Czechoslovak Mathematical Journal

Marko Švec

Eine Eigenwertaufgabe der Differentialgleichung $y^{(n)} + Q(x, \lambda)y = 0$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 1, 46–71

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100178`

Чехословацкий математический журнал, т. 6 (81) 1956, Прага.

EINE EIGENWERTAUFGABE DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $y^{(n)} + Q(x, \lambda)\, y = 0$

MARKO ŠVEC, Bratislava.

(Eingelangt am 10. Mai 1955.)

In dieser Arbeit untersuche ich vor allem die Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung (a_1) $y^{(n)} + Q(x) \,.\, y = 0$, wo $Q(x)$ eine für alle $x \in (-\infty, \infty)$ stetige positive Funktion ist. Besonders werden die Eigenschaften solcher Lösungen untersucht, die durch die Bedingungen $y^{(j)}(x_1) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, i-1,\ i+1, \ldots, k-1,\ k+1, \ldots, n-1$, bestimmt sind. Ich bezeichne die Menge dieser Lösungen mit M_{ik}. Im Weiteren wird die Eigenwertaufgabe

$$y^{(n)} + Q(x, \lambda)\, y = 0\,, \tag{a}$$

$$y^{(j)}(x_1) = 0, j = 0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n-1,$$
$$0 \leq i < k \leq n-1\,, \tag{1}$$

$$y(x_2) = 0\,, \tag{2}$$

$$y(x_3) = 0 \tag{3}$$

gelöst, wo $Q(x, \lambda)$ eine stetige positive Funktion der Veränderlichen x, λ, $x \in \langle a, b\rangle$, $\lambda \in (\varDelta_0, \varDelta_1)$ ist, noch weitere Voraussetzungen erfüllt, die in den betreffenden Sätzen der §§ 3 und 4 jeweils angeführt sind. x_1, x_2, x_3 sind irgendwelche Punkte aus dem Intervalle $\langle a, b\rangle$.

1. Einige Eigenschaften der Differentialgeichung $y^{(n)} + Q(x) \,.\, y = 0$

Satz 1.1. *Es sei $Q(x)$ eine auf dem Intervalle $(-\infty, \infty)$ nichtnegative stetige Funktion, die auf keinem Teilintervalle identisch verschwindet. Es sei weiter $x_1 \in (-\infty, \infty)$ und es sei $y(x)$ eine eigentliche Lösung der Differentialgleichung*

$$y^{(n)} + Q(x)\, y = 0\,, \tag{a_1}$$

die die folgenden Bedingungen erfüllt: die Zahlen $y^{(j)}(x_1)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, k-1$, haben das gleiche Vorzeichen; $y^{(k)}(x_1) \neq 0$; $y^{(j)}(x_1) = 0$, $j = k+1, k+2, \ldots, n-1$, $0 \leq k \leq n-1$. Dann kann im Punkte ξ, der ein beliebiger Punkt aus dem Intervalle (x_1, ∞) ist, höchstens eine der Funktionen $y^{(j)}(x)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, die Nullstelle haben. Ist $y^{(m)}(\xi) = 0$, $0 \leq m \leq n-1$, so ist $y^{(j)}(\xi) \neq 0$, $j =$

$= 0, 1, 2, \ldots, m - 1, m + 1, \ldots,$ *und es haben sowohl die Zahlen* $y^{(j)}(\xi)$ *mit* $j > m$, *als auch diejenigen mit* $j < m$ *das gleiche Vorzeichen.*

Bemerkung. Für $k = n - 1$, $m = 0$ ist dieser Satz in [1], Hilfsatz 1, bewiesen.

Beweis. Wir setzen zuerst voraus, dass

$$y^{(j)}(x_1) \geqq 0\ , \quad j = 0, 1, \ldots, k - 1\ , \quad \text{und nicht alle zugleich Null sind,} \tag{1}$$

$$y^{(j)}(x_1) = 0\ , \quad j = k + 1, k + 2, \ldots, n - 1\ . \tag{2}$$

Zwei Fälle können jetzt eintreten: a) $y(x)$ hat keine Nullstelle in dem Intervalle (x_1, ∞), d. h. est ist infolge der Relationen (1) $y(x) > 0$ in (x_1, ∞); b) $y(x)$ hat eine Nullstelle in dem Intervalle (x_1, ∞). Wir bezeichnen fortan das Intervall (x_1, ∞) durch J.

a) Es gelte also (1) und (2) und es sei $y(x) > 0$ für alle $x \in (x_1, \infty)$. Weiters sei $\xi \in J$ so, dass $y^{(m)}(\xi) = 0$ ist, $0 < m \leqq n - 1$. Aus der Gleichung (a_1) folgt dann, dass in J $y^{(n)}(x) = - Q(x)\, y(x) \leqq 0$ ist. Das bedeutet, dass $y^{(n-1)}(x)$ in J nicht zunimmt und wegen (2) $y^{(n-1)}(x) < 0$ in J ist. Daraus und aus (2) folgt weiter, dass in J auch $y^{(n-2)}(x) < 0$ ist, und weiter, aus denselben Gründen, dass auf J

$$y^{(n-3)}(x) < 0, \ldots, y^{(k+1)}(x) < 0 \tag{3}$$

ist. Das bedeutet, dass $y^{(j)}(\xi) < 0$, $j = n - 1, n - 2, \ldots, k + 1$ ist. Es muss also $m \leqq k$ sein. $y^{(k)}(x_1)$ ist entweder α) negativ oder β) positiv. Aus (3) folgt, dass $y^{(k)}(x)$ in J abnimmt. Untersuchen wir zuerst den Fall α).

In diesem Falle ist $y^{(k)}(x) < 0$ auf ganz J, also $y^{(k)}(\xi) < 0$. Das bedeutet, dass $m < k$ sein muss. Nehmen wir weiter an, dass $y^{(k-1)}(x_1), \ldots, y^{(p+1)}(x_1)$ Null sind und $y^{(p)}(x_1)$ positiv ist $0 \leq p < k$. Dann sind die Funktionen $y^{(j)}(x)$, $j = k - 1, \ldots, p + 1$, auf J negativ und $y^{(p)}(x)$ nimmt auf J vom positiven Werte $y^{(p)}(x_1)$ an ab. Daraus folgt dann, dass $m \leqq p$ sein muss. $y^{(p)}(x)$ kann nicht auf ganz J positiv bleiben, denn dann wäre wegen (1) $y^{(j)}(x) > 0, j = p - 1, p - 2, \ldots, 1, 0$, was der Voraussetzung widersprechen würde, dass $y^{(m)}(\xi) = 0$, $0 < m \leqq p$, ist. Es muss also eine solche Zahl η_p in J existieren, dass $y^{(p)}(\eta_p) = 0$, $y^{(p)}(x) > 0$ in dem Intervalle (x_1, η_p) und < 0 (η_p, ∞) ist.

Dann aber nimmt $y^{(p-1)}(x)$ in (x_1, η_p) von einem nichtnegativen Werte an zu und in (η_p, ∞) nimmt sie ab. Ist $m = p$, also $\xi = \eta_p$, so folgt leicht aus (1), dass die Funktionen $y^{(j)}(x)$, $j = p - 1, \ldots, 1, 0$, in (x_1, η_p) positiv und wachsend sind und dass $y^{(j)}(\eta_p)$ $j = p - 1, \ldots, 1, 0$, positive Zahlen sind. Ist aber $m < p$, so ergibt sich aus denselben Gründen wie im Falle $y^{(p)}(x)$ die Existenz der Zahlen $\eta_{p-1} < \eta_{p-2} < \ldots < \eta_m = \xi$ so, dass $y^{(j)}(\eta_j) = 0$, $j = p - 1, \ldots, m$, und $y^{(j)}(x)$, $j = p - 1, \ldots, m$, in (x_1, η_j) positiv und in (η_j, ∞) negativ ist. Weiter sind dann die Funktionen $y^{(j)}(x)$, $j = m - 1, \ldots, 1, 0$, positiv und wachsend in (x_1, η_m) und darum die Zahlen $y^{(j)}(\eta_m)$ $j = m - 1, \ldots, 1, 0$, positiv. Dagegen sind die Zahlen $y^{(j)}(\eta_m)$, $j = n - 1, \dots, m + 1$, negativ, da die Funktionen $y^{(j)}(x)$ $j = n - 1, \dots, m + 1$, in (η_{m+1}, ∞) negativ sind. Damit ist unser Satz im Falle α) bewiesen.

Im Falle β) ergibt sich für $y^{(k-1)}(x)$ dieselbe Situation wie im Falle α) für $y^{(p)}(x)$. Weitere Erörterungen sind im Falle β) dieselben wie im Falle α).

b) Es sei ϱ_1 die erste hinter x_1 liegende Nullstelle von $y(x)$. Wir können die Erörterungen des Falles a) für $m = 0$ ohne weiteres durchführen, wenn wir das Intervall J durch das Intervall (x_1, ϱ_1) ersetzen. Wir erhalten das Resultat, dass $y(\varrho_1) = 0$ ist, alle $y^{(j)}(\varrho_1) \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, n - 1$, sind und dasselbe Vorzeichen haben. Die Lösung $y(x)$ hat also in ϱ_1 diejenige Eigenschaft, die wir für sie in x_1 postulierten, wenn $k = n - 1$ ist. Aus dieser Tatsache ergibt sich in analoger Weise: sind $\varrho_2 < \varrho_3 < \varrho_\nu < \dots$ der Reihe nach die weiteren Nullstellen von $y(x)$, so sind die Zahlen $y^{(j)}(\varrho_\nu) \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, n - 1$, und haben dasselbe Vorzeichen. Damit ist unser Satz für $m = 0$ vollkommen bewiesen.

Nehmen wir jetzt an, dass $0 < m \leq n - 1$ ist. Die Zahl ξ möge dann im Intervalle (x_1, ϱ_1), oder im Intervalle $(\varrho_\nu, \varrho_{\nu+1})$ oder, wenn ϱ_N die letzte Nullstelle von $y(x)$ ist, im Intervalle (ϱ_N, ∞) liegen. In jedem dieser Fälle gelangen wir mit ähnlichen Erwägungen wie im Falle a) zu demselben Resultat.

Wenden wir uns jetzt dem Falle zu, dass

$$y^{(j)}(x_1) = 0\,, \quad j = 0, 1, \dots, k - 1, k + 1, \dots, n - 1\,, \quad y^{(k)}(x_1) \neq 0, \qquad (2')$$
$$0 \leq k \leq n - 1$$

ist. Nehmen wir an, dass $y^{(k)}(x_1) > 0$ ist. Dann ist $y(x) > 0$ auf J im Falle a) und in dem Intervalle (x_1, ϱ_1) im Falle b). In beiden Fällen gibt es ein Intervall (x_1, τ), $x_1 < \tau < \varrho_1$, in welchem $y^{(j)}(x) > 0$, $j = 0, 1, \dots, k$ ist. Aus den Bedingungen für $Q(x)$ und aus (2′) geht weiter hervor, dass auf J (im Falle b) in dem Intervalle $(x_1, \varrho_1\rangle$) $y^{(j)}(x) < 0$, $j = n - 1, \dots, k + 1$, ist. Es sei nun ξ ein beliebiger Punkt aus J (aus $(x_1, \varrho_1\rangle$). Nehmen wir an, dass für die Zahlen r, s, $0 \leq r < s \leq k$, $y^{(r)}(\xi) = y^{(s)}(\xi) = 0$ ist. Berücksichtigen wir die Bedingungen (2′) und wenden den Satz von Rolle mehrmals an, so ergibt sich, dass $y^{(k+1)}(x)$ auf J (auf $(x_1, \varrho_1\rangle$) wenigstens einmal verschwindet. Das ist aber ein Widerspruch. Im Punkte ξ kann also nur eine einzige von den Funktionen $y^{(j)}(x)$, $j = 0, 1, \dots, k$, Null sein. Es sei $y^{(m)}(\xi) = 0$, $0 \leq m \leq k$. Da auf J (auf $(x_1, \varrho_1\rangle$) die Funktionen $y^{(j)}(x)$, $j = n - 1, \dots, k + 1$, negativ sind, so auch die Zahlen $y^{(j)}(\xi) < 0$, $j = n - 1, \dots, k + 1$. Nehmen wir an, dass für irgendein i, $m < i \leq k$, $y^{(i)}(\xi) > 0$ ist. Dann hat die Funktion $y^{(i)}(x)$ in dem Intervalle (x_1, ξ) keine oder eine gerade Zahl von Nullstellen. Wäre nun $y^{(i)}(x) > 0$ in (x_1, ξ), so wären die Funktionen $y^{(j)}(x)$, $j = i - 1, \dots, 1, 0$, auf (x_1, ξ) wachsend und positiv. Es wäre also $y^{(m)}(\xi) \neq 0$. Die Funktion $y^{(i)}(x)$ muss also in (x_1, ξ) wenigstens zwei Nullstellen besitzen. Berücksichtigt man dann wieder die Bedingungen (2′) und wendet mehrmals den Satz von Rolle an, so ergibt sich ein Widerspruch, nämlich, dass $y^{(k+1)}(x)$ in dem Intervalle (x_1, ξ) verschwindet. Ähnlich kommt man zu demselben Widerspruch, wenn man voraussetzt, dass für irgendein i, $0 \leq i < m$, $y^{(i)}(\xi) < 0$ ist. Diese Widersprüche beweisen, dass $y^{(j)}(\xi) < 0$, $k = n - 1, \ldots, m + 1$, und dass $y^{(j)}(\xi) >$ > 0, $j = m - 1, \ldots, 1, 0$, ist.

Damit ist unser Satz im Falle a) vollkommen bewiesen. Im Falle b) ist er für das Intervall $(x_1, \varrho_1\rangle$ bewiesen. Da $y(x)$ in ϱ_1 verschwindet, so ist nach dem gerade Bewiesenen $y^{(j)}(\varrho_1) < 0$, $j = 1, 2, \ldots, n - 1$. In ϱ_1 erfüllt die Lösung $y(x)$ diejenigen Bedingungen, unter welchen unser Satz in dem ersten Teil des Beweises bewiesen wurde. Daraus folgt, dass unser Satz auch in dem Intervalle (ϱ_1, ∞) gilt.

