного евклидова пространства на различные функциональные пространства было вызвано в основном потребностями теории дифференциальных уравнений, математической физики, вариационного исчисления и связанных с ними математических дисциплин.

В силу ряда причин среди функциональных пространств, подвергшихся изучению, особое значение получило гильбертово пространство. Главным образом это произошло в силу той особой роли, которую в начале развития функционального анализа стала играть спектральная теория линейных операторов в квантовой механике и новой физике.

Однако, этот путь развития новых идей в математической физике не смог один целиком удовлетворить все запросы, предъявленные со стороны этой науки.

Весьма важным оказалось изучение функциональных пространств другой природы, изучение основных задач анализа и математической физики с точки зрения их свойств в различных пространствах, связи этих пространств между собой и т. п.

Этой теме и будет посвящен мой доклад.

Не считая исследований по спектральной теории, работы по функциональному анализу в применении к математической физике в последние годы развивались в двух больших направлениях:

теории обобщенных функций (которую Л. Шварц назвал теорией распределений) и

теории функциональных пространств, связанных с интегральными свойствами частных производных от входящих туда элементов.

Поскольку основная тема моего доклада относится ко второму из этих направлений, я не буду долго останавливаться на первом из них и ограничусь лишь несколькими краткими замечаниями, имеющими непосредственное отношение к делу.

Таким образом, я буду говорить по преимуществу о свойствах решений уравнений в частных производных, связанных с интегральными оценками их производных.

*

Проблематика уравнений в частных производных, или (как их часто называют, объединяя с функциональными уравнениями) уравнений математической физики довольно разнообразна, но в ней всегда оставались и остаются до сих пор актуальными три вопроса, ответ на которые нужно бывает получить в самых разнообразных задачах и постановках, для самых различных уравнений или их систем. Это: существование решения, его единственность и непрерывная зависимость от определяющих его условий.

Два первых вопроса являются классическими и изучаются со времени Даламбера.

Третий вопрос долгие годы не был ясно осознан и лишь Адамаром был впервые сформулирован, как один из основных вопросов анализа.

И уже очень скоро после того, как это было понято, с несомненностью выяснилось, что решать уравнения математической физики в классической постановке иногда бывает нецелесообразно и очень трудно.

Стало ясно, что только переходя к совершенно новым объектам и представлениям можно с успехом продвинуться в решении этих задач.

Уже такая простейшая задача, как, например, задача Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f, \tag{1}$$

т. е. задача об отыскании решения удовлетворяющего условиям

$$u\Big|_{t=0} = u_0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1 \tag{2}$$

не имеет дважды непрерывно дифференцируемого решения, если допустить, как это естественно, непрерывность f, однократную дифференцируемость u_1 и двукратную дифференцируемость u_0. Далее, хотя решение, в случае когда у него существуют непрерывные вторые производные, остается единственным, тем не менее оно вовсе не непрерывно, зависит от f, u_0 и u_1 в классическом понимании.

Для гиперболических уравнений с переменными коэффициентами, для других классов дифференциальных уравнений — постановка задач остается, разумеется, не менее сложной.

Полное выяснение всех вопросов, связанных с уравнениями математической физики, оказалось возможным лишь в связи с расширением понятия о решении дифференциальных уравнений, с анализом разных функциональных пространств, где решения рассматриваются, а также с изучением их взаимной связи.

О наиболее общих расширениях скажу лишь вскользь. Такого рода расширения, замыкающие все классические задачи математической физики, довольно давно наметились в теоретической физике, где рассматривались более общие понятия, нежели обычные функции, так называемые δ-функции и их производные. К этим понятим подходили многие математики — Адамар, М. Рис, и др.

В строгой математической постановке в 1936 году мною были сформулированы соответствующие задачи [4].

Именно, в качестве решения уравнения рассматривались обобщенные функции или функционалы над пространством m-раз дифференцируемых функций. Эти функционалы были сами дифференцируемыми сколько угодно раз и допускали слабое приближение с помощью непрерывных функций. В зависимости от задач, для которых привлекались эти функционалы, были выделены подпространства с различной топологией, характеризующиеся свойствами тех множеств, на которых эти обобщенные функции были отличны от нуля. Рассмотрев уравнения в обобщенных функциях, удалось доказать существование и единственность обобщенной задачи Коши для уравнений нормально гиперболического типа.

В последствии Л. Шварц в своей книге ,,Теория распределения" назвал эти обобщенные функции распределениями (distributions) и распространил на них преобразование Фурье. Множества, на которых функционал (или ,,распределение") отличен от нуля, Шварцем названы ,,носителями" (support).

Другие обобщения понятия решений, о которых я и буду в основном говорить, первоначально были связаны с энергетическим интегралом для решений уравнений в частных производных.

Под обобщенным решением дифференциального уравнения (его иногда называют ,,weak solution", т. е. слабое решение), принято понимать функцию, которая в обычном смысле может даже не иметь тех производных, которые входят в дифференциальный оператор. Это решение чаще всего определяется своими интегральными свойствами или, как предел в каком-либо смысле последовательности истинных решений.

Простейшим определением обобщенного решения, например, для уравнения $\Delta u = f$ будет функция, удовлетворяющая условию:

$$\iiint u \, \Delta v \, \mathrm{d}\Omega = \iiint f \, . \, v \, \mathrm{d}\Omega \, , \tag{3}$$

где v — произвольная достаточно гладкая финитная функция, т. е. функция равная нулю вне некоторой конечной области. Иногда интегральные соотношения могут содержать производные низшего порядка. Например, вместо (3) можно написать

$$- \iiint (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) \, \mathrm{d}\Omega = \iiint f \, . \, v \, \mathrm{d}\Omega \, . \tag{4}$$

Переходя к изложению существа вопроса, начну с исторически простейшего примера.

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \, , \tag{5}$$

т. е. задачи отыскания функции u по условию

$$u|_s = \varphi \tag{6}$$

в некоторых (довольно широких) предположениях дает минимум интегралу

$$J = \int \int_{\Omega} \int \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \mathrm{d}\Omega \tag{7}$$

среди всех функций, принимающих заданные значения на границе области. Это свойство позволило еще Риману пытаться строить решения задачи Дирихле прямым методом, как предел некоторой минимизирующей последовательности для интеграла (7) при условии (6).

Как известно, рассуждения Римана были неточными, но были исправлены позднее.

Такого же рода вариационные методы можно развить и для самосопряженных эллиптических уравнений с переменными коэффициентами и для уравнений высшего порядка, как например, полигармонических.

