Czechoslovak Mathematical Journal

Jan Mařík

Представление функционала в виде интеграла

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 4, 467–487

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100163

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1955

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Чехословацкий математический журнал, т. 5 (80) 1955

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага.

(Поступило в редакцию 17/II 1955 г.)

Функционал на линейном пространстве, элементами которого являются функции, можно в некоторых случаях представить в виде интеграла (по некоторой мере). В статье исследуется существование и единственность такого представления.

1. Известно, что абстрактный интеграл можно определить не только при помощи меры, но также — по крайней мере при некоторых условиях — при помощи линейного функционала на пространстве, элементами которого являются функции на соответствующем множестве. Вопрос о равносильности этих определений тесно связан с вопросом о представимости соответствующего функционала в виде интеграла, определенного при помощи меры. В настоящей работе приводятся условия, при которых такое представление возможно, и доказывается теорема о единственности соответствующей меры (соотв. σ-аддитивной функции). Эти результаты применяются в частности к пространствам, являющимся частью множества всех непрерывных функций на данном топологическом пространстве.

2. Пусть $\mathfrak{A}$ — непустая система множеств. Мы скажем, что $\mathfrak{A}$ есть тело (множеств), если с каждыми двумя элементами системы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}$ входят и их соединение и разность. Если каждый элемент тела $\mathfrak{A}$ является частью некоторого фиксированного множества P и если имеет место $P \in \mathfrak{A}$, то мы скажем, что $\mathfrak{A}$ есть алгебра (на множестве P). Если $\mathfrak{M}$ — произвольная система множеств, то $\mathfrak{M}_\sigma$ (соотв. $\mathfrak{M}_\delta$) обозначает систему всех $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ (соотв. $\prod_{n=1}^{\infty} M_n$), где $M_n \in \mathfrak{M}$ для $n = 1, 2, \ldots$. Если $\mathfrak{A}$ — тело и если $\mathfrak{A}_\sigma \subset \mathfrak{A}$ (соотв. $\mathfrak{A}_\delta \subset \mathfrak{A}$), то мы скажем, что $\mathfrak{A}$ есть σ-тело (соотв. δ-тело). Если алгебра $\mathfrak{A}$ является σ-телом, мы скажем, что $\mathfrak{A}$ есть σ-алгебра. Известно, что всякое σ-тело является одновременно δ-телом; наоборот, ясно, что не всякое δ-тело является σ-телом. Если же, однако, алгебра множеств есть δ-тело, то она будет и σ-алгеброй, а значит и σ-телом. Тело множеств $\mathfrak{T}$ будет δ-телом тогда и только тогда, если для любого $T \in \mathfrak{T}$ справедливо утверждение, что система всех $A \subset T$, где $A \in \mathfrak{T}$, образует σ-алгебру на множестве T. Если $\mathfrak{T}$ есть δ-тело, то система $\mathfrak{T}_\sigma$ будет σ-телом.

3. Пусть $\mathfrak{M}$ — система множеств, элементы которой представляют собой части некоторого множества P. Символом

$$\zeta(\mathfrak{M})$$

мы будем обозначать систему всех $A \subset P$, пересечение которых с любым элементом из системы $\mathfrak{M}$ входит так же в $\mathfrak{M}$. Очевидно, всегда имеет место $P \in \zeta(\mathfrak{M})$. Если $\mathfrak{M}$ — тело (δ-тело), то $\zeta(\mathfrak{M})$ есть алгебра (σ-алгебра), содержащая $\mathfrak{M}$.

4. Мы скажем, что функция μ[1]) на теле множеств $\mathfrak{T}$ аддитивна, если сумма $\mu(A) + \mu(B)$ имеет смысл и равна $\mu(A + B)$ для любых двух дизъюнктных элементов A, B тела $\mathfrak{T}$. Если же имеет место даже

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(\sum_{n=1}^{\infty} A_n)$$

для любой дизъюнктной последовательности $\{A_n\}$ элементов из $\mathfrak{T}$, соединение которой входит также в $\mathfrak{T}$, то мы скажем, что функция μ является σ-аддитивной. Неотрицательную σ-аддитивную функцию на теле множеств мы будем называть мерой.