Satz 1.2. *Seien die Voraussetzungen des Satzes* 1.1 *für die Gleichung* (a_1) *erfüllt. Es sei weiter n eine gerade natürliche Zahl und es sei $y(x)$ eine eigentliche Lösung von* (a_1), *die die Bedingungen*

$$y^{(j)}(x_1) = 0\ , \quad j = 0, 1, \ldots, i - 1, 1 + k, \ldots, k - 1, k + 1, \ldots, n - 1\ , \\ 0 \leqq i < k \leqq n - 1\ , \tag{4}$$

erfüllt. Dann ist in jedem Punkte $\xi \in (-\infty, \infty)$, $\xi \neq x_1$, höchstens eine der Funktionen $y^{(j)}(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n - 1$, gleich Null. Ist zum Beispiel $y^{(m)}(\xi) = 0$, $0 \leqq m \leqq n - 1$, so ist $y^{(j)}(\xi) \neq 0$, $j = 0, 1, \ldots, m - 1, m + 1, \ldots, n - 1$, und wenn $\xi > x_1$ ist, so haben die Zahlen $y^{(j)}(\xi)$ für $j > m$, wie auch die für $j < m$, dasgleiche Vorzeichen; wenn $\xi < x_1$, so ist $\operatorname{sgn} y^{(j)}(\xi) \neq \operatorname{sgn} y^{(j+1)}(\xi)$ *für $j > m$ und auch* $\operatorname{sgn} y^{(j-1)}(\xi) \neq \operatorname{sgn} y^{(j)}(\xi)$ *für $j < m$.*

Beweis. Für $\xi > x_1$ beweist die Behauptung der Satz 1.1. Wir beweisen die Behauptung für $\xi < x_1$. Zu diesem Zwecke führen wir in die Gleichung (a_1) neue Veränderliche t durch die Transformation $x = x_1 - t$ ein. Es ist dann

$$\frac{\mathrm{d}^j y}{\mathrm{d}x^j} = (-1)^j \frac{\mathrm{d}^j y}{\mathrm{d}t^j}\ . \tag{5}$$

Die Gleichung (a_1) geht dann in die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + Q^*(t)\, y = 0 \tag{a_1^*}$$

über, wo $Q^*(t) = Q(x_1 - t)$ ist. Die Anfangsbedingungen (4) gehen in die Bedingungen

$$z(0) = z'(0) = \ldots = z^{(i-1)}(0) = z^{(i+1)}(0) = \ldots = z^{(k-1)}(0) = z^{k+1}(0) = \ldots \\ \ldots = z^{(n-1)}(0) = 0 \tag{4'}$$

über, wo $z(t) = y(x_1 - t)$ ist. Es ist weiter $\varrho_{-\nu} = x_1 - t_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, und $t_\nu > 0$ wegen $\varrho_{-\nu} < x_1$. Für die Lösung $z(t)$ gilt jetzt der Satz 1.1. Wenn wir dann die Transformation $x = x_1 - t$ und die Relation (5) im Betracht ziehen, haben wir den Beweis unseres Satzes für $\xi < x_1$ erbracht.

Satz 1.3. *Es seien die Bedingungen des Satzes* 1.1 *für* $Q(x)$ *erfüllt. Es sei weiter* n *eine ungerade natürliche Zahl und es sei* $y(x)$ *eine eigentliche Lösung von* (a_1), *die die Bedingungen*

$$y^{(j)}(x_1) = 0\,, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n-1, 0 \leqq k \leqq n-1, \qquad (6)$$

erfüllt. Dann hat $y^{(j)}(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, *keine Nullstelle vor* x_1 *und es ist* $|\lim_{x \to -\infty} y^{(j)}(x)| = \infty$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. *Auf dem Intervalle* (x_1, ∞) *hat* $y^{(j)}(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, *die im Satz* 1.1 *angeführten Eigenschaften.*

Beweis. Die Behauptung für das Intervall (x_1, ∞) ist evident. Wir beweisen zuerst, dass $y(x)$ keine vor x_1 liegende Nullstelle hat. Nehmen wir das Gegenteil an. Es sei ϱ_{-1} die erste vor x_1 liegende Nullstelle von $y(x)$. Durch die Transformation $x = x_1 - t$ geht die Gleichung (a_1) in die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} - Q^*(t)\, y = 0 \qquad (\mathrm{a}_1^*)$$

über, wo $Q^*(t) = Q(x_1 - t) \geqq 0$ für $t \in (-\infty, \infty)$ ist. Die Bedingungen (6) gehen in Folgende über:

$$z^{(j)}(0) = 0\,, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n-1\,, \quad 0 \leqq k \leqq n-1\,. \qquad (6')$$

Die Nullstelle ϱ_{-1} geht in $t_1 = x_1 - \varrho_{-1} > 0$ über, wo t_1 die erste positive Nullstelle von $z(t)$ ist. Nehmen wir jetzt an, dass $z^{(k)}(0) > 0$ ist. Wäre $z^{(k)}(0) < 0$, so untersuchten wir die Lösung $-z(t)$. In $(0, t_1)$ ist also $z(t) > 0$ und auch $\dfrac{\mathrm{d}^n z}{\mathrm{d}t^n} = Q^*(t)\, y \geqq 0$. Wegen der Bedingungen (6') ist dann auf dem Intervalle $(0, t_1)$ $z^{(n-1)}(t) > 0, \ldots, z^{(k+1)}(t) > 0$ und weil $z^{(k)}(0) > 0$ vorausgesetzt ist, ist auch $z^{(k)}(t) > 0$. Dann aber sind wegen (6') auch alle $z^{(j)}(t)$ auf dem Intervalle $(0, t_1)$ $j = k-1, k-2, \ldots, 1, 0$, positiv. Es ist also $z'(t) > 0$ für alle $t \in (0, t_1)$; das bedeutet, dass $z(t)$ auf $(0, t_1)$ zunimmt, woraus $z(t_1) > 0$ folgt. Das steht aber im Widerspruch mit der Voraussetzung $z(t_1) = 0$. Nehmen wir jetzt an, dass $y^{(m)}(\xi) = 0$, $\xi < x_1$, $0 < m \leqq n-1$, also dass $z^{(m)}(t^*) = 0$, $t^* = x_1 - \xi$ ist. Da bereits bewiesen wurde, dass $z(t) > 0$ auf dem Intervalle $(0, \infty)$ ist, ist dort $z^{(n)}(t) \geqq 0$ und es sind wegen (6') auch alle $z^{(j)}(t)$, $j = n-1, \ldots, 1, 0$, positiv; das bedeutet weiter, dass sie steigende Funktionen sind. Aus dieser Tatsache folgt, dass

$$0 < z^{(j+1)}(\alpha) < z^{(j+1)}(t) \quad \text{für} \quad 0 < \alpha < t$$

ist, woraus weiter hervorgeht, dass

$$z^{(j+1)}(\alpha)(t - \alpha) \leqq z^{(j)}(t) - z^{(j)}(\alpha)$$

und weiter

$$\lim_{t \to \infty} z^{(j)}(t) = \infty\,, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1\,,$$

ist. Berücksichtigen wir dann (5), so haben wir $|\lim_{x \to -\infty} y^{(j)}(x)| = \infty$, w. z. b. w.

In analoger Weise beweist man den

Satzt 1.3'. *Es sei n eine natürliche ungerade Zahl und es sei $u(x)$ eine eigentliche Lösung von* (a_1), *die die folgenden Bedingungen erfüllt*: $u^{(j)}(x_1) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n-1$, $0 \leqq i < k \leqq n-1$, *und*

a) *ist $i + k$ eine gerade Zahl, so sei* $u^{(i)}(x_1) \neq 0$, $u^{(k)}(x_1) \neq 0$, $\operatorname{sgn} u^{(i)}(x_1) = \operatorname{sgn} u^{(k)}(x_1)$;

b) *ist $i + k$ eine ungerade Zahl, so sei* $u^{(i)}(x_1) \neq 0$, $u^{(k)}(x_1) \neq 0$, $\operatorname{sgn} u^{(i)}(x_1) \neq \operatorname{sgn} u^{(k)}(x_1)$.

Dann liegt keine Nullstelle von $u^{(j)}(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, *vor* x_1 *und es ist* $|\lim\limits_{x \to -\infty} u^{(j)}(x)| = \infty$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Betrachten wir jetzt die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + y = 0\,. \tag{b}$$

Es sei $y_k(x)$ die Lösung von (b), die durch die Bedingungen

$$\begin{gathered} y_k^{(j)}(0) = 0\,, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n-1\,, \\ y_k^{(k)}(0) = 1\,, \quad 0 \leqq k \leqq n-1\,, \end{gathered} \tag{7}$$

bestimmt ist. Wir bezeichnen die erste positive Nullstelle von $y_k(x)$ durch p_{nk}, die erste negative, wenn n gerade ist, durch $\bar{p}_{nk}$.

Satz 1.4. *Es ist*

$$\bar{p}_{n,n-1} < \bar{p}_{n,n-2} < \ldots < \bar{p}_{n,0} < 0 < p_{n,0} < p_{n,n-2} < p_{n,n-1} \tag{8}$$

und

$$p_{n,k} = -\bar{p}_{n,k}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,. \tag{9}$$

Beweis. Für $y_k(x)$ gilt die Relation $y_k(x) = y_{n-1}^{(n-k-1)}(x)$. Wenden wir jetzt den Satz von Rolle auf $y_{n-1}(x)$ und auf weitere Ableitungen von $y_{n-1}(x)$ an und berücksichtigen die obere Relation, so haben wir (8) (s. [1], Zusatz). Sei nun n gerade. Die Transformation $x = -t$ lässt die Gleichung (b) unverändert. Wenn k gerade ist, dann bleiben bei dieser Transformation auch die Bedingungen (7) unverändert, wenn dagegen k ungerade ist, so geht die Bedingung $x_k^{(k)}(0) = 1$ in die Bedingung $\left[\dfrac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k}\right]_{t=0} = -1$ über, und alle übrigen Bedingungen bleiben unverändert. Bezeichnen wir durch $u_k(t)$ diejenige Lösung der transformierten Gleichung, die durch die transformierten Bedingungen bestimmt ist. Es ist jetzt leicht zu sehen, dass im Falle gerader k $u_k(x) = y_k(x)$, im Falle ungerader k $u_k(x) = -y_k(x)$ ist. Dabei haben wir die Veränderliche t in $u_k(t)$ durch x ersetzt. Das beweist die Relation (9).

Satzt 1.5. *Es sei* $0 < M_1 \leqq Q(x) \leqq M_2$ *für* $x \in (-\infty, \infty)$ *und es sei* $x_1 \in (-\infty, \infty)$.

a) *Es sei $y(x)$ eine eigentliche Lösung der Gleichung* (a_1), *die die folgenden Bedingungen erfüllt*:

die Zahlen $y^{(j)}(x_1)$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, *haben das gleiche Vorzeichen,* $y^{(i)}(x_1) = 0$, $j = k+1, k+2, \ldots, n-1$.

Bedeutet ϱ_ν *die* ν*-te hinter* x_1 *liegende Nullstelle von* $y(x)$, *so ist*

$$\frac{p_{n,1}}{\sqrt[n]{M_2}} < \varrho_{\nu+1} - \varrho_\nu < \frac{p_{n,n-1}}{\sqrt[n]{M_1}}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots \tag{10}$$

b) *Es sei* $y(x)$ *eine eigentliche Lösung von* (a_1), *die die Bedingungen*

$$y^{(j)}(x_1) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n-1,$$
$$0 \leqq i < k \leqq n-1,$$

erfüllt. Ist n *eine ungerade Zahl und bedeutet* ϱ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, *die* ν*-te hinter* x_1 *liegende Nullstelle von* $y(x)$, *so gilt* (10) *und ausserdem noch*

$$0 < \varrho_1 - x_1 \leqq \frac{p_{n,k}}{\sqrt[n]{M_1}} < \frac{p_{n,n-1}}{\sqrt[n]{M_1}}. \tag{11}$$

Ist n *eine gerade Zahl und bedeutet* ϱ_ν *die* ν*-te hinter* x_1 *(vor* x_1, *wenn* $\nu < 0$ *ist) liegende Nullstelle von* $y(x)$, *so gilt*

$$\frac{p_{n,1}}{\sqrt[n]{M_2}} < \varrho_{\nu+1} - \varrho_\nu < \frac{p_{n,n-1}}{\sqrt[n]{M_1}}, \quad \nu = 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \tag{10'}$$

und

$$0 \leqq \varrho_1 - x_1 \leqq \frac{p_{n,k}}{\sqrt[n]{M_1}}, \quad 0 \leqq x_1 - \varrho_{-1} \leqq \frac{p_{n,k}}{\sqrt[n]{M_1}}. \tag{11'}$$

c) *Es sei* $u(x)$ *eine eigentliche Lösung von* (a_1), *die die Bedingungen*

$$u^{(j)}(x_1) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n-1, \quad 0 \leqq k \leqq n-1,$$

erfüllt. Dann gelten für die Nullstellen von $u(x)$ *die Relation* (10), *(eventuell* (10'), *wenn* n *gerade ist) und die Relation*

$$\left(\frac{p_{n,1}}{\sqrt[n]{M_2}} <\right) \frac{p_{n,k}}{\sqrt[n]{M_2}} \leqq \varrho_1 - x_1 \leqq \frac{p_{n,k}}{\sqrt[n]{M_1}} \left(< \frac{p_{n,n-1}}{\sqrt[n]{M_2}}\right) \tag{12}$$

und, wenn n *gerade ist noch die Relation*

$$\left(\frac{p_{n,1}}{\sqrt[n]{M_2}} <\right) \frac{p_{n,k}}{\sqrt[n]{M_2}} \leqq x_1 - \varrho_{-1} \leqq \frac{p_{n,k}}{\sqrt[n]{M_1}} \left(< \frac{p_{n,n-1}}{\sqrt[n]{M_1}}\right). \tag{12'}$$

Den Beweis dieses Satzes führt man analog wie den der Hilfssätze 2 und 3 in [1] durch, nur muss man im Falle der Nullstellen, die vor x_1 liegen, zuerst die Transformation $t = x_1 - x$ durchführen.