Из рассмотрения минимизирующей последовательности для интеграла J невозможно непорседственно сделать заключение о существовании решения задачи Дирихле и о сходимости к ней самой этой последовательности.

Это можно сделать, рассматривая свойства функций, имеющих интегрируемый квадрат градиента в данной области.

Я напомню некоторые соответствующие результаты.

Будем рассматривать классы функций φ таких, которые отличаются друг от друга на некоторый многочлен степени не выше $l - 1$ и имеют производные порядка l, интегрируемые со степенью p.

Множество таких классов образует функциональное пространство $L_p^{(l)}$ с нормой

$$\|u\|_{L_p^{(l)}} = \left\{\int\int\limits_{\Omega}\int\left[\sum \frac{l!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!}\left(\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)^2\right]^{p/2} \mathrm{d}\Omega\right\}^{1/p} \tag{8}$$

инвариантной по отношению к ортогональным координатным преобразованиям.

Пространство $L_p^{(l)}$ легко превратить в полное, пополнив его классами функций, имеющих обобщенные производные порядка l (в слабом смысле) интегрируемые в степени p.

Множество функций (уже не классов), имеющих обобщенные производные порядка l можно превратить в функциональное пространство. Для этого следует ввести в него какой-либо проекционный оператор на подпространство S_{l-1} многочленов степени $l - 1$ (т. е. на класс эквивалентный нулю в $L_p^{(l)}$). При этом удается построить норму, как выпуклую функцию от нормы в $L_p^{(l)}$ того класса, к которому принадлежит данная функция и нормы проекции данной функции в S_{l-1}. Такое функциональное пространство обозначается $W_p^{(l)}$. После введения такой нормы минимизирующая последовательность для интеграла Дирихле оказывается просто последовательностью, у которой норма стремится к своему минимуму для данного класса функций, удовлетворяющих граничным условиям (и даже сходящейся в $W_2^{(1)}$). Свойства пространств $W_p^{(l)}$ и в частности $W_2^{(1)}$ позволяют легко сделать нужные выводы для того, чтобы завершить полное исследование задачи Дирихле. Эти свойства сформулированы в виде т. н. теорем вложения, которые мы сейчас и напомним.

Теоремы вложения относятся к значениям функций из $W_p^{(l)}$ на многообразиях S_{n-k} размерности $n - k$, $k < lp$, в области Ω n-мерного пространства R_n. Значения, принимаемые функциями на S_{n-k} являются, в свою очередь, элементами других функциональных пространств.

Справедливы теоремы:

Теорема I. *Если $lp > n$, то функция $\varphi \in W_p^{(l)}$ будет непрерывной в замкнутой области Ω (и, очевидно, на всех многообразиях любой размерности $s = n - k$).*

Теорема II. *Если $lp < n$, то на любом достаточно гладком многообразии размерности $n - k = s$, где $0 \leq k < lp$, функция $\varphi \in W_p^{(l)}$ будет принадлежать пространству L_q, где*

$$\frac{n - s}{q} = \frac{n}{p} - l\,. \tag{9}$$

Теорема II в полном виде была недавно доказана молодым ленинградским математиком Ильиным [1], несколько более суженная формулировка содержится в моей статье ,,Об одной теореме функционального анализа" [1] и в монографии ,,Некоторые применения функционального анализа к математической физике" [3].

Теоремы I и II носят название теорем *вложения*. Они говорят о том, что пространство $W_p^{(l)}$ может быть вложено в C или L_q с подчинением нормы, т. е. ограниченное множество в $W_p^{(l)}$ будет также ограниченным в соответственном пространстве C или L_q, куда оно вложено. Из $\|\varphi\|_{W_p^{(l)}} \leqq A$ вытекает

$$\|\varphi\|_{L_q} \leqq ZA .$$

Замечание. Как мы видим, при $lp < n$, функция $\varphi \in W_p^{(l)}$, вообще говоря, не должна быть непрерывной.

Можно проверить, например, что функция $1/r$ принадлежит к $W^{(1)}_{\frac{3}{2}-\varepsilon}$ в шаре $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$ трехмерного евклидова пространства R_3, так как

$$\left\| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right\| \leqq \frac{a}{r^2} .$$

Очевидно, что при $r = 0$ мы можем задать этой функции любое значение. В норме $W_p^{(l)}$ она определяется, таким образом, везде с точностью до множества меры нуль. Следует при этом уточнить смысл того, что обозначают ее значения на многообразии меньшей размерности.

Теоремы I, II при этом следует понимать так: среди эквивалентных друг другу функций (совпадающих везде кроме б. м. множества меры нуль) найдется такая (ее можно указать конкретно), для которой верны указанные теоремы. Можно сказать, что особенности функций из $W_p^{(1)}$ на S_{n-k} устранимы.

Первым следствием теорем вложения является существование предельных значений у всякой функции $\varphi \in W_2^{(1)}$ на любом многообразии размерности $n - 1$. В самом деле, $lp = 2$ и $k = 1$ удовлетворяет условиям теоремы II. Больше того, из этой же теоремы следует, что эти предельные значения будут принадлежать L_q, где $\frac{n-1}{q} = \frac{n}{2} - 1$, или $L_{2+\frac{2}{n-2}}$. При $n = 2$, $q = \infty$; при $n = 3$, $q = 4$ и т. п.

Таким образом, оказывается, что задача Дирихле для функций, у которых интеграл J (интеграл Дирихле) сходится, всегда имеет смысл.

Еще большее уточнение вносит следующая важная теорема, впервые в полном виде доказанная Кондрашовым, а ранее, в несколько более узких предположениях, установленная в моей работе ,,Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений" [5].

Теорема III. *Рассмотрим функцию* $\varphi(P + \Delta P) - \varphi(P) = \Delta\varphi$, *где* P — *переменная точка, а* ΔP — *некоторый вектор сдвига аргумента.* $\Delta\varphi$ *есть функция двух переменных: переменной точки* P *и переменного вектора* ΔP. *Пусть* $\varphi \in W_p^{(l)}$ *и следовательно* $\varphi \in L_q$, $\frac{s}{q} = \frac{n}{p} - l$ *на всяком* s-*мерном многообразии, а значит* $\varphi \in Lq^*$ *при любом* q^* *таком, что* $1 \leqq q^* < q$. *Как следствие,* $\Delta\varphi$ *как функция* P *будет снова принадлежать* L_{q^*}. *Тогда*:

$$\|\Delta\varphi\|_{L_{q^*}} \leqq K|\Delta P|^{\beta}\,\|\varphi\|_{W_p^{(l)}}, \tag{10}$$

где

$$\beta = \min\left(1,\ l - \frac{n}{p}\right).$$

Отметим несколько простых следствий теоремы III.