5. Каждую меру, определенную на δ-теле $\mathfrak{T}$, можно, очевидно, одним и только одним способом распространить на σ-тело $\mathfrak{T}_\sigma$. Если μ — мера на σ-теле $\mathfrak{S}$, то всегда можно (иногда даже различными способами) распространить меру μ на некоторую σ-алгебру. Например, на σ-алгебре $\zeta(\mathfrak{S})$ (см. 3) можно определить распространение меры μ при помощи предписания $\mu(A) = \infty$ для $A \in \zeta(\mathfrak{S}) - \mathfrak{S}$. Как видно, определенную на δ-теле меру можно всегда распространить на некоторую σ-алгебру.

6. При определении интеграла при помощи меры обычно предполагается, что мера задана на какой-либо σ-алгебре. При определении интеграла мы также воспользуемся мерой, заданной на δ-теле; благодаря этому (впрочем, чисто формальному) обобщению мы получим более простую формулировку наших теорем.

Пусть $\mathfrak{T}$ есть δ-тело, элементами которого являются части множества P. Мы скажем, что функция f на множестве P $\mathfrak{T}$-измерима, если

$$E[x; f(x) > c] \in \mathfrak{T} \quad \text{для любого} \quad c > 0$$

и

$$E[x; f(x) < c] \in \mathfrak{T} \quad \text{для любого} \quad c < 0\,.$$

Если теперь μ — мера на $\mathfrak{T}$ и если f — $\mathfrak{T}$-измеримая функция, то можно определить $\int_P f \, \mathrm{d}\mu$ как $\int_P f \, \mathrm{d}\tilde{\mu}$, где $\tilde{\mu}$ — произвольное распростране-

[1]) Мы будем всегда предполагать, что значения функций — или вещественные числа или $\pm\infty$; операции, производимые над этими элементами, определим обычным образом.

ние меры μ на произвольную σ-алгебру, содержащую $\mathfrak{T}$.[2]) Как видно, безразлично, какое именно распространение выбрать; далее ясно, что для интеграла, определенного для $\mathfrak{T}$-измеримых функций при помощи меры на δ-теле $\mathfrak{T}$, справедливы те же основные теоремы, как и для интеграла, определенного при помощи меры на какой-либо σ-алгебре.[3])

7. Мы будем исходить из следующих предположений:[4])

Пусть P — непустое множество; пусть Z — линейное пространство, элементами которого являются (конечные действительные) функции на ножестве P. Пусть будет

1. $f \in Z \Rightarrow |f| \in Z$,
2. $f \in Z \Rightarrow \min(f, 1) \in Z$.

Из 1. следует, что с каждыми двумя функциями f, g пространству Z принадлежат также и функции $\max(f, g)$, $\min(f, g)$.[5])

Пусть J — неотрицательный функционал на Z. Пусть выполнена импликация

$$f_n \in Z\,, \quad f_n \searrow 0^{6)} \Rightarrow J(f_n) \to 0\,.$$

Построим сначала вспомогательную систему R всех функций r на множестве P, для которых существуют $f_n \in Z$ так, что $f_n \nearrow r$. Для $r \in R$ положим

$$J_1(r) = \sup J(f)\,, \quad \text{где} \quad f \in Z\,, \quad f \leqq r\,.^{7)}$$

Нетрудно обнаружить, что из соотношения $f_n \nearrow r$, где $f_n \in Z$, следует $J(f_n) \to J_1(r)$; отсюда ясно, что для $r \in Z$ будет $J_1(r) = J(r)$, так что вместо J_1 можно снова писать J. Пусть теперь для произвольной функции f на множестве P

$$\bar{J}(f) = \inf J(r)\,, \quad \text{где} \quad r \in R\,, \quad r \geqq f\,,^{8)}$$
$$\underline{J}(f) = -\bar{J}(-f)\,.$$

[2]) Если $\int\limits_P f\, d\tilde{\mu}$ не существует, то мы скажем, конечно, что не существует и $\int\limits_P f\, d\mu$.

[3]) Не представляло бы, конечно, затруднений непосредственное определение интеграла $\int\limits_P f\, d\mu$ без перехода к σ-алгебре; мы воспользовались приведенным способом лишь для того, чтобы перевести дело на хорошо известную теорию.

[4]) Настоящий параграф является по существу содержанием работы Даниелля [1]. Однако, Даниелль не предполагает справедливости приведенного ниже соотношения 2.; о важности этого соотношения см. сноску[9]). Доказательства всех утверждений парагр. 7 можно найти также в статье [6], которую автор написал не зная работы Даниелля.