Wir bezeichnen im Weiteren durch M_{ik} *die Menge der Lösungen von* (a_1), die die Bedingungen

$$y^{(j)}(x_1) = 0\,, \quad j = 0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n-1\,, \quad (13)$$
$$0 \leqq i < k \leqq n-1\,,$$

erfüllen. Wir führen jetzt einige Eigenschaften dieser Lösungen ein:

Satz 1.6. *Seien $u_1(x)$, $u_2(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen aus M_{ik}. Dann lässt sich jede Lösung aus M_{ik} als eine lineare Kombination von $u_1(x)$ und $u_2(x)$ darstellen.*

Satz 1.7. *Es sei $y_1(x)$, $y_2(x)$ ein linear unabhängiges Paar von Lösungen aus M_{ik}. Die Funktion $A_{ik}(x) = y_1'(x) \,.\, y_2(x) - y_1(x) \,.\, y_2'(x)$ hat die folgenden Eigenschaften:*

a) *Ist $u_1(x)$, $u_2(x)$ ein linear unabhängiges Paar von Lösungen aus M_{ik}, so ist $u_1'(x) \,.\, u_2(x) - u_1(x) \,.\, u_2'(x) = cA_{ik}(x)$, wo c eine von Null verschiedene Konstante ist.*

b) *Ist n gerade, so ist $A_{ik}(x) \neq 0$ für alle $x \neq x_1$. Ist n ungerade, so ist $A_{ik}(x) \neq 0$ für alle $x > x_1$.*

c) *x_1 ist eine $(i + k - 1)$-fache Nullstelle von $A_{ik}(x)$. Man kann es immer so einrichten, dass $A_{ik}(x) > 0$ für alle $x \neq x_1$, wenn n gerade ist und $i + k$ ungerade ist. Ist n, sowie $i + k$ gerade, so kann man $A_{ik}(x)$ so bestimmen, dass $A_{ik}(x) \gtrless 0$ für $x \gtrless x_1$ ist. Ist n ungerade, so bestimmt man $A_{ik}(x)$ so, dass $A_{ik}(x) > 0$ für $x > x_1$ ist.*

d) *Ist die Funktion $A_{ik}(x)$ so bestimmt, wie sub* c) *gesagt wurde, dann ist sie eine stetige steigende positive Funktion für $x \in (x_1, \infty)$, d. h. $A_{ik}'(x) > 0$ für $x \in (x_1, \infty)$.*

Beweis. a) Die Behauptung folgt aus der Tatsache, dass jede Lösung aus M_{ik} sich als eine lineare Kombination von $y_1(x)$ und $y_2(x)$ schreiben lässt.

b) Es sei n gerade und es sei für irgendeine Zahl $\xi \neq x_1$, $A_{ik}(\xi) = 0$. Es sei weiter $u_1(x)$, $u_2(x)$ ein linear unabhängiges Paar von Lösungen aus M_{ik}. Dann ist es möglich aus dem System

$$c_1 \,.\, u_1(\xi) + c_2 \,.\, u_2(\xi) = 0\,,$$
$$c_1 \,.\, u_1'(\xi) + c_2 \,.\, u_2'(\xi) = 0\,,$$

die Konstanten c_1, c_2 so zu bestimmen, dass die Funktion $y = c_1u_1 + c_2u_2$ eine eigentliche Lösung aus M_{ik} ist, die in ξ eine zweifache Nullstelle hat. Das widerspricht aber dem Satz 1.2. Ist n eine ungerade Zahl, so gelangt man nach dem Satze 1.1 für jede $\xi > x_1$ zum Widerspruch.

c) Es sei $v_1(x) \in M_{ik}$, $v_1^{(i)}(x_1) = 0$, $v_1^{(k)}(x_1) \neq 0$, $v_2(x) \in M_{ik}$, $v_2^{(i)}(x_1) \neq 0$. x_1 ist also eine k-fache Nullstelle von $v_1(x)$ und eine i-fache Nullstelle von $v_2(x)$. Offenbar sind $v_1(x)$ und $v_2(x)$ linear unabhängig; es ist also $v_1'(x) \,.\, v_2(x) - v_1(x) \,.\, v_2'(x) = c \,.\, A_{ik}(x)$, wo c eine passende Konstante ist, die von Null verschieden ist. Aus den Bedingungen für $v_1(x)$ und $v_2(x)$ ist leicht zu ersehen, dass x_1 wenigstens eine $(i + k - 1)$-fache Nullstelle von $A_{ik}(x)$ ist. Wir zeigen, das

x_1 nicht mehr als eine $(i + k - 1)$-fache Nullstelle von $A_{ik}(x)$ ist. Ist sie zum Beispiel eine $(i + k)$-fache Nullstelle von $A_{ik}(x)$, so existiert ein eigentlicher Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{A_{ik}(x)}{(x - x_1)^{i+k}}$. Es ist aber

$$\frac{c \,.\, A_{ik}}{(x - x_1)^{i+k}} = \frac{v_1'(x) \,.\, v_2(x) - v_1(x) \,.\, v_2'(x)}{(x - x_1)^{i+k}} =$$

$$= \frac{1}{(x - x_1)} \left[\frac{v_1'(x)}{(x - x_1)^{k-1}} \cdot \frac{v_2(x)}{(x - x_1)^{i}} - \frac{v_1(x)}{(x - x_1)^{k}} \cdot \frac{v_2'(x)}{(x - x_1)^{i-1}} \right]$$

und

$$\lim_{x \to x_1} \left[\frac{v_1'(x)}{(x - x_1)^{k-1}} \cdot \frac{v_2(x)}{(x - x_1)^{i}} - \frac{v_1(x)}{(x - x_1)^{k}} \cdot \frac{v_2'(x)}{(x - x_1)^{i-1}} \right] =$$

$$= \frac{k - i}{i!k!} v_1^{(k)}(x_1) \,.\, v_2^{(i)}(x_1) \neq 0 \,.$$

Das bedeutet aber, dass der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_1} \frac{c \,.\, A_{ik}}{(x - x_1)^{i+k}}$$

nicht eigentlich sein kann. Dieser Widerspruch beweist schon unsere Behauptung über die Vielfachheit der Nullstelle x_1 von $A_{ik}(x)$. Die weitere Behauptung sub c) ist evident.

d) Es seien nun $u(x)$ und $v(x)$ zwei solche Lösungen aus M_{ik}, dass $u(x) \,.\, v'(x) - u'(x)\, v(x) = A_{ik}(x)$ ist. Die Stetigkeit von $A_{ik}(x)$ wie auch die von $A'_{ik}(x)$ ist evident. Es sei $\eta > x_1$ eine Nullstelle von $v(x)$. Da $A_{ik}(x) > 0$ für $x > x_1$ ist, so ist $A_{ik}(\eta) = u(\eta) .\, v'(\eta) > 0$, also $\operatorname{sgn} u(\eta) = \operatorname{sgn} v'(\eta)$. Nach dem Satze 1.1 ist dann $\operatorname{sgn} u(\eta) = \operatorname{sgn} v'(\eta) = \operatorname{sgn} v''(\eta)$. Es ist dann aber $A'_{ik}(\eta) = u(\eta)\, v''(\eta) > 0$. Nun ist aber $A'_{ik}(x) > 0$ für alle $x \in (x_1, \infty)$. Wäre nämlich $A'_{ik}(\tau) = 0$, wo τ irgendeine Zahl aus (x_1, ∞) ist, so würde in M_{ik} eine Lösung $y(x)$ existieren, die in τ die Bedingungen $y(\tau) = y''(\tau) = 0$ erfüllen würde, was dem Satze 1.1 widerspricht.

Die unmittelbare Folgerung der Sätze 1.6 und 1.7 ist der

Satz 1.8. *Die Menge M_{ik} der Lösungen von* (a_1) *bildet ein lineares System von Lösungen einer gewissen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und zwar*

$$\left(\frac{y'}{A_{ik}(x)}\right)' + \frac{B_{ik}(x)}{A_{ik}^2(x)}\, y = 0\,,$$

wo $B_{ik}(x) = u_1''(x)\, u_2'(x) - u_1'(x)\, u_2''(x)$ und $A_{ik}(x) = u_1'(x)\, u_2(x) - u_1(x)\, u_2'(x)$ ist. $u_1(x)$, $u_2(x)$ *sind linear unabhängige Lösungen aus* M_{ik}.

Beweis. Man beweist diesen Satz, wenn man die Konstanten c_1 und c_2 aus $y = c_1 u_1 + c_2 u_2$ und aus den zwei ersten Ableitungen von y eliminiert und bei der Umformung die Definition der Funktion $A_{ik}(x)$ benutzt. Aus dem Satz 1.2 folgt, dass $B_{ik}(x) \neq 0$ für $x \in (x_1, \infty)$ ist.

Wir führen jetzt eine neue Bezeichnung ein und zwar, wir bezeichnen *die Menge* M_{ik} *durch* $\overline{M}_{ik}$, *wenn* $i + k$ *eine ungerade Zahl ist*, und *durch* $\overline{\overline{M}}_{ik}$, *wenn* $i + k$ *eine gerade Zahl ist. Ausserdem treffen wir folgende Verabredung*:

(**D**) *Wir werden nur dann sagen, dass* x_1 *eine Nullstelle der Lösung* $y(x)$ *aus* M_{ik} *ist, wenn* $y^{(i)}(x_1) = 0$.

Dann können wir folgenden Satz aussprechen:

Satz 1.9. a) *Es sei n eine gerade Zahl. Für die Lösungen aus* $\overline{M}_{ik}$ *gilt dann der Trennungssatz über die Nullstellen im ganzen Intervalle* $(-\infty, \infty)$; *für die aus* $\overline{\overline{M}}_{ik}$ *gilt er im Intervalle* $(-\infty, x_1)$ *und auch im Intervalle* (x_1, ∞).

b) *Es sei n eine ungerade Zahl. Dann gilt der Trennungssatz über die Nullstellen für alle Lösungen aus* M_{ik} *auf dem Intervalle* (x_1, ∞).

c) *Ist* $y(x) \in M_{ik}$ *die Lösung, die* x_1 *zur Nullstelle hat (im Sinne der Verabredung* **D**), *so liegt zwischen je zwei nacheinanderfolgenden Nullstellen von* $y(x)$ *genau eine Nullstelle jeder andern von* $y(x)$ *linear unabhängigen Lösung aus* M_{ik}.

Den Beweis führt man auf Grund der Eigenschaften der Funktion $A_{ik}(x)$ durch, indem man die Funktion $\frac{u_1}{u_2}$, eventuell $\frac{u_2}{u_1}$, $u_1, u_2 \in M_{ik}$, untersucht. Weiter ist leicht zu ersehen:

Satz 1.10. *Es sei* $x_2 \in (-\infty, \infty)$. *Dann sind je zwei Lösungen aus* M_{ik}, *die* x_2 *zur Nullstelle haben, linear abhängig.*

Satz 1.11. *Es sei n eine ungerade Zahl. Sind* $u_1(x)$, $u_2(x)$ *zwei linear unabhängige Lösungen aus* M_{ik}, *so liegt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen, die kleiner als* x_1 *sind, der einen Lösung keine oder eine gerade Zahl von Nullstellen der anderen Lösung; dabei wird jede Nullstelle für soviel Nullstellen gezählt, wieviel ihre Vielfachheit beträgt.*

Beweis. Es seien $\xi_1 < \xi_2 < x_1$ zwei aufeinanderfolgende Nullstellen der Lösung $u_1(x)$. Wegen der linearen Unabhängigkeit u_1 und u_2 sind ξ_1, ξ_2 keine Nullstellen von $u_2(x)$. Es liege zwischen ξ_1 und ξ_2 eine ungerade Zahl von Nullstellen von $u_2(x)$, jede Nullstelle in ihrer Vielfachheit gezählt. Dann ist

$$\operatorname{sgn} u_2(\xi_1) \neq \operatorname{sgn} u_2(\xi_2)\,. \tag{14}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $u_1(x)$ und $u_2(x)$ kann man solche Konstanten c_1, c_2 bestimmen, dass $v(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$, $v^{(i)}(x_1) = 0$ ist. Es ist dann $v(\xi_1) = c_2u_2(\xi_1)$, $v(\xi_2) = c_2u_2(\xi_2)$ und mit Berücksichtigung von (14) weiter $\operatorname{sgn} v(\xi_1) \neq \operatorname{sgn} v(\xi_2)$. Das bedeutet, dass $v(x)$ eine Nullstelle zwischen ξ_1 und ξ_2 hat. Das widerspricht aber dem Satze 1.3. Dieser Widerspruch beweist unseren Satz.

Satz 1.12. *Es sei n eine ungerade Zahl. Es sei weiter $y(x) \in M_{ik}$. Dann liegt zwischen je zwei Nullstellen von $y(x)$, die vor x_1 liegen, eine ungerade Zahl von Nullstellen von $A_{ik}(x)$.*

Dieser Satz folgt aus dem Satze 1.11 und aus dem bekannten verallgemeinerten Trennungssatz der Nullstellen (s. Kamke, Lösungsmethoden, 17.3).

2. Die Zentraldispersionen

In diesem Paragraphen nehmen wir an, dass *n eine gerade Zahl ist, $n = 2k \geq 4$,* und *$Q(x, \lambda)$ eine in dem Bereiche $(-\infty < x < \infty)(\Delta_0 < \lambda < \Delta_1)$ stetige positive Funktion der Veränderlichen x, λ ist.* Weiter nehmen wir an, dass die Lösungen aus M_{ik} sämtlich oszillatorisch sind. Unter diesen Bedingungen kann man leicht ersehen, dass Borůvka's Theorie der Dispersionen ohne weiteres auf die Lösungen der Menge M_{ik} übertragen werden kann [2].