Если многообразие размерности s есть линейное (гиперплоскость), то вектор ΔP может сам лежать в этой гиперплоскости. Рассмотрим ограниченное множество функций

$$\varphi \in W_p^{(l)}; \quad \|\varphi\|_{W_p^{(l)}} \leqq A$$

и изучим значения, принимаемые функциями этого множества на S_s. Мы видим, что для них равномерно ограничена норма сдвига. Как известно, это служит необходимым и достаточным условием компактности этого множества в пространстве L_{q^*}. Таким образом, при вложении $W_p^{(l)}$ в C или L_{q^*} ограниченное множество переходит в компактное и для гиперплоскостей получаем:

Следствие I. (Теорема Кондрашова). *Оператор вложения* $W_p^{(l)} \subset C$ *или* $W_p^{(l)} \subset L_{q^*}$ *является вполне непрерывным оператором.*

Это следствие, как можно показать, является верным не только для гиперплоскостей, но сохраняет силу и для любых достаточно гладких многообразий.

Отметим еще важное для нашего примера (задачи Дирихле) свойство.

Следствие II. *Всякая функция* φ *из* $W_p^{(l)}$ *принимает на многообразиях* S_s *свои значения, стремясь к ним по норме в смысле соответствующей метрики.*

Таким образом, если для функции φ сходится интеграл Дирихле, то она принимает свои значения на S_{n-1}, стремясь к ним равномерно в норме L_{q^*} (q^* для двумерного пространства ести любое число, а в трехмерном пространстве $q^* < 4$).

Следствие III. *Минимизирующая последовательность для интеграла* J *компактна в* L_{q^*} *и из нее всегда можно выделить сходящуюся в этом пространстве последовательность.*

Можно доказать и более сильный результат:

Минимизирующая последовательность для J сходится в себе в $W_2^{(1)}$. Отсюда, а также из полноты пространства $W_2^{(1)}$ следует, что предельная функция принадлежит $W_2^{(1)}$.

Дальше из теорем вложения вытекает еще:

Следствие IV. *Предельная функция минимизирующей последовательности интеграла J удовлетворяет поставленным граничным условиям.*

Из сказанного ясно, каково значение теории вложения в вариационных методах уже на простейшем примере задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Теоремы вложения устанавливают существование предельных условий. Из них следует сходимость в себе минимизирующей последовательности, а также в некотором смысле ее компактность, позволяющие для предельной функции установить удовлетворение граничным условиям.

Существенное обобщение теории вложения получено С. М. Никольским [1], который, с одной стороны, ценой несколько больших требований на границу области, сумел избавиться от требования интегрируемости всех производных порядка l, ограничиваясь, например, лишь частными производными, взятыми по одной переменной $\frac{\partial^l u}{\partial x^l}$ (его условия не являются инвариантными при ортогональных преобразованиях координат), а с другой стороны ввел в рассмотрение пространства $W_p^{(r)}$ для дробных r: пространство $W_p^{(l+\alpha)}$, где $0 \leqq \alpha < 1$ и l—целое, определяется как множество функций, у которых производные порядка l удовлетворяют условию

$$\left| \Delta \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| \leqq K |\Delta P|^\alpha, \quad \Sigma \alpha_i = l; \tag{11}$$

аналогичному условию (10), полученному в теореме III.

Оказывается, что все три теоремы I, II и III сохраняют свое значение, если в их формулировке всюду заменить l на r.

Отметим еще один результат частично намеченный в моих работах [2], [3] и ясно сформулированный С. М. Никольским.

Из принадлежности функции φ, заданной на границе Ω, к пространству $L_{2+\varepsilon}$ вытекает существование функции с ограниченным интегралом Дирихле, принимающей значение φ на границе.

Мы не останавливались здесь еще на нескольких почти тривиальных следствиях теорем вложения. Из принадлежности функции φ к $W_p^{(l)}$ мы делали выводы, касающиеся только самой функции. Все то же самое можно сформулировать и для ее производных более низкого порядка. Тогда мы получим теорию вложения $W_p^{(l)}$ в $W_q^{(s)}$, где q зависит от s, p и l.

Применение теорем вложения в вариационном исчислении для полигармонического уравнения

$$\Delta^m u = 0 \tag{12}$$

позволило получить некоторые новые результаты, касающиеся задания краевых значений для этого уравнения на многообразиях низшей размерности, чем $n - 1$. (С. Л. Соболев [5]).

Решение полигармонического уравнения (12) связано с вариацией интеграла

$$J_m = \int \ldots \int \sum \frac{m!}{\alpha_1!, \ldots \alpha_n!} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)^2 \mathrm{d}\Omega\,. \tag{13}$$

Поэтому краевые задачи для этого уравнения можно трактовать, как задачи о минимуме $\|u\|_{L_q^{(m)}}$ среди функций, удовлетворяющим некоторым краевым условиям.

Функции u поэтому естественно искать из $W_q^{(m)}$.

Теоремы вложения позволяют установить, что на многообразии размерности $n - 1$ для этих функций существуют предельные значения всех производных до порядка $m - 1$ включительно, на многообразиях размерностей $n - 2$ и $n - 3$ значения всех производных до порядка $m - 2$ и т. д. на многообразиях размерности $n - 2k + 2$ и $n - 2k + 1$ существуют значения всех производных до порядка $m - k$ включительно.

Например, в трехмерном пространстве для бигармонических функций существуют предельные значения функции и первых ее производных на поверхностях и значения самой функции на линиях и в отдельных точках.

Далее выясняется, что именно эти данные можно задавать, решая полигармоническое уравнение. Отыскивая, как и в задаче Дирихле, минимум J_m среди функций, которые на любом многообразии размерности $n - 2k$ и $n - 2k - 1$, входящем в состав границы, вместе с производными до порядка $m - k - 1$ принимают заданные значения, мы получим решение полигармонического уравнения при этих условиях.

Доказательство состоит в повторении соответствующего доказательства, приведенного для задачи Дирихле.

Так же, как и в том случае, устанавливается сходимость минимальной последовательности в $W_2^{(m)}$.

Попрежнему компактность оператора вложения приводит к заключению о том, что предельная функция будет удовлетворять граничным условиям.

Удовлетворение уравнению вытекает из леммы о том, что всякое слабое решение эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами неограниченно дифференцируемо.