[5]) Нетрудно обнаружить, что из 1. не вытекает 2. и, наоборот, из 2. не следует 1. Но, конечно, если функция $f(x) = 1$ является элементом Z и если справедливо 1., то автоматически имеет место и 2.

[6]) Символы $\nearrow$, $\searrow$ обозначают монотонную точечную сходимость.

[7]) Может быть также $J_1(r) = \infty$.

[8]) Если для функции f не существует $r \geqq f$ ($r \in R$), то $\bar{J}(f) = \inf \emptyset = \infty$.

Всегда имеет место $\bar{J}(f) \geq \underline{J}(f)$; систему тех функций f, для которых $\bar{J}(f) = \underline{J}(f) \neq \pm \infty$, обозначим через L. Если $f \in R$, то $J(f) = \bar{J}(f) = \underline{J}(f)$. Для $f \in L$ можно, следовательно, написать

$$J(f) = \underline{J}(f) = \bar{J}(f) .$$

Теперь можно показать, что функционал J на множестве L имеет свойства интеграла Лебега; если, например, f, g — конечные функции из L, то и функция $f + g$ принадлежит L и имеет место $J(f + g) = J(f) + J(g)$.Если f_n являются элементами из L и если имеет место $f_n \nearrow f$, то

$$J(f_n) \nearrow \bar{J}(f) = \underline{J}(f) ; \tag{α}$$

итак, если в этом случае $\underline{J}(f) < \infty$, то будет и $f \in L$.

8. Для любой части A множества P мы можем теперь определить верхнюю и нижнюю меру $\overline{m}$ и $\underline{m}$ при помощи предписания

$$\overline{m}(A) = \bar{J}(c_A) , \quad \underline{m}(A) = \underline{J}(c_A) ,$$

где c_A есть характеристическая функция множества A.

Пусть $\mathfrak{A}$ — система всех A, для которых $c_A \in L$ или $\underline{m}(A) = \overline{m}(A) < \infty$. Для $A \in \mathfrak{A}$ мы будем писать $m(A) = \underline{m}(A) = \overline{m}(A)$. $\mathfrak{A}$ будет, очевидно, δ-телом и функция m будет на $\mathfrak{A}$ σ-аддитивной.[9])

Из предположения 2. следует ,что для любого $f \in L$ и любого $c > 0$ (соотв. $c < 0$) имеет место

$$E[x; f(x) > c] \in \mathfrak{A} \quad (\text{соотв.} \quad E[x; f(x) < c] \in \mathfrak{A}) ;$$

следовательно, каждая функция $f \in L$ является $\mathfrak{A}$-измеримой. (См. [6], стр. 189.) Если теперь f есть произвольная неотрицательная функция из L, то можно построить последовательность неотрицательных ,,ступенчатых'' $\mathfrak{A}$-измеримых функций f_n так, что $f_n \nearrow f$. Для любого n будет, очевидно, $J(f_n) = \int_P f_n \, \mathrm{d}m$; из ($\alpha$) (пар. 7) и из известной теоремы о перестановке предела и интеграла следует далее

$$J(f) = \lim J(f_n) = \lim \int_P f_n \, \mathrm{d}m = \int_P f \, \mathrm{d}m .$$

---

[9]) Все это осталось бы в силе и в том случае, если бы требование 2. не было выполнено. Дальнейший путь был бы, однако, прегражден; если 2. не имеет места, то функции из системы Z могут и не быть $\mathfrak{A}$-измеримыми и тогда не имеет смысла говорить о их интеграле по мере m. В качестве примера можно привести систему всех функций, заданных в интервале $\langle 0, 1 \rangle$ предписанием $f(x) = kx$ (k — произвольное вещественное число), причем можно положить, напр., $J(f) = k$. Здесь имеет место $L = Z$; система $\mathfrak{A}$ содержит только пустое множество. Легко видеть, что и в этом случае функционал J можно представить в виде интеграла; однако, мы имеем $J(f) = \int_0^1 f \, \mathrm{d}\mu$ для любой меры μ, удовлетворяющей соотношению $\int_0^1 x \, \mathrm{d}\mu = 1$. Этим соотношением, очевидно, мера μ не определяется однозначно. Итак, без требования 2. невозможно доказать теорему о единственности меры, образующей функционал. Возникает вопрос, нельзя ли без требования 2. доказать хотя бы существование такой меры.