Für unsereZwecke genügt es, sich mit den Zentraldispersionen zu beschäftigen. Sie sind folgendermassen definiert:

Definition 2.1. *Es sei $y(x) \in M_{ik}$ eine Lösung, die x zur Nullstelle hat. Der Wert der Zentraldispersion $\varphi_\nu^{(ik)}(x)$ des Index ν in x ist der ν-te nach x liegenden Nullstelle der Lösung $y(x)$ gleich (ist $\nu < 0$, so handelt es sich um die ν-te vor x liegende Nullstelle von $y(x)$).*

Mittels des Trennungssatzes (Satz 1.9) zeigt man folgende Eigenschaften der Zentraldispersionen (für $n = 2$ *s.* [2], für $n = 4$ *s.* [3]):

Satz 2.1. *Es sei $M_{ik} = \overline{M}_{ik}$. Die Zentraldispersion ist steigend und stetig auf dem Intervalle $(-\infty, \infty)$ und hat eine eigentliche stetige erste Abteilung für alle $x \in (-\infty, \infty)$, mit Ausnahme von x_1, wenn $i \neq 0$, und mit Ausnahme solcher x, für welche $\varphi_\nu^{(ik)}(x) = x_1$, wenn $ik \neq 01$,* in *welchen Fällen diese Ableitung uneigentlich sein kann. Dort, wo $\varphi_\nu'^{(ik)}(x)$ eigentlich und stetig ist, ist sie durch die Formel gegeben:*

$$\varphi_\nu'^{(ik)}(x) = \frac{A_{ik}(x)}{A_{ik}(\varphi_\nu^{(ik)})} \cdot \frac{u^2(\varphi_\nu'^{(ik)})}{u^2(x)}, \tag{C}$$

wo $u(t)$ irgendeine Lösung aus $\overline{M}_{ik}$ ist, für welche $u(x) \neq 0$ ist. Für die x, welche die oben angeführten Ausnahmefälle bilden, ist

$$\varphi_\nu'^{(ik)}(x) = \lim \frac{A_{ik}(t)}{A_{ik}(\varphi_\nu^{(ik)}(t))} \cdot \frac{u^2(\varphi_\nu^{(ik)}(t))}{u^2(t)} \quad \text{für } t \to x_1, \quad \text{bzw. für } \varphi(t) \to x_1 . \tag{c'}$$

Es sei $M_{ik} = \overline{\overline{M}}_{ik}$. Es sei weiter j eine natürliche Zahl. Dann ist die Zentraldispersion $\varphi_j^{(ik)}(x)$ a) *steigend und stetig auf dem Intervalle $(-\infty, \varphi_j^{(ik)}(x_1))$ und auf dem Intervalle (x_1, ∞);* b) *abnehmend und stetig auf dem Intervalle $(\varphi_{-\nu}^{(ik)}(x_1), \varphi_{-\nu+1}^{(ik)}(x_1))$, $\nu = 1, 2, \ldots, j$,* c) *unstetig (sie macht einen endlichen Sprung) in den Punkten $\varphi_{-\nu}^{(ik)}(x_1)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, j$.*

Die Zentraldispersion $\varphi_{-j}^{(ik)}$ ist

a) *steigend und stetig auf dem Intervalle* $(-\infty, x_1)$ *und auf dem Intervalle* $(\varphi_{-j}^{(ik)}(x_1), \infty)$;

b) *abnehmend und stetig auf dem Intervalle* $(\varphi_{\nu-1}^{(ik)}(x_1), \varphi_{\nu}^{(ik)}(x_1))$, $\nu = 1, 2, \ldots, j$;

c) *unstetig (sie macht einen endlichen Sprung) in den Punkten* $\varphi_{\nu}^{(ik)}(x_1)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, j$.

Dort, wo die Zentraldispersion $\varphi_{\nu}^{(ik)}(x)$ *stetig ist, hat sie eine stetige Ableitung, die durch die Formel* (C) *gegeben ist.*

Hilfsatz 1. *Es seien i und k,* $0 \leq i < k \leq n-1$, *zwei solche ganze Zahlen, dass* $i + k$ *eine ungerade ganze Zahl ist. Es sei weiter t beliebig aus dem Intervalle* $(-\infty, \infty)$ *ausgewählt und es sei* $y(x, \lambda) \in M_{ik}$ *eine solche Lösung, dass* $y(t, \lambda) = 0$ *für alle* $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_1)$. *Es sei* β *eine solche Zahl, dass die Zentraldispersion* $\varphi_{\nu}^{(ik)}(t, \beta) = x_1$ *ist, d. h. dass* $y^{(j)}(x_1, \beta) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n-1$. *Dann existieren die Zahlen* $\delta > 0$, $\eta > 0$ *so, dass in dem Bereich*

$$J\colon\ |\lambda - \beta| < \delta\,,\quad K\colon\ |x - x_1| < \eta$$

durch die Gleichung $y(x, \lambda) = 0$ *eine einzige, eindeutige Funktion* $x = \varphi(\lambda)$, $\lambda \in J$, *definiert ist, die die folgenden Eigenschaften hat: sie ist auf J stetig; für jedes* $\lambda \in J$ *ist* $\varphi(\lambda)$ *eine Nullstelle von* $y(x, \lambda)$ *(man respektiert die Verabredung* **(D)**) *und erfüllt die Relation* $|\varphi(\lambda) - x_1| < \eta$. *Für* $\lambda = \beta$ *ist* $\varphi(\lambda) = \varphi_{\nu}^{(ik)}(t, \beta) = x_1$.

Beweis. Aus der Stetigkeit der Funktion $Q(x, \lambda)$, $x \in (-\infty, \infty)$, $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_1)$, folgt die Stetigkeit in x, λ, $x \in (-\infty, \infty)$, $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_1)$, jeder Lösung der Gleichung $y^{(n)} + Q(x, \lambda)\, y = 0$ und ihrer Ableitungen nach x bis zur n-ten Ordnung.

Es sei nun i eine gerade und k eine ungerade Zahl. Es sei weiter $y^{(k)}(x_1, \beta) > 0$. (Ist $y^{(k)}(x_1, \beta) < 0$, so nehmen wir die Lösung $-y(x, \lambda)$). Aus der Stetigkeit von $y^{(k)}(x, \lambda)$ folgt die Existenz einer solchen Umgebung

$$O_k\colon\quad J_k\colon\ |\lambda - \beta| < \delta_k\,,\quad K_k\colon\ |x - x_1| < \eta_k,\ \delta_k > 0,\ \eta_k > 0\,,$$

dass $y^{(k)}(x, \lambda) > 0$ für $(x, \lambda) \in O_k$ ist. $y^{(k-1)}(x, \lambda)$ ist also auf dem K_k eine steigende Funktion der Veränderlichen x für jedes $\lambda \in J_k$. Da nun $y^{(j)}(x_1, \lambda) = 0$, $j = i+1, \ldots, k-1$, für jedes λ ist, so ergibt sich, dass die Funktionen $y^{(j)}(x, \lambda)$ $j = i, i+1, \ldots, k-1$, für jedes $\lambda \in J_k$ des Intervalls $(x_1 - \eta_k, x_1)$ und auch des Intervalls $(x_1, x_1 + \eta_k)$ streng monotone Funktionen der Veränderlichen x sind und dass in dem Intervalle $(x_1, x_1 + \eta_k)$ $y^{(j)}(x, \lambda) > 0$, $j = i+1, \ldots, k-1$, und in dem Intervalle $(x_1 - \eta_k, x_1)$ $y^{(j)}(x, \lambda) \gtreqless 0$, $j = i+1, \ldots, k-1$, wenn $j \begin{Bmatrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{Bmatrix}$ ist. Da i gerade ist, ist $y^{(i+1)}(x, \lambda) > 0$ in dem Intervalle $(x_1, x_1 + \eta_k)$ und auch in dem Intervalle $(x_1 - \eta_k, x_1)$. $y^{(i)}(x, \lambda)$ ist also eine auf K_k steigende Funktion der Veränderlichen x. Da nun $y^{(j)}(x_1, \beta) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, ist, so ergibt sich weiter, dass die Funktionen $y^{(j)}(x, \beta)$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, in dem Intervalle $(x_1 - \eta_k, x_1)$ und auch in dem Intervalle $(x_1, x_1 + \eta_k)$ streng monotone Funktionen der Veränderlichen x sind und weiter dass in dem Intervalle $(x_1, x_1 + \eta_k)$ $y^{(j)}(x, \beta) > 0$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, und in dem Intervalle $(x_1 - \eta_k, x_1)$ $y^{(j)}(x, \beta) \gtrless 0$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, wenn $j \left\{\begin{matrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{matrix}\right\}$ ist.

Es sei $\varepsilon > 0$ eine beliebig gewählte kleine Zahl, $\varepsilon < \eta_k$. Dann existiert für jede Funktion $y^{(j)}(x, \lambda)$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, eine Umgebung O'_j des Punktes $(x_1 - \varepsilon, \beta)$:

$$O'_j\colon \quad J'_j\colon |\lambda - \beta| < \delta'_j\,, \quad K'_j\colon |x - x_1 + \varepsilon| < \eta'_j\,, \quad \delta'_j > 0\,, \quad \eta'_j > 0\,,$$

in welcher $y^{(j)}(x, \lambda) \gtrless 0$ ist, wenn $j \left\{\begin{matrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{matrix}\right\}$ ist.

Analog gibt es für jede Funktion $y^{(j)}(x, \lambda)$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, eine Umgebung O''_j des Punktes $(x_1 + \varepsilon, \beta)$:

$$O''_j\colon \quad J''_j\colon \quad |\lambda - \beta| < \delta''_j\,, \quad K''_j\colon \quad |x - x_1 - \varepsilon| < \eta''_j\,, \quad \delta''_j > 0\,, \quad \eta''_j > 0\,,$$

in welcher $y^{(j)}(x, \lambda) > 0$ ist. Die Zahlen η'_j, η''_j nehmen wir kleiner oder gleich η_k. Setzen wir jetzt

$$\delta = \min(\delta'_0, \ldots, \delta'_{k-1}, \delta''_0, \ldots, \delta''_{k-1}, \delta_k)$$

und wählen $\lambda \in |\lambda - \beta| < \delta$ fest. Für $y^{(i)}(x_1, \lambda)$ können drei Fälle eintreten: a) $y^{(i)}(x_1, \lambda) > 0$, b) $y^{(i)}(x_1, \lambda) < 0$, c) $y^{(i)}(x_1, \lambda) = 0$.

a) Da $y^{(i)}(x, \lambda)$ auf K_k eine steigende Funktion der Veränderlichen x ist und in dem Intervalle $(x_1 - \varepsilon - \eta'_i, x_1 - \varepsilon + \eta'_i)$ negativ ist, hat sie auf K_k genau eine Nullstelle, die wir durch $\bar{x}_i$ bezeichnen. Diese liegt in dem Intervalle $(x_1 - \varepsilon + \eta'_i, x_1)$. Es ist also auf dem Intervalle $(x_1 - \eta_k, \bar{x}_i)$ $y^{(i)}(x, \lambda) < 0$ und auf dem Intervalle $(\bar{x}_i, x_1 + \eta_k)$ $y^{(i)}(x, \lambda) > 0$. Die Funktion $y^{(i-1)}(x, \lambda)$ nimmt auf dem Intervalle $(x_1 - \eta_k, \bar{x}_i)$ ab und auf dem Intervalle $(\bar{x}_i, x_1 + \eta_k)$ nimmt sie zu. Da aber auf dem Intervalle $(x_1 - \varepsilon - \eta'_{i-1}, x_1 - \varepsilon + \eta'_{i-1})$, $y^{(i-1)}(x, \lambda) > 0$ ist und da ausserdem $y^{(i-1)}(x_1, \lambda) = 0$ ist, muss sie auf dem Intervalle $\langle x_1 - \varepsilon + \eta'_{i-1}, \bar{x}_i)$ eine und zwar eine einzige Nullstelle haben, die wir durch $\bar{x}_{i-1}$ bezeichnen. Auf dem Intervalle $(\bar{x}_i, x_1 + \eta_k)$ hat sie ausser x_1 keine andere Nullstelle. Es ist also $y^{(i-1)}(x, \lambda) > 0$ auf den Intervallen $(x_1 - \eta_k, \bar{x}_{i-1})$, $(x_1, x_1 + \eta_k)$ und $y^{(i-1)}(x, \lambda) < 0$ auf dem Intervalle $(\bar{x}_{i-1}, x_1)$. Die Funktion $y^{(i-2)}(x, \lambda)$ nimmt auf den beiden ersten Intervallen zu und nimmt auf dem Intervalle $(\bar{x}_{i-1}, x_1)$ ab. Da sie auf dem Intervalle $(x_1 - \varepsilon - \eta'_{i-2}, x_1 - \varepsilon + \eta'_{i-2})$ negativ und in dem Punkte x_1 Null ist, muss sie auf dem Intervalle $\langle x_1 - \varepsilon + \eta'_{i-2}, \bar{x}_{i-1})$ eine und zwar eine einzige Nullstelle besitzen. Wir bezeichnen sie durch $\bar{x}_{i-2}$. Auf dem Intervalle $(\bar{x}_{i-1}, x_1 + \eta_k)$ hat sie nur x_1 zur Nullstelle. Es ist

$$x_1 - \eta_k < x_1 - \varepsilon + \eta'_{i-2} \leqq \bar{x}_{i-2} < \bar{x}_{i-1} < \bar{x}_i < x_1\,.$$

So fortfahrend kommt man zu dem Ergebnis, dass jede Funktion $y^{(j)}(x, \lambda)$,

$j = 0, 1, \ldots, i$, auf dem Intervalle $(x_1 - \eta_k, x_1 + \eta_k)$ genau eine Nullstelle $\bar{x}_j \neq x_1$ hat. Für diese Nullstellen gilt:

$$x_1 - \eta_k < x_1 - \varepsilon + \eta_0' \leqq \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \ldots < \bar{x}_i < x_1 .$$

b) Analog beweist man, dass auch im Falle b) auf dem Intervalle $(x_1 - \eta_k, x_1 + \eta_k)$ die Funktionen $y^{(j)}(x, \lambda)$, $j = 0, 1, \ldots, i$, genau eine Nullstelle $\bar{x}_j \neq x_1$ haben. Für diese gilt:

$$x_1 < \bar{x}_i < \bar{x}_{i-1} < \ldots < \bar{x}_1 < \bar{x}_0 \leqq x_1 + \varepsilon - \eta_0'' < x_1 + \eta_k .$$

c) Im Falle c) ist $y^{(j)}(x_1, \lambda) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, i, \ldots, k - 1$. Da $y^{(k)}(x, \lambda) > 0$ für alle $x \in (x_1 - \eta_k, x_1 + \eta_k)$ ist, sind die Funktionen $y^{(j)}(x, \lambda)$, $j = 0, 1, \ldots, \ldots, k - 1$, auf den Intervallen $(x_1 - \eta_k, x_1)$, $(x_1, x_1 + \eta_k)$ streng monoton. Man sieht leicht, dass auf K_k x_1 eine einzige Nullstelle jeder dieser Funktionen ist. Da $y^{(i)}(x_1, \lambda) = 0$, ist x_1 auch in unserem Sinne eine Nullstelle von $y(x, \lambda)$.