Можно также установить единственность поставленной задачи. Эта единственность как в задаче Дирихле, так и в полигармонической задаче основывается на лемме:

Если функция $w \in W_2^{(m)}$ удовлетворяет однородным граничным условиям на границе области, а функция $u \in W_2^{(m)}$ является решением уравнения $\Delta^m u = 0$, то:

$$D(u, w) \equiv \int \dots \int \sum \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \cdot \frac{\partial^m w}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \mathrm{d}\Omega \tag{14}$$

обращается в нуль,

$$D(u, w) = 0 \; . \tag{15}$$

Лемма эта доказывается непосредственными оценками.

Для того, чтобы установить единственность решения, достаточно воспользоваться тем, что при наличии двух решений u_1 и u_2 получим $D(u_1, u_1 - u_2) = D(u_2, u_1 - u_2) = 0$, откуда $D(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$ и далее уже почти непосредственно получается $u_1 = u_2$.

Таким образом, вариационная схема решения самосопряженных эллиптических задач применением теории вложения значительно упрощается, задачи замыкаются в себе и решаются элементарно.

В эллиптических задачах вариационная схема не является, разумеется, ни единственной, ни исчерпывающей.

В работе Фридрихса 30-х годов [1] применялась другая схема, основанная на представлении дифференциального оператора в виде произведения двух сопряженных операторов. Подробное изучение этих операторов с помощью теорем вложения дало возможность М. И. Вишику развить эту схему для введенных им сильно эллиптических систем уравнений.

Вместо рассмотрения функции u рассматривается ее градиент $\operatorname{grad} u \equiv \equiv gu$, в пространстве потенциальных векторов, интегрируемых с квадратом по Ω. Уравнение Пуассона записывается при этом в виде

$$\operatorname{div} (gu) = f \; . \tag{16}$$

Оператор gu будет замкнутым, если его рассматривать на $W_2^{(1)}$. По теореме вложения он имеет ограниченный обратный. Оператор div, который рассматривается как сопряженный с g, также имеет ограниченный обратный. Отсюда вытекает, что решение уравнения Пуассона существует, единственно и представимо в виде $g^{-1} \operatorname{div}^{-1} h = u$.

В более сложном случае Вишиком рассматривались уравнения вида

$$\operatorname{div} agu = h \; , \tag{17}$$

где $a = \varepsilon + K$, причем K — ограниченный оператор, или $a = (\varepsilon + K + + B)^*$, причем K — кососимметрический (б. м. и неограниченный) оператор, а B — вполне непрерывный оператор. Покажем, что область значений $\operatorname{div} ag$ — все пространство. Будем трактовать этот оператор как сопряженный с оператором $\operatorname{div} a^* g$, определенным для гладких функций. Этот последний оператор имеет положительно определенную квадратичную форму и, значит, имеет ограниченный обратный, заданный на некотором множестве H'. Из этого вытекает, что уравнение $\operatorname{div} agu = h$ всегда разрешимо (м. б. не единственным образом). Далее устанавливается единственность решения или, что то же самое, плотность множества значений оператора.

Широкое проведение развития этих схем, грубо поясненных нами на примере уравнения Пуассона, наряду с применением метода моментов Бубнова-Галеркина, позволило решить как теоретически целый ряд задач большой общности, так и дать приемы для их численного решения.

В теории эллиптических систем важные результаты достигнуты М. И. Вишиком.

Рассматривая системы уравнений четного порядка $m' = 2m$ с w неизвестными функциями от n переменных, М. И. Вишик вводит понятие о сильно эллиптических положительных операторах.

Под этим понимается следующее.

Оператор четного порядка $m' = 2m$

$$Lu = \Sigma A_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \tag{18}$$

где u — вектор w-мерного пространства, а $A_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ — некоторые квадратные матрицы порядка w, называется сильно эллиптическим, если при любых $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ таких, что $\Sigma \xi_i^2 = 1$, матрица $A = \sum \bar{A}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ является определенной. Через $\bar{A}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ обозначена симметрическая часть матрицы $A_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$. Если эта матрица положительная, то оператор L будет положительным.

К исследованиям Вишика близко примыкают весьма интересные и глубокие работы GÅRDING'а [1], [2], и BROWDER'а [1]. На деталях этих исследований я не имею возможности остановиться за неимением времени.

Вишиком рассмотрены основные краевые задачи для сильно эллиптических систем, т. е. для систем вида: $Lu + Bu = f$, где B — оператор низшего порядка, а L — сильно эллиптический оператор порядка $m' = 2m$.

Рассуждениями, подобными тем, которые были нами проиллюстрированы на примере уравнения Пуассона, он доказывает, что существуют обобщенные решения этого уравнения, имеющие интегрируемые с квадратом производные до порядка $m = \frac{1}{2}m'$, удовлетворяющие соответствующим однородным граничным условиям (I-я и II-я краевые задачи).

Другой способ доказательства теорем существования краевых задач дан О. А. Ладыженской [5]. Он основан на установленных ею априорных интегральных оценках для решения уравнений эллиптического типа [2]. Поясним его на примере первой краевой задачи $u|_S = 0$ для эллиптического уравнения

$$Z_1 u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au = f. \tag{19}$$

Без ограничения общности можно считать, что $(-Z_1 u, u) \geqq \alpha(u, u)$, $\alpha > 0$ и что область Ω есть шар или какая-нибудь область простого вида, для которой известна разрешимость рассматриваемой краевой задачи для оператора Лапласа в классическом смысле для очень гладких f. Введем семейство операторов $Z_\tau = \Delta + \tau(Z_2 + \Delta)$. Для всех $\tau \in [0, 1]$ и $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(\Omega)$ (функции из $W_2^2(\Omega)$, равные нулю на границе) имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^{(2)}(\Omega)} \leqq C\|Z_\tau u\|_{L_2(\Omega)} . \tag{20}$$

Вследствие его можно утверждать, что оператор $Z_0 u \equiv su = f$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами функций $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(\Omega)$ и $f \in L_2(\Omega)$. Но тогда это же справедливо и для оператора Z_τ при $\tau \leqq \tau_1 < \dfrac{1}{\|\Delta^{-1}(Z - \Delta)\|_{W_2^{(2)}}}$. Действительно, задачу $Z_\tau u = f$ можно переписать в виде

$$u = \tau \Delta^{-1}(Z - \Delta)\, u = \Delta^{-1} f . \tag{21}$$

Оператор $\Delta^{-1}(Z - \Delta)$ в силу (20) при $\tau = 0$ имеет ограниченную в $W_2^{(2)}(\Omega)$ норму и потому (21) однозначно разрешимо в $\overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}(\Omega)$ при любом $f \in L_2(\Omega)$ для указанных $\tau \leqq \tau_1$. После этого можно продолжить Z_{τ_1} до $Z_{\tau_1 + \tau_2}$ и т. д., причем в силу (20) такое продолжение можно выполнить до $\tau = 1$.