Итак,

$$J(f) = \int_P f \, \mathrm{d}m$$

для любой функции $f \in L$, как легко убедиться разложением функции f на положительную и отрицательную части. Это соотношение имеет, следовательно, место тем более для любого $f \in Z$.

9. Пусть мы имеем теперь какое-либо δ-тело $\mathfrak{T}$, являющееся частью $\mathfrak{A}$. Пусть μ — мера на $\mathfrak{T}$ такая, чтобы для любого $f \in Z$ имело место

$$J(f) = \int_P f \, \mathrm{d}\mu \, . \tag{β}$$

(Этим мы одновременно высказываем предположение, что любая функция $f \in Z$ является $\mathfrak{T}$-измеримой). Предельным переходом обнаружим, что (β) справедливо также для любого $f \in R$. Пусть $A \in \mathfrak{T}$, $\varepsilon > 0$. По определению числа $m(A) = J(c_A)$ существуют $r_1, r_2 \in R$ так, что $c_A \leqq r_1$, $-c_A \leqq r_2$ и кроме того

$$J(r_1) < m(A) + \varepsilon \, , \quad J(r_2) < -m(A) + \varepsilon \, .$$

Отсюда следует

$$m(A) - \varepsilon < -J(r_2) = \int_P (-r_2) \, \mathrm{d}\mu \leqq \int_P c_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A) \leqq \int_P r_1 \, \mathrm{d}\mu =$$
$$= J(r_1) < m(A) + \varepsilon \, ,$$

следовательно,

$$\mu(A) = m(A) \, .$$

Мы видим, что на δ-теле $\mathfrak{T}$ существует в точности одна мера (а именно, мера m) такая, чтобы для любого $f \in Z$ имело место соотношение (β).

Пусть теперь

$$\mathfrak{T}_Z$$

есть наименьшее δ-тело, содержащее все множества вида $E[x; f(x) > 1]$, где $f \in Z$. ($\mathfrak{T}_Z$ является, очевидно, наименьшим из всех δ-тел $\mathfrak{T}$ таких, что всякая функция $f \in Z$ является $\mathfrak{T}$-измеримой.) Если положить $\mu(A) = m(A)$ для $A \in \mathfrak{T}$, то соотношение (β) имеет, очевидно, место для любого $f \in Z$. Отсюда следует:

На δ-теле $\mathfrak{T}_Z$ существует одна и только одна мера μ такая, чтобы для любого $f \in Z$ имело место соотношение (β).[10])

10. Мы увидим, что аналогичную теорему можно доказать и без предположения, что функционал J неотрицателен; слово „мера" нужно, однако, заменить словами „σ-аддитивная функция". Соответствующий интеграл мы определяем так: Пусть $\mathfrak{T}$ есть δ-тело, элементами которого являются части множества P. Пусть φ есть σ-аддитивная функция на $\mathfrak{T}$; пусть

[10]) В этой теореме важно, что δ-тело $\mathfrak{T}_Z$ зависит лишь от системы Z, но не зависит от функционала J (в то время как напр. $\mathfrak{A}$ зависит и от J).

$\varphi(\emptyset) = 0$.[11]) Определим на $\mathfrak{T}$ функции φ_+, φ_- при помощи предписания $\varphi_+(T) = \sup \varphi(A)$, где $A \subset T$, $A \in \mathfrak{T}$, $\varphi_-(T) = \sup(-\varphi(A))$, где $A \subset T$, $A \in \mathfrak{T}$. Тогда супремумы, определяющие $\varphi_+(T)$ и $\varphi_-(T)$, будут даже максимумами. Хоть одна из функций φ_+, φ_- является, следовательно, конечной; если же функция φ конечна, то обе функции φ_+, φ_- конечны. Функции φ_+, φ_- являются мерами и $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$. Положим теперь

$$\int_P f \, \mathrm{d}\varphi = \int_P f \, \mathrm{d}\varphi_+ - \int_P f \, \mathrm{d}\varphi_- ,$$

если правая часть имеет смысл. (Если она лишена смысла, то мы скажем, конечно, что $\int_P f \, \mathrm{d}\varphi$ не существует.)