So haben wir bewiesen, dass zu jedem $\lambda \in |\lambda - \beta| < \delta$ auf dem Intervalle $(x_1 - \eta_k, x_1 + \eta_k)$ nur ein einziges $\bar{x}$ gehört, $\bar{x} = \varphi(\lambda)$, welches die Nullstelle der Lösung $y(x, \lambda)$ ist (man respektiert die Verabredung (**D**)).

Wir beweisen jetzt, dass $\bar{x} = \varphi(\lambda)$ eine auf dem Intervalle $|\lambda - \beta| < \delta$ stetige Funktion ist. Es sei $\bar{\lambda} \in |\lambda - \beta| < \delta$ beliegig gewählt. Dann ist entweder α) $\varphi(\bar{\lambda}) \neq x_1$, oder β) $\varphi(\bar{\lambda}) = x_1$.

α) In diesem Falle ist $y(\varphi(\bar{\lambda}), \bar{\lambda}) = 0$, $y'(\varphi(\bar{\lambda}), \bar{\lambda}) \neq 0$. Nach einem Satz über implizite Funktionen gibt es zum Punkte $(\varphi(\bar{\lambda}), \bar{\lambda})$ eine Umbegung O: $|x - \varphi(\bar{\lambda})| < \bar{\eta}$, $|\lambda - \bar{\lambda}| < \bar{\delta}$, $\bar{\eta} > 0$, $\bar{\delta} > 0$, auf welcher durch die Gleichung $y(x, \lambda) = 0$ genau eine eindeutige, stetige Funktion $x = f(\lambda)$ definiert ist. Diese hat folgende Eigenschaften: für jedes $\lambda \in |\lambda - \bar{\lambda}| < \bar{\delta}$ ist $y(f(\lambda), \lambda) = 0$, $f(\bar{\lambda}) = \varphi(\bar{\lambda})$. Da auf dem Bereiche $O \cap \{|x - x_1| < \eta_k, |\lambda - \beta| < \delta\}$ die Funktion $y(x, \lambda)$ für jedes $\lambda \in \{|\lambda - \bar{\lambda}| < \bar{\delta}\} \cap \{|\lambda - \beta| < \delta\}$ nur eine Nullstelle und zwar $\bar{x}$ besitzt, ist $f(\lambda) = \varphi(\lambda)$ für alle $\lambda \in \{|\lambda - \bar{\lambda}| < \bar{\delta}\} \cap \{|\lambda - \beta| < \delta\}$. Also $\varphi(\lambda)$ ist in $\bar{\lambda}$ stetig.

β) Es sei $\varphi(\bar{\lambda}) = x_1$. Es sei weiter $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\tau_i \in |\lambda - \beta| < \delta$, eine zu $\bar{\lambda}$ konvergierende Folge. Die zu dieser Folge zugehörige Folge von Funktionwerten $\{\varphi(\tau_i)\}_{i=1}^{\infty}$ ist begrenzt, da

$$x_1 - \eta_k < x_1 - \varepsilon + \eta_0' \leq \varphi(\tau_i) \leq x_1 + \varepsilon - \eta_0'' < x_1 + \eta_k .$$

Darum können wir aus dieser Folge eine konvergente Teilfolge auswählen. Es sei dies die Folge $\{\varphi(\tau_{ik})\}_{i_k=1}^{\infty}$. Ihren Grenzwert bezeichnen wir durch L. Es ist klar, dass

$$x_1 - \eta_k < x_1 - \varepsilon + \eta_0' \leqq L \leqq x_1 + \varepsilon - \eta_0'' < x_1 + \eta_k .$$

Aus der Stetigkeit von $y(x, \lambda)$ in x, λ folgt, dass $y(L, \bar{\lambda}) = 0$. Da aber $y(x, \bar{\lambda})$ in dem Intervalle $(x_1 - \eta_k, x_1 + \eta_k)$ nur x_1 zur Nullstelle hat, ist $L = x_1$, d. h.

$$\lim_{i_k \to \infty} \varphi(\tau_{i_k}) = x_1 .$$

Damit ist bewiesen, dass auch in diesem Falle $\varphi(\lambda)$ in $\bar{\lambda}$ stetig ist.

Da nun $\bar{\lambda}$ beliebig aus $|\lambda - \beta| < \delta$ ausgewählt wurde, ist die Stetigkeit von $\varphi(\lambda)$ für $\lambda \in |\lambda - \beta| < \delta$ bewiesen. Damit ist unser Satz im Falle, dass i gerade und k ungerade ist, vollkommen bewiesen. Im Falle, dass i ungerade und k gerade ist, führt man den Beweis analog.

Satz 2.2. *Die Zentraldispersion $\varphi_\nu^{(ik)}(x, \lambda)$, $\nu \geqq 0$, ist eine stetige Funktion von λ, $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_1)$ für jedes $x \geqq x_1$. Ist $i + k$ eine ungerade Zahl, so ist $\varphi_\nu^{(ik)}(x, \lambda)$ eine stetige Funktion von λ, $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_1)$, für jedes $x \in (-\infty, \infty)$.*

Beweis. Wir beweisen zuerst den zweiten Teil des Satzes. Es sei $i + k$ eine ungerade Zahl. Es sei weiter $t \in (-\infty, \infty)$ beliebig fest ausgewählt und $y(x, \lambda)$ eine Lösung aus M_{ik}, für welche $y(t, \lambda) = 0$ ist. Für $\nu = 0$ ist die Funktion $\varphi_0^{(ik)}(t, \lambda) = t$, also ist sie in λ, $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_1)$, konstant, darum stetig. Es sei nun $\nu > 0$. Es sei $\lambda_1 \in (\Delta_0, \Delta_1)$ beliebig ausgewählt. Dann sind die Zahlen $\varphi_j^{(ik)}(t, \lambda_1)$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, entweder alle von x_1 verschieden oder es ist eine gleich x_1. Nehmen wir an, dass $\varphi_m^{(ik)}(t, \lambda_1) = x_1$, $0 \leq m \leq \nu$. Dann gibt es nach dem Hilfsatz 1 solche Zahlen $\delta_m > 0$, $\eta_m > 0$, dass auf dem Bereiche

$$O_m\colon \quad J_m\colon\ |\lambda - \lambda_1| < \delta_m\,, \quad K_m\colon\ |x - x_1| < \eta_m\,,$$

durch die Gleichung $y(x, \lambda) = 0$ eine einzige Funktion $x = \varphi_m^{(1)}(\lambda)$ definiert ist. Diese ist stetig auf J_m und der Wert von $\varphi_m^{(1)}(\lambda)$ für jedes $\lambda \in J_m$ ist die einzige auf dem Intervalle K_m sich befindende Nullstelle von $y(x, \lambda)$. Ist $m = 0$, so ist $\varphi_m^{(1)}(\lambda) = t$.

Für $j \neq m$ ist $\varphi_j^{(ik)}(t, \lambda_1) \neq x_1$, darum ist $y(\varphi_j^{(ik)}(t, \lambda_1), \lambda_1) = 0$, $y'(\varphi_j^{(ik)}(t, \lambda_1), \lambda_1) \neq 0$. Nach einem Satz über implizite Funktionen existiert zu jedem Punkt $(\varphi_j^{(ik)}(t, \lambda_1), \lambda_1)$, $0 \leqq j \leqq \nu$, $j \neq m$, ein Bereich

$$O_j\colon \quad J_j\colon\ |\lambda - \lambda_1| < \delta_j\,, \quad K_j\colon\ |x - \varphi_j^{(ik)}(t, \lambda_1)| < \eta_j\,, \quad \delta_j > 0\,, \quad \eta_j > 0\,,$$

auf welchem durch die Gleichung $y(x, \lambda) = 0$ eine einzige Funktion $\varphi = \varphi_j^{(1)}(\lambda)$ definiert ist. Diese ist auf J_j stetig und erfüllt dort die Gleichung $y(\varphi_j^{(1)}(\lambda), \lambda) = 0$ identisch. Für $\lambda = \lambda_1$ ist $\varphi_j^{(1)}(\lambda_1) = \varphi_j^{(ik)}(t, \lambda_1)$.

Die Funktion $y(x, \lambda_1)$ hat auf dem Intervalle $(t, \varphi_\nu^{(ik)}(t, \lambda_1))$ die Nullstellen nur in den Punkten $\varphi_j^{(ik)}(t, \lambda_1)$, $j = 0, 1, \ldots, \nu$. Auf den Intervallen $(\varphi_j^{(ik)}(t, \lambda_1), \varphi_{j+1}^{(ik)}(t, \lambda_1))$, $j = 0, 1, \ldots, \nu - 1$, ist sie von Null verschieden. Dann folgt aus der Stetigkeit der Funktion $y(x, \lambda)$ in x, λ die Existenz eines solchen $\delta^{(1)} > 0$, dass auf den Bereichen

$$B_j\colon\ \lambda_1 - \delta^{(1)} < \lambda < \lambda_1 + \delta^{(1)}\,, \quad \varphi_j^{(ik)}(t, \lambda_1) + \eta_j \leq x \leq \varphi_{j+1}^{(ik)}(t, \lambda_1) - \eta_{j+1}\,,$$

$j = 0, 1, \ldots, \nu - 1$, die Funktion $y(x, \lambda) \neq 0$ ist. Für $\delta^{(1)}$ nehmen wir eine solche Zahl, dass $\delta^{(1)} \leqq \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\nu\}$ ist. Ist jetzt $\lambda \in (\lambda_1 - \delta^{(1)}, \lambda_1 + \delta^{(1)})$, so hat die Funktion $y(x, \lambda)$ die Nullstellen nur auf den Intervallen $(\varphi_j^{(ik)}(t, \lambda_1) - \eta_j, \varphi_j^{(ik)}(t, \lambda_1) + \eta_j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, \nu$, und zwar auf jedem genau eine, nämlich $\varphi_j^{(1)}(\lambda)$. Also ist dies die j-te hinter t liegende Nullstelle. Darum ist $\varphi_j^{(1)}(\lambda) = \varphi_j^{(ik)}(t, \lambda)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Da $\varphi_j^{(1)}(\lambda)$ auf dem Intervalle $|\lambda - \lambda_1| < \delta^{(1)}$

stetig ist, ist dort auch $\varphi_j^{(ik)}(t, \lambda)$ stetig. Also ist $\varphi_j^{(ik)}(t, \lambda)$ in λ_1 stetig. Da λ_1 beliebig aus (Δ_0, Δ_1) gewählt wurde, ist damit der zweite Teil unseres Satzes bewiesen. (Die Beweismethode ist ähnlich der Bôcher's Methode, [5], S. 303.)

Den ersten Teil unseres Satzes beweist man analog.

3. Die Eigenwertaufgabe

Wir nehmen noch weiter an, dass $n = 2k$, $k \geqq 2$ ist. Wir werden uns bemühen, die Existenz einer *Lösung der Differentialgleichung*

$$y^{(n)} + Q(x, \lambda)\, y = 0 \tag{a}$$

zu beweisen, die die Bedingungen

$$y^{(j)}(x_1) = 0,\ j = 0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n-1\,, \tag{i}$$
$$0 \leqq i < k \leqq n-1\,,$$

$$y(x_2) = 0\,, \tag{ii}$$

$$y(x_3) = 0\,, \tag{iii}$$

erfüllt, wo x_1, x_2, x_3 irgend drei Punkte aus dem Intervalle (a, b), $-\infty < a$, $b < \infty$, sind. Jetzt können drei verschiedene Fälle eintreten:

$$x_1 \leqq x_2 < x_3\,, \tag{α}$$

$$x_3 < x_2 \leqq x_1\,, \tag{β}$$

$$x_2 < x_1 < x_3\,. \tag{γ}$$

Bemerkung 2. Ist $x_1 = x_2$, so handelt es sich um die Bedingungen

$$y^{(j)}(x_1) = 0\,,\quad j = 0, 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n-1,\ 0 \leqq k \leqq n-1\,,$$

$$y(x_3) = 0\,. \tag{ii'}$$

Bemerkung 3. Ist $Q(x, \lambda) > 0$ für $x \in (a, b)$, $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_1)$, so hat die Eigenwertaufgabe (a), (i)—(iii), wenn $x_2 = x_3 \neq x_1$ ist, keine eigentliche Lösung, was aus dem Satze 1.2 leicht ersichtlich ist.

Satz 3.1. *Es sei $Q(x, \lambda)$ eine stetige Funktion der Veränderlichen x, λ, $x \in \langle a, b\rangle$, $\lambda \in \langle \Delta_0, \Delta_1)$, es sei $Q(x, \Delta_0) \equiv 0$, $Q(x, \lambda) > 0$ für $\Delta_0 < \lambda < \Delta_1$ und $x \in \langle a, b\rangle$ und es sei $\lim\limits_{\lambda \to \Delta_1 -} Q(x, \lambda) = \infty$ gleichmässig für $x \in \langle a, b\rangle$. Es seien x_1, x_2, x_3 drei Punkte aus dem Intervalle $\langle a, b\rangle$. Dann hat die Eigenwertaufgabe* (a), (i)—(iii), (α), *wie auch die Eigenwertaufgabe* (a), (i)—(iii), (β) *unendlich viele einfache reelle Eigenwerte, die eine steigende Folge bilden:*

$$\Delta_0 < \lambda_1^{(ik)} < \lambda_2^{(ik)} < \ldots < \Delta_1\,.$$

Die Eigenfunktion $y(x, \lambda_\nu^{(ik)})$, die zu dem Eigenwerte $\lambda_\nu^{(ik)}$ gehört, hat auf dem Intervalle (x_2, x_3) im Falle (α) und auf dem Intervalle (x_3, x_2) im Falle (β) genau $(\nu - 1)$ Nullstellen, die sämtlich einfache Nullstellen sind.

