Czechoslovak Mathematical Journal

Andrzej Schinzel

Sur un problème concernant la fonction $\varphi(n)$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 2, 164–165

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100189

SUR UN PROBLÈME CONCERNANT LA FONCTION $\varphi(n)$

ANDRÉ SCHINZEL, Varsovie.

Communication présentée le 2 septembre 1955 au Congrès des mathématiciens tchécoslovaques à Prague par M. W. SIERPIŃSKI.

Récemment M. W. SIERPIŃSKI m'a posé le problème suivant: *k étant un nombre naturel quelconque, existe-t-il toujours un nombre naturel m tel que l'équation $\varphi(x) = m$ ait plus que k solutions* (en nombre naturels x)?

($\varphi(n)$ désigne ici le nombre de nombres naturels $\leq n$ et premiers avec n).

Le but de cette communication est de démontrer que *la réponse à ce problème est positive.*

Soit k un nombre naturel donné, p_i — le i-ème nombre premier. Posons

$$m = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1) , \tag{1}$$

$$x_i = p_1 p_2 \dots p_{i-1}(p_i - 1)\, p_{i+1} \dots p_k \text{ pour } i = 1, 2, \dots, k, \tag{2}$$

$$x_{k+1} = p_1 p_2 \dots p_k \,. \tag{3}$$

Les nombres $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$ sont évidemment naturels et distincts deux à deux.

Soit maintenant i un des nombres $1, 2, \dots, k$. Le nombre $p_i - 1$ évidemment n'est pas divisible par aucun nombre premier $> p_{i-1}$:

$$p_i - 1 = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_{i-1}^{\gamma_{i-1}} \tag{4}$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{i-1}$ sont des entiers ≥ 0. D'après (2) on a donc

$$x_i = p_1^{\gamma_1+1} p_2^{\gamma_2+1} \dots p_{i-1}^{\gamma_{i-1}+1} p_{i+1} p_{i+2} \dots p_k \,,$$

d'où

$$\varphi(x_i) = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_{i-1}^{\gamma_{i-1}} (p_i - 1) \dots (p_{i-1} - 1)(p_{i+1} - 1) \dots (p_k - 1)$$

et, d'après (4) et (1) on trouve $\varphi(x_i) = m$.

Or, d'après (3) et (1) on a évidemment $\varphi(x_{k+1}) = m$.

Les $k + 1$ nombres naturels distincts $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ satisfont donc à l'équation $\varphi(x) = m$ et notre assertion se trouve démontrée.

En ce qui concerne l'équation $\varphi(x) = m$ il est encore à remarquer que R. D. CARMICHAEL suppose qu'il n'existe aucun nombre naturel m pour lequel elle ait précisément une solution[1]); comme l'a démontré V. L. Klee Jr., cela est vrai pour $m \leq 10^{400}$.[2]) Or, M. W. Sierpiński a récemment démontré qu'il existe une infinité de nombres naturels m pour lesquels l'équation $\varphi(x) = m$ a précisément deux solutions: tels sont, par exemple, les nombres $m = 2 \,.\, 3^{6k+1}$, où $k = 1, 2, \ldots$ (Ces deux solutions sont ici $x = 3^{6k+2}$ et $x = 2 \,.\, 3^{6k+2}$).

Après avoir pri connaissance avec la communication de A. Schinzel, M. P. Erdös a remarqué que S. Pillai a prouvé que le nombre des entiers $m \leq x$ pour lesquels l'équation $\varphi(y) = m$ a des solutions est d'ordre $o(x)$.

En 1935 P. Erdös a démontré (dans le *Quarterly Journal of Mathematics)* l'existence d'une suite infinie croissante d'entiers $n_k (k = 1, 2, \ldots)$ telle que le nombre de solutions de l'équation $\varphi(y) = n_k$ est plus grand que n_k^c où c est un nombre fixe positif, et il énonce l'hypothèse que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un tel $c > 1 - \varepsilon$.

Quant à la démonstration de A. Schinzel, M. P. Erdös la considére comme la plus simple de toutes qui lui sont connues.

---

[1]) Bull. Amer. Math. Soc. *28* (1922), p. 109—110.

[2]) Bull. Amer. Math. Soc. *53* (1947), p. 1183.

Резюме

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ, КАСАЮЩЕЙСЯ ФУНКЦИИ $\varphi(n)$

АНДРЕЙ ШИНЦЕЛЬ (André Schinzel), Варшава.

Сообщение, представленное В. Серпинским на IV съезде чехословацких математиков в Праге 2 сентября 1955 г.

В сообщении дается простое доказательство следующей теоремы:

Для каждого натурального числа k существует натуральное число m так, что уравнение $\varphi(x) = m$ имеет больше, чем k решений (в множестве натуральных чисел). (Притом $\varphi(n)$ обозначает число натуральных чисел $\leq n$, взаимно простых с n.)