11. В дальнейшем нам понадобится следующая теорема:

Пусть P — непустое множество. Пусть Y — линейное пространство, элементами которого являются функции на P. Пусть одновременно с каждой функцией f в Y входит также функция $|f|$. Пусть J — аддитивный функционал на Y; пусть имеет место импликация

$$f_n \in Y , \quad f_n \searrow 0 \Rightarrow J(f_n) \to 0 .$$

Тогда функционал J можно представить в виде разности двух неотрицательных функционалов, для которых эта импликация также имеет место.

Доказательство. Если $f \geqq 0$, $f \in Y$, то положим

$$J_+(f) = \sup J(g) , \quad \text{где} \quad g \in Y , \quad 0 \leqq g \leqq f .$$

Легко убедиться (см. напр. [4], стр. 232—233), что J_+ есть аддитивный функционал на множестве всех неотрицательных элементов из Y; покажем, что J_+ принимает только конечные значения. Итак, предположим, что для некоторого $f \in Y$, где $f \geqq 0$, справедливо равенство $J_+(f) = \infty$. Тогда существует g_1 так, что имеет место $0 \leqq g_1 \leqq f$, $J(g_1) \geqq 1 + |J(f)|$. Если $J_+(g_1) = \infty$, то положим $f_1 = g_1$; тогда получим

$$J_+(f_1) = \infty , \quad |J(f_1)| \geqq 1 , \quad 0 \leqq f_1 \leqq f . \tag{γ}$$

Если $J_+(g_1) < \infty$, то положим $f_1 = f - g_1$. Тогда $J_+(f_1) = \infty$, $0 \leqq f_1 \leqq f$; далее имеем $|J(f_1)| = |J(f) - J(g_1)| \geqq J(g_1) - |J(f)| \geqq 1$, так что снова имеет место (γ).

Таким образом мы построим последовательность функций f_n, удовлетворяющих соотношениям

$$J_+(f_n) = \infty , \quad |J(f_n)| \geqq n , \quad 0 \leqq f_n \leqq f_{n-1}$$

для $n = 1, 2, \ldots$; положим $f = f_0$.

[11]) Если бы было $\varphi(\emptyset) \neq 0$, то было бы или тождественно $\varphi(A) = +\infty$ или тождественно $\varphi(A) = -\infty$; эти тривиальные случаи можно, очевидно, исключить из рассмотрения.

Тогда будет $f = f_0 \geqq \frac{f_1}{1} \geqq \frac{f_2}{2} \geqq \ldots \geqq 0$, $0 \leqq \frac{f_n}{n} \leqq \frac{f}{n} \to 0$, следовательно, $\frac{f_n}{n} \searrow 0$, однако $J\left(\frac{f_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot J(f_n) \geqq 1$, что противоречит предположению.

Итак, мы доказали, что J_+ принимает только конечные значения. Функционал J_+ можно, очевидно, одним и только одним способом расширить на всё Y; если далее положить $J_- = J_+ - J$, то J_- будет неотрицательным функционалом и $J = J_+ - J_-$.

Докажем теперь, что $J_+(f_n) \to 0$, если $f_n \in Y$, $f_n \searrow 0$. Предположим, что для некоторой последовательности $f_n \searrow 0$ это не имеет места. Тогда последовательность $J_+(f_n)$ имеет положительный предел 2ε. Существуют $g_n \in Y$ так, что

$$J(g_n) > J_+(f_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad 0 \leqq g_n \leqq f_n .$$

Пусть $h_n = \min(g_1, \ldots, g_n)$. Докажем при помощи индукции, что

$$J(h_n) > J_+(f_n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^i} . \tag{*}$$

Это соотношение, очевидно, справедливо для $n = 1$; пусть оно справедливо для некоторого n. Тогда $h_{n+1} = \min(h_n, g_{n+1}) = g_{n+1} - k_n$, где $k_n = \max(g_{n+1} - h_n, 0)$. Тогда будет $k_n \leqq f_n - h_n$, следовательно, $0 \leqq h_n + k_n \leqq f_n$, $J(h_n) + J(k_n) \leqq J_+(f_n)$, откуда

$$J(k_n) \leqq J_+(f_n) - J(h_n) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^i} .$$

Далее имеем

$$J(h_{n+1}) = J(g_{n+1}) - J(k_n) > J_+(f_{n+1}) - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^i} = J_+(f_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\varepsilon}{2^i} .$$

Таким образом мы выполнили один этап индукции и доказали справедливость соотношения (*) для любого n. Отсюда получаем

$$J(h_n) > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon ,$$

что невозможно, так как $0 \leqq h_n \leqq g_n \leqq f_n$, $f_n \searrow 0$, $h_{n+1} \leqq h_n$, следовательно, $h_n \searrow 0$. Из соотношения $f_n \in Y$, $f_n \searrow 0$ следует $J_+(f_n) \to 0$, а значит, и $J_-(f_n) \to 0$. Теорема доказана.