Beweis. Wir definieren die Funktion $\bar{Q}(x, \lambda)$ folgendermassen: $\bar{Q}(x, \lambda) = Q(a, \lambda)$ für $x < a$, $\bar{Q}(x, \lambda) = Q(x, \lambda)$ für $x \in \langle a, b\rangle$, $\bar{Q}(x, \lambda) = Q(b, \lambda)$ für $x > b$. Aus der Stetigkeit der Funktion $Q(x, \lambda)$ auf dem Intervalle $\langle a, b\rangle$ folgt die Existenz ihres Maximums $M_2(\lambda)$ und Minimums $M_1(\lambda) > 0$ auf dem Intervalle $\langle a, b\rangle$, $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_1)$ Aus der Definition der Funktion $\bar{Q}(x, \lambda)$ sieht man gleich, dass $M_2(\lambda)$ das Maximum und $M_1(\lambda)$ das Minimum der Funktion $\bar{Q}(x, \lambda)$ auf dem Intervalle $(-\infty, \infty)$ ist. Es gilt also

$$0 < M_1(\lambda) \leqq \bar{Q}(x, \lambda) \leqq M_2(\lambda) \tag{16}$$

für $x \in (-\infty, \infty)$, $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_1)$. Aus den gemachten Voraussetzungen für $Q(x, \lambda)$ folgt:

$$\lim_{\lambda \to \Delta_0 +} M_1(\lambda) = \lim_{\lambda \to \Delta_0 +} M_2(\lambda) = 0\,, \quad \lim_{\lambda \to \Delta_1 -} M_1(\lambda) = \lim_{\lambda \to \Delta_1 -} M_2(\lambda) = \infty\,. \tag{17}$$

Weil $0 < M_1(\lambda) \leqq \bar{Q}(x, \lambda)$ für $x \in (-\infty, \infty)$, $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_1)$ ist, hat die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + \bar{Q}(x, \lambda)\, y = 0 \tag{$\bar{\mathrm{a}}$}$$

lauter oszillatorische Lösungen auf $(-\infty, \infty)$, d. h. jede Lösung hat unendlich viele Nullstellen vor irgendeiner Zahl τ wie auch nach τ und die Menge dieser Nullstellen ist sowohl nach unten als auch nach oben unbegrenzt. Das bedeutet, dass für die Lösungen der Menge M_{ik} die Sätze der §§ 1 und 2 gelten. Alle Lösungen aus M_{ik} erfüllen die Bedingung (a) und (i). Die Menge der Lösungen aus M_{ik}, die noch die Bedingung (ii) erfüllen, bezeichnen wir durch $M_{ik}(x_2)$. Die Lösungen aus $M_{ik}(x_2)$, die zu demselben Werte des Parameters λ gehören, sind nach dem Satze 1.10 linear abhängig. Es sei $y(x, \lambda)$ eine Lösung aus $M_{ik}(x_2)$. Wir bilden jetzt die Zentraldispersionen $\varphi_\nu^{(ik)}(x_2, \lambda)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ In dem Satze 1.5 (10′) ist eine Abschätzung der Entfernung von zwei beliebigen nacheinanderfolgenden Nullstellen von $y(x, \lambda)$ gegeben. Nach dieser Abschätzung ist

$$\frac{p_{n,1}}{\sqrt[n]{M_2(\lambda)}} < \varphi_\nu^{(ik)}(x_2, \lambda) - \varphi_{\nu-1}^{(ik)}(x_2, \lambda) < \frac{p_{n,n-1}}{\sqrt[n]{M_1(\lambda)}}\,, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Daraus folgt

$$\nu \frac{p_{n,1}}{\sqrt[n]{M_2(\lambda)}} < \varphi_\nu^{(ik)}(x_2, \lambda) - \varphi_0^{(ik)}(x_2, \lambda) < \nu \frac{p_{n,n-1}}{\sqrt[n]{M_2(\lambda)}}\,. \tag{18}$$

Gehen wir jetzt zur Grenze für $\lambda \to \Delta_0 +$ und für $\lambda \to \Delta_1 -$ über und berücksichtigen wir (17), so haben wir

$$\lim_{\lambda \to \Delta_0 +} \varphi_\nu^{(ik)}(x_2, \lambda) = \infty\,, \quad \lim_{\lambda \to \Delta_1 -} \varphi_\nu^{(ik)}(x_2, \lambda) = \varphi_0^{(ik)}(x_2, \lambda) = x_1\,. \tag{19}$$

Ist jetzt $x_2 < x_3$, so folgt aus diesen beiden Resultaten und aus der Stetigkeit der Zentraldispersion $\varphi_\nu^{(ik)}(x_2, \lambda)$ in (Δ_0, Δ_1) die Existenz wenigstens eines solchen $\lambda_\nu^{(ik)} \in (\Delta_0, \Delta_1)$, dass $\varphi_\nu^{(ik)}(x_2, \lambda_\nu^{(ik)}) = x_3$ ist. Das bedeutet aber, dass $y(x, \lambda_\nu^{(ik)})$

eine Lösung der Gleichung $(\bar{a})$ ist, die die Bedingungen (i)—(iii) erfüllt. Sie ist also eine Eigenfunktion der Eigenwertaufgabe (a), (i)—(iii), (α) und $\lambda_\nu^{(ik)}$ der zugehörige Eigenwert. Aus der Definition der Zentraldispersion $\varphi_\nu^{(ik)}(x, \lambda)$ folgt, dass die Eigenfunktion $y(x, \lambda_\nu^{(ik)})$ auf dem Intervalle (x_2, x_3) gerade $(\nu - 1)$ Nullstellen hat.

Nehmen wir an, das $\nu = 1$ ist. Es ist $\Delta_0 < \lambda_1^{(ik)} < \Delta_1$, $\varphi_1(x_2, \lambda_1^{(ik)}) = x_3$. Gemäss der Definition der Zentraldispersionen ist $\varphi_2(x_2, \lambda_1^{(ik)}) > x_3$. Aus dieser Ungleichung, aus der zweiten Gleichung in (19) und aus der Stetigkeit der Funktion $\varphi_2^{(ik)}(x_2, \lambda)$ in der Veränderlichen $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_1)$ folgt die Existenz des Eigenwertes $\lambda_2^{(ik)}$, für welchen $\varphi_2(x_2, \lambda_2^{(ik)}) = x_3$, und $\lambda_1^{(ik)} < \lambda_2^{(ik)}$ gilt. Durch vollständige Induktion findet man die steigende Folge von Eigenwerten

$$\Delta_0 < \lambda_1^{(ik)} < \lambda_2^{(ik)} < \ldots < \Delta_1 .$$

Jeder Eigenwert $\lambda_\nu^{(ik)}$ ist einfach, weil, wie schon oben gesagt wurde, die Lösungen-Eigenfunktionen aus $M_{ik}(x_2)$, die zu demselben Werte des Parameters λ gehören, linear abhängig sind. Der Satz ist damit im Falle (α) bewiesen. Den Fall (β) führt man durch die Transformation $t = x_1 - x$ auf den Fall (α) zurück.

Man kann die Bedingungen, die die Funktion $Q(x, \lambda)$ betreffen, folgendermassen abändern:

Satz 3.2. *Es sei $Q(x, \lambda)$ eine stetige Funktion der Veränderlichen $x, \lambda, \in \langle a, b\rangle$, $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_1)$, und es sei für $x \in \langle a, b\rangle$ gleichmässig* $\lim\limits_{\lambda \to \Delta_1 -} Q(x, \lambda) = \infty$. *Dann hat die Eigenwertaufgabe* (a), (i)—(iii), (α), *wie auch die Eigenwertaufgabe* (a), (i) bis (iii), (β) *unendlich viele einfache reelle Eigenwerte, die eine steigende Folge bilden*

$$\Delta_0 < \lambda_{\nu_0}^{(ik)} < \lambda_{\nu_0 + 1}^{(ik)} < \ldots < \Delta_1 ,$$

wo $\nu_0 \geqq 1$ eine natürliche Zahl ist. Die Eigenfunktion $y(x, \lambda_{\nu_0 + j}^{(ik)})$, die zu dem Eigenwerte $\lambda_{\nu_0 + j}^{(ik)}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, gehört, hat auf dem Intervalle (x_2, x_3) bzw. (x_3, x_2) genau $(\nu_0 + j - 1)$ Nullstellen, die alle einfach sind.

Beweis. Wie bei dem Beweise des vorigen Satzes nehmen wir die Funktion $\bar{Q}(x, \lambda)$ und die Gleichung $(\bar{a})$. Aus der Voraussetzung, dass $\lim\limits_{\lambda \to \Delta_1 -} Q(x, \lambda) = \infty$ gleichmässig für $x \in \langle a, b\rangle$ ist, folgt die Existenz eines solchen $\lambda_0 \in (\Delta_0, \Delta_1)$, dass für $\lambda \in \langle \lambda_0, \Delta_1)$ und $x \in (-\infty, \infty)$ die Funktion $\bar{Q}(x, \lambda)$ positiv ist und ein Maximum $M_2(\lambda)$ und ein positives Minimum $M_1(\lambda)$ auf dem Intervalle $(-\infty, \infty)$ besitzt. Es gilt also

$$0 < M_1(\lambda) \leqq \bar{Q}(x, \lambda) \leqq M_2(\lambda) \tag{20'}$$

für $x \in (-\infty, \infty)$, $\lambda \in \langle \lambda_0, \Delta_1)$. Das bedeutet, dass für $\lambda \in \langle \lambda_0, \Delta_1)$ die eigentlichen Lösungen der Gleichung $(\bar{a})$ sämtlich oszillatorisch sind. Es gelten also die Sätze der §§ 1 und 2. Aus der Voraussetzung, dass $\lim\limits_{\lambda \to \Delta_1 -} Q(x, \lambda) = \infty$ gleichmässig für $x \in (-\infty, \infty)$ ist, folgt, dass

$$\lim_{\lambda \to \Delta_1 -} M_1(\lambda) = \lim_{\lambda \to \Delta_1} M_2(\lambda) = \infty \tag{20}$$

ist. Der Grenzübergang in (18) für $\lambda \to \Delta_1 -$ gibt die Relation

$$\lim_{\lambda \to \Delta_1 -} \varphi_\nu^{(ik)}(x_2, \lambda) = x_2 \,, \quad \nu \geqq 1 \,. \tag{21}$$

Auf der andern Seite gibt es zu λ_0 einen solchen Index ν_0, dass für alle $\nu \geqq \nu_0$

$$x_3 - x_2 \leqq \nu \frac{p_{n,1}}{\sqrt[n]{M_2(\lambda)}} < \varphi_\nu^{(ik)}(x_2, \lambda_0) - x_2$$

ist, oder dass

$$x_3 < \varphi_\nu^{(ik)}(x_2, \lambda_0) \,, \quad \nu \geqq \nu_0 \,, \tag{22}$$

ist. Aus der Stetigkeit der Funktion $\varphi_\nu(x_2, \lambda)$ und aus (21) und (22) folgt dann die Existenz eines solchen $\lambda_\nu^{(ik)} \in \langle \lambda_0, \Delta_1)$, dass $\varphi_\nu^{(ik)}(x_2, \lambda_\nu^{(ik)}) = x_3$ ist, also die Existenz eines Eigenwertes und dann auch die Existenz einer Eigenfunktion $y(x, \lambda_\nu^{(ik)}) \in M_{ik}(x_2)$ unserer Eigenwertaufgabe. Bezeichnen wir den zu ν_0 gehörigen Eigenwert durch $\lambda_{\nu_0}^{(ik)}$ und die weiteren durch $\lambda_{\nu_0+j}^{(ik)}$, $j = 1, 2, \ldots$ Aus (21) und aus der Tatsache, dass $x_3 < \varphi_{\nu_0+j}^{(ik)}(x_2, \lambda_{\nu_0+j-1}^{ik})$ ist, folgt leicht, dass die Eigenwerte $\lambda_{\nu_0+j}^{(ik)}$, $j = 1, 2, \ldots$, eine steigende Folge

$$\Delta_0 < \lambda_0 \leqq \lambda_{\nu_0}^{(ik)} < \lambda_{\nu_0+1}^{(ik)} < \ldots < \Delta_1$$

bilden. Die Eigenwerte $\lambda_{\nu_0+j}^{(ik)}$ sind einfach, weil die Lösungen aus $M_{ik}(x_2)$, die zu demselben Werte des Parameters λ gehören, linear abhängig sind (s. Satz 1.10). Aus der Definition der Zentraldispersionen sieht man weiter, dass die Eigenfunktion $y(x, \lambda_{\nu_0+j}^{(ik)})$, die zu dem Eigenwerte $\lambda_{\nu_0+j}^{(ik)}$ gehört, auf dem Intervalle (x_2, x_3) genau $(\nu_0 + j - 1)$ Nullstellen hat, die sämtlich einfach sind, weil jede Lösung von (a) nur einfache Nullstellen, mit Ausnahme von x_1, besitzt (s. Satz 1.2). Damit ist der Satz im Falle der Eigenwertaufgabe (a), (i)—(iii), (α) bewiesen.

Durch die Transformation $t = x_1 - x$ geht wieder die Eigenwertaufgabe (a), (i)—(iii), (β) in die Eigenwertaufgabe (a), (i)—(iii), (α) über.

Satz 3.3. *Seien die Voraussetzungen des Satzes* 3.1 *erfüllt. Sei $i + k$ eine ungerade Zahl. Dann hat die Eigenwertaufgabe* (a), (i)—(iii), (γ) *unendlich viele einfache reelle Eigenwerte, die eine steigende Folge bilden*

$$\Delta_0 < \lambda_2^{(ik)} < \lambda_3^{(ik)} < \ldots < \Delta_1 \,.$$

Die Eigenfunktion $y(x, \lambda_\nu^{(ik)})$, die zum Eigenwert $\lambda_\nu^{(ik)}$ gehört, hat auf dem Intervalle (x_2, x_3) genau $(\nu - 1)$ Nullstellen, die sämtliche einfach sind (man respektiert die Verabredung (**D**)) .