Из теорем вложения следует, что оператор Z_1^{-1}, существование которого мы только что показали, является вполне непрерывным в $L_2(\Omega)$ (и даже в $W_2^{(1)}(\Omega)$), поэтому для операторов $Z_1 u - \mu u$ и $Z_1^* u - \bar{\mu} u$, где μ — комплексный параметр, справедливы теоремы Фредгольма. Собственные функции будут принадлежать не только $L_2(\Omega)$. но и $\overset{\circ}{W}{}_2^{(2)}$, что видно из их представления $u = \mu Z_1^{-1} u$.

Заметим, что из приведенного доказательства следуют утверждения об обобщенном решении более сильные, чем те, которые были получены по вышеуказанному градиентному методу. Именно, обобщенное решение для любой $f \in L_2(\Omega)$ имеет все производные второго порядка из $L_2(\Omega)$.

Неравенство (20) обобщено и на сильно эллиптические системы (см. Гусева О. В. [1]), так что решения краевых задач для них имеют обобщенные производные из $L_2(\Omega)$ до порядка уравнения $m' = 2m$, если свободный член $f \in L_2(\Omega)$.

Мы не будем перечислять многочисленных работ последнего времени, посвященных исследованию дифференциальных свойств обобщенных решений. Укажем лишь работу [2] Фридрихса, в которой исследуются локальные свойства обобщенных решений с помощью метода „усреднений", берущего свое начало от работ В. А. Стеклова, и систематически использованного Н. М. Гюнтером и мною.

Помимо однородных условий рассматриваются также и неоднородные. Мы разберем подробно еще одну идею для исследования уравнений математической физики. Эта идея является геометрической интерпретацией прямых методов математической физики для решения однородного уравнения при неоднородных граничных условиях. Впервые этот метод встречался в работах известного польского математика Zaremba. Далее для случая уравнения Лапласа полные ортогональные разложения, соответствующие краевым задачам, даны H. Weyl'ом [1]. Для общих самосопряженных уравнений это сделал М. И. Вишик [2].

Ход рассуждений яснее всего можно понять опять на простейшем примере.

Пусть φ_2 — функция, обращающаяся в нуль на границе области Ω, а φ_1 — гармоническая. Тогда, как легко видеть, φ_1 и φ_2 будут иметь ортогональные градиенты. Действительно,

$$\int\int\int (\operatorname{grad} \varphi_1, \operatorname{grad} \varphi_2)\, \mathrm{d}\Omega = \int\int \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\, \mathrm{d}s - \int\int\int \Delta\varphi_2 \cdot \varphi_2\, \mathrm{d}\Omega .$$

Пусть φ — произвольная функция. Если вычесть из нее φ_1 — гармоническую функцию, принимающую на границе те же значения, что и φ, то оставшаяся функция будет обращаться на границе в нуль. Таким образом мы как бы разложили функцию на два слагаемых с ортогональными градиентами.

В такой постановке задачи Дирихле и Неймана сформулированы Zaremba.

Существует теорема, принадлежащая H. Weyl'ю. Любая функция $\varphi \in W_2^{(1)}$ может быть разложена на сумму $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где φ_2 есть предел в метрике $W_2^{(1)}$ последовательности функций, обращающихся в нуль в приграничной полосе, а φ_1 — гармоническая функция, φ_2 — ортогональная к φ_1. Обозначим через R пространство $L_2^{(1)}$ со скалярным произведением $\int\int\int \sum v_{x_i} w_{x_i}\, \mathrm{d}\Omega$, и обозначим через R_0 множество градиентов гладких функций, принимающих нулевые значения в приграничной полосе, а через $\overline{R}_0$ — замыкание R_0. Мы видим, что $\varphi_2 \in \overline{R}_0$. Если H — ортогональное дополнение к $\overline{R}_0$ в R, тогда решить задачу Дирихле, т. е. найти гармоническую функцию, принимающую на границе то же значение, что заданная функция φ, означает просто, найти проекцию φ на H. Далее уже из теорем вложения следует, что φ_1 имеет предельные значения на границе, будучи элементом из $W_2^{(1)}$, а также то, что φ_2 тоже имеет предельные значения и притом равные нулю, на границе.

Полезно заметить, что пространство $\overline{R}_0$ совпадает с линейным пространством $\overline{\overline{R}}_0$ всех обобщенных градиентов функций, принимающих нулевые значения на границе. Очевидно, что $\overline{R}_0 \subset \overline{\overline{R}}_0$. Обратное включение $\overline{\overline{R}} \subset \overline{R}_0$ следует из некоторых довольно кропотливых оценок, устанавливающих одновременно единственность решения задачи Дирихле в ее точном понимании, т. е. задачи об отыскании функции, принимающей заданные значения, *а не просто отличающейся от* φ на элемент φ_2 (С. Л. Соболев [3]).

Общие функциональные рассмотрения позволяют не только решить *первую краевую задачу эллиптического типа* в разных аспектах как с однородными условиями, так и с нулевой правой частью, но еще и рассмотреть различные простейшие задачи на собственные значения как вариационным методом, так и с помощью других подходов.

Хочется остановиться еще на одном вопросе, привлекающем в последнее время большой интерес исследователей, а именно на вопросе о краевых задачах для уравнений, вырождающихся на границе области, т. е. уравнений эллиптического типа с одной неизвестной функцией, у которых на границе области форма, составленная по старшим коэффициентам, перестает быть положительно определенной. Впервые задачи такого рода были поставлены, рассмотрены и решены Трикоми в связи с уравнениями смешанного типа.

Линия вырождения соответствовала у Трикоми линии перехода уравнения из одного типа в другой.

Эта область уравнений смешанного типа получила за последние годы самостоятельное широкое развитие. Мы касаться ее не будем.