Beweis. Wie im Beweise des Satzes 3.1. nehmen wir statt der Gleichung (a) die Gleichung ($\bar{\text{a}}$) und wir benutzen weiter die Grössen $M_1(\lambda)$, $M_2(\lambda)$, für welche die Relationen (16) und (17) gelten. Die Lösungen von ($\bar{\text{a}}$) sind dann oszillatorisch und für die Lösungen aus M_{ki} gelten die Sätze der §§ 1 und 2.

Wir bezeichnen wieder durch $M_{ik}(x_2)$ die Menge der Lösungen aus M_{ik}, die (a), (i) und (ii) befriedigen. Nehmen wir jetzt die Zentraldispersion $\varphi_\nu^{(ik)}(x_2, \lambda)$, $\nu > 0$. Es können zwei Fälle eintreten: 1° Entweder ist ν so, dass $x_2 < \varphi_\nu^{(ik)}(x_2, \lambda) < < x_1$ ist. Nach dem Satze 1.5 ist dann

$$\nu \frac{p_{n,1}}{\sqrt[n]{M_2(\lambda)}} < \varphi_\nu(x_2, \lambda) - x_2 < \nu \frac{p_{n,n-1}}{\sqrt[n]{M_1(\lambda)}} . \tag{23}$$

2° Oder ist ν so, dass $x_1 < \varphi_\nu^{(ik)}(x_2, \lambda)$ ist. Dann existiert sicher ein solches $\mu < \nu$, dass $\varphi_\mu^{(ik)}(x_2, \lambda) \leqq x_1 \leqq \varphi_{\mu+1}^{(ik)}(x_2, \lambda)$ ist. Dann ist aber nach dem Satze 1.5

$$\mu \frac{p_{n,1}}{\sqrt[n]{M_2(\lambda)}} < \varphi_\mu^{(ik)}(x_2, \lambda) - x_2 < \mu \frac{p_{n,n-1}}{\sqrt[n]{M_1(\lambda)}} ,$$

$$(\nu - \mu - 1) \frac{p_{n,1}}{\sqrt[n]{M_2(\lambda)}} < \varphi_\nu^{(ik)}(x_2, \lambda) - \varphi_{\mu+1}^{(ik)}(x_2, \lambda) < (\nu - \mu - 1) \frac{p_{n,n-1}}{\sqrt[n]{M_1(\lambda)}} ,$$

$$0 \leqq x_1 - \varphi_\mu^{(ik)}(x_2, \lambda) < \frac{p_{n,n-1}}{\sqrt[n]{M_1(\lambda)}} , \quad 0 \leqq \varphi_{\mu+1}^{(ik)}(x_2, \lambda) - x_1 < \frac{p_{n,n-1}}{\sqrt[n]{M_1(\lambda)}} .$$

Daraus folgt

$$(\nu - 1) \frac{p_{n,1}}{\sqrt[n]{M_2(\lambda)}} < \varphi_\nu^{(ik)}(x_2, \lambda) - x_2 < (\nu + 1) \frac{p_{n,n-1}}{\sqrt[n]{M_1(\lambda)}} , \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots \tag{24}$$

Die Vergleichung der Relationen (23) und (24) ergibt, dass die Abschätzung (24) auch im Falle 1° richtig ist. Mit Rücksicht auf (17) folgt aus (24):

$$\lim_{\lambda \to \Delta_0 +} \varphi_\nu^{(ik)}(x_2, \lambda) = \infty , \quad \lim_{\lambda \to \Delta_1 -} \varphi_\nu^{(ik)}(x_2, \lambda) = x_2 , \quad \nu > 1 . \tag{25}$$

Daraus und aus der Stetigkeit der Funktion $\varphi_\nu^{(ik)}(x_2, \lambda)$ in der Veränderlichen λ auf (Δ_0, Δ_1) folgt die Existenz wenigstens eines solchen $\lambda_\nu^{(ik)} \in (\Delta_0, \Delta_1)$, dass $\varphi_\nu^{(ik)}(x_2, \lambda_\nu^{(ik)}) = x_3$ ist. Also gibt es zu jedem $\nu > 1$ einen Eigenwert $\lambda_\nu^{(ik)}$. Man beweist analog wie im Beweise des Satzes 3.1, dass die Eigenwerte $\lambda_\nu^{(ik)}$, $\nu = 2, 3, \ldots$, so gewählt werden können, dass sie eine steigende Folge bilden

$$\Delta_0 < \lambda_2^{(ik)} < \lambda_3^{(ik)} < \ldots < \Delta_1$$

und dass sie einfach sind. Die zu $\lambda_\nu^{(ik)}$ gehörige Eigenfunktion $y(x, \lambda_\nu^{(ik)})$ hat die Eigenschaft, dass sie auf dem Intervalle (x_2, x_3) genau $(\nu - 1)$ Nullstellen hat, was aus der Definition der Zentraldispersionen folgt. Alle diese Nullstellen sind einfach (dabei respektieren wir die Verabredung (**D**)), was aus dem Satze 1.2 folgt.

Satz 3.4. *Seien die Bedingungen des Satzes* 3.2 *erfüllt. Sei $i + k$ eine ungerade Zahl. Dann hat die Eigenwertaufgabe* (a), (i)—(iii), (γ) *unendlich viele einfache reelle Eigenwerte, die eine steigende Folge bilden*

$$\Delta_0 < \lambda_{\nu_0}^{(ik)} < \lambda_{\nu_0+1}^{(ik)} < \ldots < \Delta_0 , \quad \nu_0 > 1 .$$

Die Eigenfunktion $y(x, \lambda^{(ik)}_{\nu_0+j})$, *die zu dem Eigenwerte* $\lambda^{(ik)}_{\nu_0+j}$ *gehört, hat auf dem Intervalle* (x_2, x_3) *genau* $(\nu_0 + j - 1)$ *Nullstellen, die sämtlich einfach sind (wenn man die Verabredung* (**D**) *respektiert).*

Man beweist diesen Satz auf gleiche Weise wie den Satz 3.2.

4. Die Eigenwertaufgabe, wenn n ungerade ist

In diesem Paragraphen nehmen wir ständig an, das $n \geqq 3$ *eine natürliche ungerade Zahl ist.* Wir beweisen zuerst den

Satz 4.1. *Es sei* $Q(x) \geqq m > 0$ *für* $x \in (-\infty, \infty)$, *wo* m *eine Konstante ist. Dann sind alle Lösungen aus* M_{ik} *oszillatorisch.*

Beweis. Ist n ungerade und $Q(x) \geqq m > 0$, so ist jede eigentliche Lösung der Differentialgleichung (a) entweder oszillatorisch oder sie nähert sich monoton zu Null, wenn $x \to \infty$ [4]. Aus dem Trennungssatz über die Nullstellen (Satz 1.9) der Lösungen aus M_{ik} folgt, dass entweder alle Lösungen aus M_{ik} oszillatorisch sind oder keine. Nehmen wir an, dass keine Lösung aus M_{ik} oszillatorisch ist. Für jede Lösung $y(x) \in M_{ik}$ gilt also $\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} y'(x) = 0$. Seien $u(x)$ und $v(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen aus M_{ik}, welche die Relation $u'(x) . v(x) - u(x) . v'(x) = A_{ik}(x)$ erfüllen. Dann ist $\lim_{x\to\infty}(u'(x) . v(x) - u(x) . v'(x)) = \lim_{x\to\infty} A_{ik}(x) = 0$. Das widerspricht aber dem Satze 1.8d), welche behauptet, dass $A_{ik}(x)$ eine auf dem Intervalle (x_1, ∞) steigende positive Funktion ist. Dieser Widerspruch beweist unseren Satz.

Der Trennungssatz über die Nullstellen der Lösungen aus M_{ik}, der auf dem Intervalle (x_1, ∞) gilt, gibt uns die Möglichkeit den Begriff der Zentraldispersionen einzuführen. Es ist nicht schwer zu beweisen, dass die Zentraldispersionen mit positiven Indizes auf dem Intervalle (x_1, ∞) definiert sind und dieselben Eigenschaften haben, wie im Falle der geraden Zahl n: nämlich sie sind stetig, sie haben eine stetige Abteilung nach x und sie befriedigen die Gleichung (C). Ist $Q(x, \lambda)(\geqq m(\lambda) > 0)$ eine stetige positive Funktion von $x \in (-\infty, \infty)$, $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_1)$, so sind bei $x \geqq x_1$ die betreffenden Zentraldispersionen ebenfalls stetige Funktionen von λ, $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_1)$. Das bedeutet aber, dass *die Sätze* 3.1 3.2 *für die Eigenwertaufgabe* (a), (i)—(iii), (α) *auch in dem Falle richtig bleiben, wenn* $n \geqq 3$ *eine ungerde Zahl ist.* Wir beweisen weiter den

Satz 4.2. *Es seien für* $Q(x, \lambda)$ *die Bedingungen des Satzes* 3.2 *erfüllt. Dann hat die Eigenwertaufgabe* (a), (i)—(iii), (γ) *unendlich viele reelle einfache Eigenwerte*

$$\Delta_0 < \lambda_2^{(ik)} < \lambda_3^{(ik)} < \ldots < \Delta_1 .$$

Die zum Eigenwerte $\lambda_\nu^{(ik)}$, $\nu > 1$ *gehörige Eigenfunktion* $y(x, \lambda_\nu^{(ik)})$ *hat auf dem Intervalle* (x_1, x_3) $(\nu - 1)$ *Nullstellen, die alle einfach sind.*

Beweis. Statt der Gleichung (a) werden wir wieder die Gleichung $(\bar{a})$ untersuchen. Für $\bar{Q}(x, \lambda)$ gilt die Ungleichung (16). Nach dem Satze 4.1 sind also alle Lösungen aus M_{ik} oszillatorisch. Wir bezeichnen wieder durch $M_{ik}(x_2)$ die Menge der Lösungen aus M_{ik}, die x_2 zur Nullstelle haben. Alle Lösungen aus $M_{ik}(x_2)$, die zu demselben Werte des Parameters λ gehören, sind nach dem Satze 1.10 linear abhängig. Nehmen wir jetzt eine Lösung $y(x, \lambda)$ aus $M_{ik}(x_2)$. Diese hat auf dem Intervalle (x_1, ∞) unendlich viele Nullstellen, die alle einfach sind. Wir bezeichnen sie der Grösse nach durch

$$\varrho_1(\lambda) < \varrho_2(\lambda) < \ldots < \varrho_\nu(\lambda) < \ldots \tag{30}$$

Die Zahl x_1 kann nicht Nullstelle (im Sinne unserer Verabredung (D)) von $y(x, \lambda)$ sein, denn dann hätte $y(x, \lambda)$, dem Satze 1.3 gemäss, keine Nullstelle vor x_1.

Es gilt jetzt nach dem Satze 1.5:

$$0 \leq \varrho_1(\lambda) - x_1 < \frac{p_{n,n-1}}{\sqrt[n]{M_1(\lambda)}} ,$$

$$\frac{p_{n,1}}{\sqrt[n]{M_2(\lambda)}} < \varrho_{\nu+1}(\lambda) - \varrho_\nu(\lambda) < \frac{p_{n,n-1}}{\sqrt[n]{M_1(\lambda)}} , \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Aus diesen Ungleichungen folgt weiter:

$$\nu \frac{p_{n,1}}{\sqrt[n]{M_2(\lambda)}} < \varrho_{\nu+1}(\lambda) - x_1 < (\nu + 1) \frac{p_{n,n-1}}{\sqrt[n]{M_1(\lambda)}} , \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{31}$$

Berücksichtigen wir jetzt (17), so ist

$$\lim_{\lambda \to \Delta_1 -} \varrho_{\nu+1}(\lambda) = x_1 , \quad \lim_{\lambda \to \Delta_0 +} \varrho_{\nu+1}(\lambda) = \infty , \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{32}$$

Man beweist die Stetigkeit der Funktionen $\varrho_\nu(\lambda)$ für $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_1)$ auf gleiche Weise wie den Satz 2.2.

Da jetzt $x_1 < x_3 < \infty$ ist, folgt aus (32) und aus der Stetigkeit der Funktion $\varrho_\nu(\lambda)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, dass die Funktion $\varrho_\nu(\lambda)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, den Wert x_3 wenigstens einmal annimmt. Bezeichnet man den Wert von λ, für welchen $\varrho_\nu(\lambda) = x_3$ ist, durch $\lambda_\nu^{(ik)}$, so ist $y(x, \lambda_\nu^{(ik)})$ der gesuchte Eigenwert, und $y(x, \lambda_\nu^{(ik)}) \in M_{ik}(x_2)$ die zu ihm gehörige Eigenfunktion. Es ist evident, dass $y(x, \lambda_\nu^{(ik)})$ in (x_1, x_3) genau $(\nu - 1)$ Nullstellen hat, die alle einfach sind. Da weiter $M_{ik}(x_2)$ für ein festes λ nur linear abhängige Lösungen enthält, ist die Einfachheit der Eigenwerte evident. Es ist weiter klar, dass man die Eigenwerte so wählen kann, dass sie eine steigende Folge bilden.