Примером уравнения вырождающегося на границе служит уравнение

$$y^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f\,. \tag{22}$$

Это уравнение исследовано при помощи различных методов Келдышем, Олейник и другими. В случае двух переменных этими авторами были выяснены все принципиальные вопросы. Вишик в своей статье [3] и С. Г. Михлин применили функциональные методы к исследованию этих задач. Вишик дал обобщение теорем вложения в n-мерном пространстве на случай вырождающейся метрики и с их помощью рассмотрел различные краевые задачи для вырождающихся на границе уравнений, установив существование, единственность и непрерывную зависимость от начальных данных и правой части.

Общее уравнение эллиптического типа

$$Lu=\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=h(x)\,,$$

эллиптическое при $x_n>0$ и такое, что ранг q матрицы a_{ik} будет меньше n при $x_n=0$, рассматривается в некоторой области, прилегающей к плоскости $x_n=0$. Граница этой области состоит из двух кусков: Γ_0 — участка плоскости $x_n=0$ и Γ, расположенного вне этой плоскости. Для него рассмотрены две основные краевые задачи:

1. Задача. *Ищется обобщенное решение неоднородного уравнения $Lu = h$, удовлетворяющее в обобщенном смысле наложенным на самую неизвестную функцию граничным условиям.*

2. Задача. *Ищется обобщенное решение неоднородного уравнения $Lu = h$, удовлетворяющее условиям*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + Au \equiv \Sigma a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos nx_i + A(s)\, u = \varphi(s)\,.$$

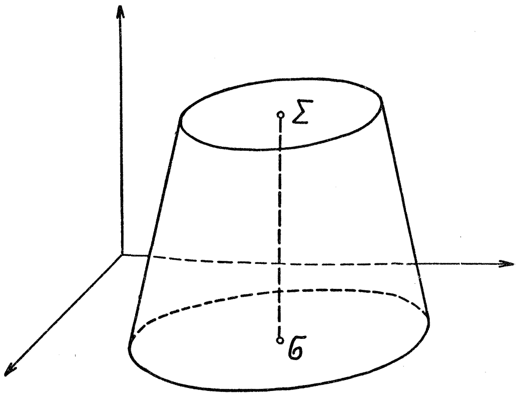

Рис. 1.

Коэффициент a_{nn} предполагается порядка x_n^α. В зависимости от значения α краевые задачи ставятся по разному. При $\alpha < 1$ постановка задачи ничем не отличается от обычной. При $\alpha \geqq 1$, грубо говоря, можно пренебречь членом $a_{nn} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ в уравнении при постановке краевых задач. Следовательно, на уравнение можно смотреть как на параболическое и возможность задания на Γ_0 функции или ее производных определяется знаком коэффициента при $\dfrac{\partial u}{\partial x_n}$.

Эти результаты получены М. И. Вишиком при помощи обобщенных теорем вложения на случай вырожденных метрик. Так, например, замыкая пространство R_0 в вырожденной метрике, в случае $\alpha < 1$, мы видим, что нулевые граничные значения функций сохраняются, а при $\alpha > 1$ мы в замыкании получим функцию, принимающую любые значения на Γ_0.

*

Второй важнейшей задачей уравнений математической физики является задача Коши, которая ставится как для параболических, так и для гиперболических уравнений.

Как мы указывали выше, в классической задаче Коши для волнового уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$ при условиях $u|_{t=0} = u_0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1$ было давно хорошо известно, что вообще говоря нельзя утверждать существование решения, непрерывного с производными до порядка s, если u_0 имеет непрерывные производные до порядка s, u_1 — непрерывные производные до порядка $s - 1$, f — непрерывные производные до порядка $s - 2$.

При исследовании задачи Коши для этих уравнений существенную роль играет интегральное тождество, связанное с т. н. законом сохранения энергии.

Рассмотрим некоторую поверхность, являющуюся как бы ,,усеченным конусом", см. рис. 1. Эта поверхность образована двумя плоскостями $t = 0$, $t = T$ и характеристической конической поверхностью такой, что внешняя нормаль к ней образует острый угол с осью t. Пусть Σ — площадь верхнего основания, а σ — площадь нижнего основания.

Тогда справедливо неравенство

$$\int\int_{\Sigma}\int\left[\sum_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\mathrm{d}\Sigma \leqq \int\int_{\sigma}\int\left[\sum_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\mathrm{d}\sigma\,.$$

Это неравенство иногда называют ,,энергетическим", т. к. через такого рода интегралы часто выражается закон сохранения энергии в волновых процессах.

Будем называть решением волнового уравнения из $W_2^{(s)}$, $s = 1, 2, \ldots$, такую функцию u, которая

а) $u \in W_2^{(s)}$,

б) ортогональна к волновому оператору от любой, т. н. ,,финитной" функции (отличной от нуля лишь в ограниченной части пространства)

$$\int\int\int\int u \,\Box v \,\mathrm{d}\Omega = 0\,.$$

Справедливы теоремы:

Теорема I. *Обобщенное решение волнового уравнения из* $W_2^{(s)}$, $s \geqq 1$, *в* $(n + 1)$*-мерном пространстве для всякой плоскости* $t = \mathrm{const}$ *имеет определенное значение для самой функции и ее первой производной по времени* $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Эти значения меняются в каждой постоянной области непрерывно в метрике $W_2^{(s)}$ *и* $W_2^{(s-1)}$ *в* n*-мерном пространстве.*

Теорема II. *Для любых двух функций* $u_0 \in W_2^{(s)}$ *и* $u_1 \in W_2^{(s-1)}$, $s \geqq 1$, *в любой области* Ω *пространства* $x_1, \ldots, x_n$ *существует обобщенное решение задачи Коши, принамающее* u_0 *и* u_1 *в качестве начальных значений.*

Останавливаться на напоминании доказательства этих теорем мы сейчас не будем за отсутствием времени.

Эти результаты переносятся и на нелинейные уравнения, если зависимость их левых частей от u и ее производных достаточно гладкая.

*

Перехожу к последней части моего обзора — к смешанной задаче для гиперболических, параболических и других более общих задач.

Под смешанной задачей мы будем понимать нахождение решения уравнения $Lu = f$ при некоторых начальных условиях: $u|_{t=0}$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}$ для гиперболических и $u|_{t=0}$ для параболических уравнений и кроме того условий $u|_s$ на некоторых времяобразно ориентированных границах области.

Рассмотрение смешанных задач в последние годы было выполнено О. А. Ладыженской в монографии [1].

Другие методы их исследования и некоторые обобщения на системы даны в ее последующих статьях [3], [4] и в статьях М. И. Вишика [3], [4].

Результаты О. А. Ладыженской прежде всего позволили перенести на смешанную задачу гиперболических уравнений все то, что было ранее выполнено для задачи Коши.