Satz 4.3. *Es seien für $Q(x, \lambda)$ die Bedingungen des Satzes 3.2 erfüllt. Dann hat die Eigenwertaufgabe* (a), (i)—(iii), (γ) *unendlich viele einfache reelle Eigenwerte*

$$\Delta_0 < \lambda_{\nu_0}^{(ik)} < \lambda_{\nu_0+1}^{(ik)} < \ldots < \lambda_{\nu_0+j}^{(ik)} < \ldots < \Delta_0 ; \quad \nu_0 > 1 .$$

Die zum Eigenwerte $\lambda^{(ik)}_{\nu_0+j}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, *gehörige Eigenfunktion* $y(x, \lambda^{(ik)}_{\nu_0+j})$ *hat auf dem Intervalle* (x_1, x_3) $(\nu_0 + j - 1)$ *Nullstellen, die alle einfach sind.*

Beweis. Wir untersuchen wieder statt der Gleichung (a) die Gleichung ($\bar{a}$). Wie schon in dem Beweise des Satzes 3.2 gezeigt wurde, gibt es eine solche Zahl $\lambda_0 \in (\varDelta_0, \varDelta_1)$, dass $\bar{Q}(x, \lambda)$ für $x \in (-\infty, \infty)$ und $\lambda \in \langle\lambda_0, \varDelta_1)$ positiv ist und dass Zahlen $M_1(\lambda) > 0$, $M_2(\lambda)$ existieren, sodass (20') und (20) gilt. Aus (20') und aus dem Satze 4.1 folgt, dass die Lösungen aus M_{ik} für $\lambda \in \langle\lambda_0, \varDelta_1)$ oszillatorisch sind. $M_{ik}(x_2)$ bedeute wieder die Menge der Lösungen aus M_{ik}, die x_2 zur Nullstelle haben. Ist λ fest, so sind die Lösungen der Menge $M_{ik}(x_2)$ linear abhängig (s. Satz 1.10). Sei $y(x, \lambda)$ eine Lösung aus $M_{ik}(x_2)$ und seien $\varrho_\nu(\lambda)$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, ihre Nullstellen, die grösser als x_1 sind, der Grösse nach geordnet. Wie im vorigen Falle ist x_1 keine Nullstelle von $y(x, \lambda)$. Es gilt jetzt (31). Der Grenzübergang für $\lambda \to \varDelta_1 -$ gibt nach (31) mit Rücksicht auf die Relation (20):

$$\lim_{\lambda \to \varDelta_1 -} \varrho_{\nu+1}(\lambda) = x_1\,, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{33}$$

Da nun $y(x, \lambda)$ für $\lambda \in \langle\lambda_0, \varDelta_1)$ oszillatorisch ist, so gibt es einen solchen Index $\nu_0 > 1$, dass für $\nu \geq \nu_0$

$$\varphi_\nu(\lambda_0) \geq x_3 \tag{34}$$

gilt. Man beweist, wie im Falle des Satzes 4.2, die Stetigkeit der Funktion $\varrho_\nu(\lambda)$ für $\lambda \in \langle\lambda_0, \varDelta_1)$. Aus der Stetigkeit der Funktion $\varrho_\nu(\lambda)$ und aus (34) und (33) folgt, dass jede Funktion $\varrho_\nu(\lambda)$, $\nu = \nu_0, \nu_0 + 1, \ldots$, mindestens einmal den Wert x_3 annimmt. Der betreffende Wert $\lambda^{(ik)}_{\nu_0+j}$, für welchen $\varrho_{\nu_0+j}(\lambda^{(ik)}_{\nu_0+j}) = x_3$ ist, ist der gesuchte Eigenwert unserer Aufgabe und die zu ihm gehörige Funktion $y(x, \lambda^{(ik)}_{\nu_0+j}) \in M_{ik}(x_2)$ ist die Eigenfunktion. Die Einfachheit der Eigenwerte beweist man wie in vorigen Sätzen. Die Eigenschaft, dass $y(x, \lambda^{(ik)}_{\nu_0+j})$ in (x_1, x_3) genau $(\nu_0 + j - 1)$ Nullstellen hat, die alle einfach sind, ist evident.

LITERATURVERZEICHNISS

[1] *M. Zlámal:* Über eine Eigenwertaufgabe bei der Differentialgleichung $y^{(n)} + \lambda A(x) \,.\, y = 0$ (Spisy přírodovědecké fakulty Masarykovy university, *A 8*, č. 345, 1953/3).

[2] *O. Borůvka:* О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-ого порядка (чех. мат. журнал, т. *3* (*78*), 1953).

[3] *M. Švec:* Sur les dispersions des intégrales de l'équation $y^{(4)} + Q(x)\,y = 0$ (Чех. мат. журнал, т. *1* (*80*), 1955)

[4] *A. Kneser:* Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen, Math. Annalen *42* (1893), pp. 409—435.

5] *M. Bocher:* The theorems of oscillation of Sturm and Klein (Bull. of the Amer. Math. Soc., vol. IV., 1898).

Резюме

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y^{(n)} + Q(x, \lambda) . y = 0$

МАРКО ШВЕЦ (MARKO ŠVEC), Братислава.

(Поступило в редакцию 10/V 1955 г.)

В первом параграфе работы я занимаюсь исследованием свойств некоторых решений уравнения

$$y^{(n)} + Q(x) . y = 0 . \tag{a_1}$$

Я, предполагаю, что функция $Q(x)$ является неотрицательной и непрерывной функцией на интервале $(-\infty, \infty)$ и что ни на каком частичном интервале она не становится тождественно равной нулю.

Решение уравнения (a_1), которое в точке x_1 удовлетворяет условиям: $y^{(j)}(x_1)$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, имеют постоянный знак, $y^{(k)}(x_1) \neq 0$, $y^{(j)}(x_1) = 0$, $j = k+1, \ldots, n-1$, $0 \leq k \leq n-1$, имеет в произвольной точке $\xi \in (x_1, \infty)$ самое больше одну из производных $y^{(j)}(\xi)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, равной нулю. Если $y^{(m)}(\xi) = 0$, $0 \leq m \leq n-1$ то числа $y^{(j)}(\xi)$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$ имеют один и тот же знак, а также и числа $y^{(j)}(\xi)$, $j = m+1, \ldots, n-1$ имеют одинаковые знаки. (Теорема 1.2.)

Если n — четное число и если решение $y(x)$ уравнения (a_1) удовлетворяет условиям: $y^{(j)}(x) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k-1, k+1, \ldots \ldots, n-1$, $0 \leq i < k \leq n-1$, то в любом числе $\xi \in (-\infty, \infty)$, $\xi \neq x_1$ самое больше одна из производных $y^{(j)}(\xi)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, равна нулю. Если $y^{(m)}(\xi) = 0$, $0 \leq m \leq n-1$ и $\xi > x$, то справедливо предыдущее утверждение о знаках производных $y^{(j)}(\xi)$, $j \neq m$. Если $\xi < x_1$, то у чисел $y^{(j)}(\xi)$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, так же как и у чисел $y^{(j)}(\xi)$, $j = m+1, \ldots, n-1$, знаки чередуются. (Теорема 1.2.)

Если же n — нечетное число и если $y(x)$ есть решение уравнения (a_1) такое, что все его производные до порядка $(n-1)$, за исключением производной порядка k, в точке x_1 равны нулю, то $y^{(j)}(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ не имеет в интервале $(-\infty, x_1)$ корня и $|\lim_{x \to -\infty} y^{(j)}(x)| = \infty$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$). (Теорема 1.3.)

То же самое утверждение справедливо и для тех интегралов уравнения (a_1), все производные которых до порядка $n-1$, за исключением i-той и k-той производных, равны нулю, $0 \leq i < k \leq n-1$ и для i-той и k-той производной будет или а) $\operatorname{sgn} y^{(i)}(x_1) = \operatorname{sgn} y^{(k)}(x_1)$, если $i + k$ — четное число, или б) $\operatorname{sgn} y^{(i)}(x_1) \neq \operatorname{sgn} y^{(k)}(x_1)$, если $i + k$ нечетно. (Теорема 1.3'.)

В теореме 1.5 приводятся оценки расстояний между двумя соседними ($\neq x_1$) корнями некоторых интегралов уравнения (a_1) при условии, что $0 < M_1 \leq Q(x) \leq M_2$ для $x \in (-\infty, \infty)$.

Далее исследуется множество M_{ik} интегралов уравнения (a_1), все производные которых до порядка $n - 1$, за исключением i-той и k-той производной, $0 \leq i < k \leq n - 1$, равны нулю. Если $u_1(x)$, $u_2(x) \in M_{ik}$ — два линейно независимых интеграла, то каждый интеграл уравнения (a_1), принадлежащий M_{ik}, можно представить в виде линейной комбинации интегралов $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Множество является линейной системой решений линейного дифференциалнього уравнения 2-ого порядка

$$\left(\frac{y'}{A_{ik}(x)}\right)' + \frac{B_{ik}(x)}{A_{ik}^2(x)}\, y = 0\,,$$

где $A_{ik}(x)$ — функция, однозначно определенная системой M_{ik}, а именно: если $u_1(x)$, $u_2(x) \in M_{ik}$ — два линейно независимых интеграла, то $A_{ik}(x) = c\,.\,(u_1'(x)\,.\,u_2(x) - u_1(x)\,.\,u_2'(x))$, где c — какая-то постоянная. Функция A_{ik} имеет в x_1 точно $(i + k - 1)$ кратный корень. Если n — четное число, то при $x \neq x_1$ будет $A_{ik}(x) \neq 0$. Выбрав подходящим способом постоянную c, можно достичь того, что $A_{ik}(x) > 0$ для всех $x \neq x_1$ на интервале $(-\infty, \infty)$, если $i + k$ — нечетное число, и $A_{ik}(x) \gtrless 0$ для $x \gtrless x_1$ если $i + k$ четно. Если n нечетно, то $A_{ik}(x) \neq 0$ для $x > x_1$. Это свойство позволяет доказать теорему об отделении корней линейно независимых интегралов из M_{ik}, именно следующим образом: если n четно и $(i + k)$ — нечетно, на всем интервале $(-\infty, \infty)$; если n и $(i + k)$ — четные числа, на интервале $(-\infty, x_1)$ и на интервале (x_1, ∞); если n — нечетное число, то лишь на интервале (x_1, ∞). При этом x_1 считается корнем интеграла $y(x) \in M_{ik}$ только в том случае, если $y^{(i)}(x_1) = 0$.

Если n — нечетное число, то справедливо следующее утверждение о линейно независимых интегралах $u_1(x)$, $u_2(x) \in M_{ik}$ (теорема 1.11): *Между каждыми двумя соседними корнями, меньшими чем x_1, одного интеграла не находится ни одного или находится четное число корней другого интеграла* (каждый корень считается за столько корней, скольким единицам равна его кратность). (Теорема 1.12): *между каждыми двумя соседними, меньшими чем x_1, корнями интеграла $y(x) \in M_{kk}$ лежит нечетное число корней функции $A_{kk}(x)$.*

В пар. 2 я предполагаю, что n четно, $n \geq 4$, что функция $Q(x, \lambda)$ является непрерывной положительной функцией от x, λ, $x \in (-\infty, \infty)$, $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_1)$, и такой, что все решения из M_{ik} колеблются. В множестве интегралов M_{ik} затем вводится понятие центральной дисперсии $\varphi_\nu^{(ik)}(x, \lambda)$, и приводятся некоторые ее свойства. В теореме 2.2 доказана непрерывность центральной дисперсии $\varphi_\nu^{(ik)}(x, \lambda)$, $\nu \geq 0$ по переменной λ на интервале (Δ_0, Δ_1) для каждого $x \geq x_1$, а в случае, когда $i + k$ — нечетное число, для каждого $x \in (-\infty, \infty)$. Это свойство делает возможным решить краевую задачу, которая решается в пар 3 и 4:

Пусть n — четное число. Пусть $Q(x, \lambda)$ — непрерывная функция x, λ, $x \in \langle a, b \rangle$, $\lambda \in \langle \Delta_0, \Delta_1)$, пусть $Q(x, \Delta_0) = 0$, $Q(x, \lambda) > 0$ для $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_1)$ и пусть $\lim\limits_{\lambda \to \Delta_1 -} Q(x, \lambda) = \infty$ равномерно для $x \in \langle a, b \rangle$. Тогда краевая задача:

$$y^{(n)} + Q(x, \lambda), \quad y = 0\,, \tag{a}$$

$$y^{(j)}(x_1) = 0,\ j = 0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k-1\ k+1, \ldots, n-1\,, \tag{i}$$
$$0 \leq i < k \leq n-1\,,$$

$$y(x_2) = 0\,, \tag{ii}$$

$$y(x_3) = 0\,, \tag{iii}$$

где x_1, x_2, x_3 — точки интервала $\langle a, b \rangle$, которые могут быть упорядочены тремя следующими способами: α) $x_1 \leq x_2 < x_3$, β) $x_3 \leq x_2 \leq x_1$, γ) $x_2 < x_1 < x_3$ имеет в случае α, и β) бесконечно много простых действительных собственных значений, которые образуют возрастающую последовательность $\{\lambda_\nu^{(ik)}\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Собственная функция $y(x, \lambda_\nu^{(ik)})$, принадлежащая к собственному значению $\lambda_\nu^{(ik)}$ имеет в интервале (x_2, x_3) соотв. (x_3, x_2) в точности $(\nu - 1)$ корней, которые все являются простыми. (Теорема 3.1.) Если $i + k$ — нечетное число, то краевая задача имеет также и в случае γ) бесконечно много простых действительных собственных значений, которые образуют возрастающую последовательность $\{\lambda_\nu^{(ik)}\}_{\nu=2}^{\infty}$. Собственная функция $y(x, \lambda_\nu^{(ik)})$, принадлежащая к собственному значению $\lambda_\nu^{(ik)}$, имеет в интервале (x_2, x_3) в точности $(\nu - 1)$ корней, причем все они простые; x_1 считается корнем только в том случае, если $y^{(i)}(x_1, \lambda_\nu^{(ik)}) = 0$. (Теорема 3.3.)

Случай β) при нечетном n в работе не решен. В случае α) и γ) существует возрастающая последовательность простых действительных значений $\{\lambda_\nu^{(k)}\}$, где $\nu = 1, 2, \ldots$ в случае α), а в случае γ) $\nu = 2, 3, \ldots$ Собственная функция, относящаяся к $\lambda_\nu^{(ik)}$ имеет в случае α) в интервале (x_2, x_3), а в случае γ) в интервале (x_1, x_3) в точности $(\nu - 1)$ корней, причем все они простые (все сказанное выше о x_1 остается в силе).

Та же краевая задача решена и в том случае, когда от функции $Q(x, \lambda)$ требуется, чтобы она была непрерывной функцией от x, λ, $x \in \langle a, b \rangle$, $\lambda \in (\Delta_0, \Delta_1)$, и чтобы $\lim\limits_{x \to \Delta_1 -} Q(x, \lambda) = \infty$ равномерно для $x \in \langle a, b \rangle$. Полученные результаты похожи на результаты, приведенные выше. (Смотри теоремы 3.2, 3.4, 4.3.)