Существенную роль при этом играет следующий прием. Она рассматривает разностный аналог дифференциальных уравнений, и доказывает, что его решение будет допускать оценки, аналогичные оценкам сумм квадратов производных решения, в пределе переходящие в них. Она устанавливает также, что понимаемый нужным образом предел решений разностных уравнений будет обобщенным решением задачи.

Основной ее результат в [1] следующий:

Если коэффициенты уравнения $Lu = f$ и его свободный член имеют производные до порядка $k - 1$ и граница области Ω непрерывно дифференцируема k раз, тогда обобщенное решение при соответствующих начальных условиях принадлежит пространству $W_2^{(k)}(Q)$ (в области Q $(n+1)$-мерного пространства).

Применение теорем вложения позволяет далее, идя обычным путем, установить широкие достаточные условия для существования классического решения с непрерывными вторыми производными, а также решения почти всюду с суммируемыми производными 2-го порядка.

Мы уже говорили выше о том, каким путем устанавливается существование обратных операторов для уравнений эллиптического типа.

В заметках О. А. Ладыженской [3], [4] дан другой метод доказательства теорем существования и единственности краевых задач и задачи Коши для уравнений и систем разных типов. Эти задачи рассмотрены как задачи о решении операторных уравнений

$$
\left.\begin{aligned}
&1.\ \ Su \equiv \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + S_1(t)\,u + S_2(t)\,u = f \ \text{ с условием } u|_{t=0} = u_0\,,\\
&2.\ \ Su \equiv \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + S_1(t)\,u + S_2(t)\,u = f\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{с условием } u|_{t=0} = u_0, \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = u_1\,,\\
&3.\ \ Su \equiv \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + i\,S_1(t)\,u = f \quad \text{с условием } u|_{t=0} = u_0\,,
\end{aligned}\right\} \tag{23}
$$

где S_1 — самосопряженный линейный оператор в гильбертовом пространстве H, положительно определенный в задачах (1) и (2), а S_2 — подчиненный ему линейный оператор в H.

Основная идея доказательства разрешимости этих задач одна и та же. Поясним ее на примере первого уравнения, считая $u_0 = 0$. Оператор S рассмотрим сначала на множестве $D(s)$ всех функций $u(t)$, $t \in [0, 1]$, со значениями из H, для которых $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ кусочно-непрерывно, $S_1(t)\,u(t)$ непрерывна и $u|_{t=0} = 0$. Значения Su рассмотрим, как элементы гильбертова пространства H_1, состоящего из всех $u(t)$ измеримых по t и таких что $\int\limits_0^T \|u\|_H^2\,\mathrm{d}t < \infty$. Оказывается, область значений Su плотна в H_1. Действительно, в противном случае нашлась бы функция $v(t)$ из H_1, ортогональная ко всем Su, т. е.

$$
\int\limits_0^T (v(t), Su)_H\,\mathrm{d}t = 0 \tag{24}
$$

для всех $u \in D(s)$. Построим по v функцию $\varphi(t) = S_1^{-1}(t)\int\limits_T^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ и возьмем в (24) в качестве u функцию

$$
u(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in [0, a]\,,\\ \int\limits_a^t \varphi(t)\,\mathrm{d}t & \text{при } t \in [a, T]\,. \end{cases}
$$

Подставляя в (24) их выражения через φ, мы после некоторых элементарных преобразований придем к выводу, что φ, а следовательно и v, равны нулю. Тем самым плотность Su, $u \in D(S)$, в H_1 доказана. С другой стороны, для Su устанавливается неравенство

$$
\left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right\|_{H_1} + \|S_1u\|_{H_1} \leqq c\|Su\|_{H_1}\,,
$$

из которого следует, что замыкание оператора S эквивалентно замыканию области его значения в H_1 и что область определения замкнутого оператора будет состоять из функций $u(t)$, имеющих $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ и S_1u из H_1. Тем самым доказывается, что уравнение $\bar{S}u = f$ имеет единственное решение из $D(\bar{S})$.

Применительно, например, к уравнениям параболического типа эта теорема гарантирует, что краевая задача для него имеет обобщенное решение при любой правой части из $L_2(Q)$, причем это решение будет иметь все обобщенные производные, входящие в уравнение, из $L_2(Q)$.

Полученные для операторных уравнений (23) теоремы гарантируют разрешимость краевой задачи для так называемых сильно параболических и сильно гиперболических систем урдвнений.

М. И. Вишик дал другой метод исследования таких операторных и дифференциальных уравнений [3], [4], близкий к тому, который он развивал для эллиптических операторов, и о котором сказано выше.

В последнее время область краевых задач, подлежащих рассмотрению, была расширена.

Не очень давно мною и Александряном была рассмотрена система:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = v_y - \frac{\partial p}{\partial x} + F_x\,, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\,v_x - \frac{\partial p}{\partial y} + F_y\,, \qquad \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\,\frac{\partial p}{\partial z}\,, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \tag{25}$$

и уравнение, к которому она приводится,

$$\varDelta\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\varPhi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,\varPhi = \varOmega\,. \tag{26}$$

Функциональные методы в применении к этому уравнению и системе позволили доказать существование и единственность смешанных краевых задач для него. Была показана разрешимость, единственность и непрерывная зависимость от дополнительных условий (корректность) двух основных смешанных задач: 1) $V_n\big|_s = 0$, 2) $P\big|_s = 0$.

В последнее время М. И. Вишику функциональное исследование позволило рассмотреть системы уравнений вида

$$Lu \equiv A_{m'}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B_{r'}\,\frac{\partial u}{\partial t} + C_s u = h\,,$$

где $A_{m'}$ — оператор порядка m', $B_{r'}$ — оператор порядка r', $C_{s'}$ — оператор порядка s' над вектором u в w-мерном пространстве. Он разбирает три случая когда соответственно любой из операторов A, B, C является старшим.

1. Случай, а) когда $m' \geqq r'$, $m' \geqq s'$ — старшим является оператор A. При этом требуется, чтобы m' было четным, а сам оператор A был сильно эллиптическим положительным.

2. Случай, б) когда $m' < r'$; $r' \geqq s'$. Старшим является оператор B. От оператора A требуется, чтобы он был сильно эллиптическим и положительным, а оператор B есть сумма сильно эллиптического положительного оператора и оператора порядка меньшего чем порядок m'.

3. Случай, в) когда $s' > r'$, $s' > m'$. Старшим является оператор C. Требуется, чтобы оператор A был сильно положительным эллиптическим и главная часть B была полуограничена снизу.

Оказалось, что для систем такого типа, частным случаем которых является и уравнение (28) и параболические и гиперболические системы, можно ставить и решать смешанные задачи, причем число граничных условий при этом определяется старшим из операторов A, B, C.

*

Заканчивая свой доклад, мне хотелось бы еще раз вернуться к той роли, которую в современных исследованиях по теории дифференциальных уравнений играет функциональный анализ и те его разделы, о которых речь шла выше.

На тех примерах, которые изложены мною выше, мы видели, что анализ решений уравнений в частных производных, у которых ограничены нормы каких-либо производных, т. е. анализ решений в пространствах $W_p^{(l)}$, соединенный с изучением обобщенных решений, т. е. с соответствующим расширением дифференциальных операторов (также как с таким расширением были связаны самые построения функциональных пространств) привел к ряду серьезных успехов в теории уравнений в частных производных.

Несомненно, что этот путь пока еще далеко не исчерпал себя. Думается, что весь круг вопросов, связанных с существованием, единственностью и непрерывной зависимостью от дополнительных условий разных задач математической физики, в том числе и таких, которые связаны с малоизученными вопросами нелинейных уравнений газовой и магнитной газовой динамики, а быть может и таких плохо разработанных уравнений как интегродифференциальные уравнения кинетической теории газов и т. п., в результате такой значительной перестройки наших понятий и представлений будет изучаться все больше и больше с функциональной точки зрения.

Если мой доклад в какой-либо мере будет способствовать привлечению внимания моих уважаемых слушателей к этим вопросам, я буду счастлив сознанием этого.

ЛИТЕРАТУРА

Browder F. E.: [1] The Dirichlet problem for linear elliptic equations of arbitrary even order with variable coefficients, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, *38*, No. 3, 1952, 230—235.

Weyl H.: [1] The method of orthogonal projection in potential theory. Duke Math. J., *7*, 1940, 414—444.

Вишик М. И.: [1] О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, Мат. сб. т. *29 (71)*, № 3, 1951, 615—676.

[2] Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений, Труды Моск. Матем. общества, т. *1*, 1952, 187—246.

[3] Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области, Мат. сб., т. *33* (*77*), № 3, 1954, 513—586.

[4] Смешанные краевые задачи для систем дифференциальных уравнений, содержащих вторую производную во времени, и приближенный метод их решения, ДАН СССР, т. *100*, № 3, 1955, 409—413.

Gårding L.: [1] Le problème de Dirichlet pour les équations aux dérivées partielles elliptiques à coefficients constants. C. R. Paris, *230*, № 11, 1950, 1030—1032.

[2] Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations. Math. Scand. *1*, Fasc. 1, 1953, 55-72.

Zaremba S.: [1] Sur le principe de minimum. Bull. int. Acad. Sci., Cracovie, 1909, II, № 7, 197—264.

[2] Sur un problème toujours possible à titre de cas particulier, problème de Dirichlet et celui de Neumann. Journ. de mathématique pure et appliquée *V*, 1927, 127—163.

Ильин В. П.: [1] О теореме вложения для предельного показателя. ДАН СССР, т. *96*, № 5, 1954, 905—908.

Ладыженская О. А.: [1] Смешанная задача для гиперболического уравнения. Монография, Москва, 1953.

[2] О замыкании эллиптического оператора, ДАН СССР, т. *79*, № 5, 1951, 723—726.

[3] О разрешимости основных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов, ДАН СССР, т. *97*, № 3, 1954, 395—398.

[4] О решении нестационарных операторных уравнений различных типов, ДАН СССР, т. *102*, № 2, 1955, 207—210.

[5] Простое доказательство разрешимости основных краевых задач и задачи о собственных значениях для эллиптических уравнений. Вестник Ленингр. университета, 1955, № 11, 23—29.

Никольский С. М.: [1] Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. Труды Математического ин-та им. В. А. Стеклова, т. XXXVIII, 1951, 244-278.

Соболев С. Л.: [1] Об одной теореме функционального анализа, Мат. сб., т. *4* (*46*), № 3, 1938, 471—497.

[2] К теории нелинейных гиперболических уравнений с частными производными, Мат. сб., т. *5* (*47*), № 1, 1939, 71—99.

[3] Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Монография, изд. Ленингр. Гос. универ. 1950.

[4] Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, Мат. сб., т. *1* (*34*), 1936, 39-72.

[5] Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений, Мат. Сб., т. *2* (*44*), № 3, 1937, 465—499.

Friedrichs K. O.: [1] On differential operators in Hilbert space. Amer. Journ. of Math., *61,* 1939, 523—544.

[2] On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations. Comm. Pure and Appl. Math. *6,* № 3, 1953, 299—326.

Гусева О. В.: [1] О краевых задачах для сильно эллиптических систем. ДАН СССР, *102*, № 6, 1955, 1069—1072.

Résumé

SUR QUELQUES TRAVAUX SOVIÉTIQUES CONCERNANT LES APPLICATIONS DE L'ANALYSE FONCTIONNELLE AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

S. L. SOBOLEV, Moscou

Conférence faite le 6 septembre 1955 au IV[e] Congrès des mathématiciens tchécoslovaques.

Dans ce compte rendu, on donne une analyse assez poussée (quoique, bien entendu, sans démonstrations) de certains résultats nouveaux des auteurs soviétiques et quelques autres également, concernant la solution des problèmes de la théorie des équations aux dérivées partielles par les moyens de l'analyse fonctionnelle. On part surtout des théorèmes de l'immersion qui traitent en principe, les propriétés des fonctions de l'espace $W_p^{(l)}$ (voir p. ex. SOBOLEV [3]) sur les variétés de dimension inférieure. Ce type d'énoncés est représenté p. ex. par le théorème que voici:

Soit n la dimension du domaine sur lequel les fonctions de $W_p^{(l)}$ sont définies, soit $lp < n$; alors, sur toute variété de dimension s, $n - lp < s \leqq n$ suffisamment régulière, toute fonction $\varphi \in W_p^{(l)}$ appartient à l'espace L_q où

$$\frac{n-s}{q} = \frac{n}{p} - l\,.$$

On donne ensuite des conséquences générales des théorèmes de l'immersion et un certain nombre de leurs applications, surtout aux divers problèmes de la théorie des équations aux dérivées partielles du type elliptique.

A la fin du travail, on discute brièvement aussi certaines questions concernant le problème de Cauchy et les problèmes mixtes pour des types différents des équations aux dérivées partielles.