12. Теорему, приведенную в конце пар. 9, можно теперь обобщить так:

Пусть P — непустое множество; пусть Z — линейное пространство, элементами которого являются вещественные функции на множестве P. Пусть

$$|f| \in Z , \quad \min(f, 1) \in Z$$

для всякого $f \in Z$. *Пусть* J *— аддитивный функционал на* Z, *удовлетворяющий соотношению*

$$f_n \in Z \ , \quad f_n \searrow 0 \Rightarrow J(f_n) \to 0 \ .$$

Пусть $\mathfrak{T}_Z$ *— наименьшее* δ*-тело, содержащее все множества* $E[x;\ f(x) > 1]$, *где* $f \in Z$. *Тогда на* $\mathfrak{T}_Z$ *существует одна и только одна* σ*-аддитивная функция* φ *такая, что для любого* $f \in Z$ *имеет место*

$$J(f) = \int_P f \, \mathrm{d}\varphi \ ;$$

функция φ *конечна.*

Доказательство. Согласно предыдущим теоремам на $\mathfrak{T}_Z$ существуют конечные меры μ, ν такие, что для любого $f \in Z$

$$J(f) = \int_P f \, \mathrm{d}\mu - \int_P f \, \mathrm{d}\nu \ .$$

Положив $\varphi = \mu - \nu$, получим

$$J(f) = \int_P f \, \mathrm{d}\varphi$$

для любого $f \in Z$. Пусть теперь ψ — такая σ-аддитивная функция на $\mathfrak{T}_Z$, что для любого $f \in Z$ имеет место

$$J(f) = \int_P f \, \mathrm{d}\psi \ .$$

Тогда для любого $f \in Z$ справедливо также

$$\int_P f \, \mathrm{d}\varphi_+ - \int_P f \, \mathrm{d}\varphi_- = \int_P f \, \mathrm{d}\psi_+ - \int_P f \, \mathrm{d}\psi_-$$

или

$$\int_P f \, \mathrm{d}(\varphi_+ + \psi_-) = \int_P f \, \mathrm{d}(\psi_+ + \varphi_-) \ .$$

Мы видим, что меры $\varphi_+ + \psi_-$, $\psi_+ + \varphi_-$ определяют на Z один и тот же функционал. Отсюда, согласно пар. 9, следует $\varphi_+ + \psi_- = \psi_+ + \varphi_-$ и, значит, $\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \psi_+ - \psi_- = \psi$.

Замечание. Нетрудно обнаружить, что функционалу J_+ принадлежит мера φ_+.

13. В конкретных случаях нас, как правило, интересует вопрос о представлении, напр., всех функционалов, являющихся на данном линейном пространстве непрерывными в некоторой топологии. Известно, однако, что при очень общих условиях каждый непрерывный функционал можно представить в виде разности двух неотрицательных функционалов. (См. напр. [7], стр. 18—19.) Поэтому мы ограничимся в дальнейшем исследованием неотрицательных функционалов. Чтобы выражаться более сжато, введем следующее определение:

14. Пусть P — непустое множество. Пусть Z — линейное пространство, элементами которого являются функции на множестве P. Пусть имеет место $|f| \in Z$, $\min(f, 1) \in Z$ для любой функции $f \in Z$. Далее предположим, что для любого неотрицательного функционала J на Z справедлива импликация

$$f_n \in Z\,,\quad f_n \searrow 0 \Rightarrow J(f_n) \to 0\,.$$

Тогда мы скажем, что пространство Z *обладает свойством* (J).

15. Мы видели, что всякий неотрицательный функционал на пространстве, обладающем свойством (J), может быть представлен в виде интеграла. Постараемся же найти какое-либо условие, достаточное для того, чтобы некоторое пространство имело свойство (J). Но, сначала докажем одну теорему отрицательного характера.

16. *Пусть Y — линейное пространство, элементами которого являются ограниченные функции на данном непустом множестве P. Пусть вместе с каждой функцией f в Y входит также функция $|f|$. Пусть существуют функции $f_n \in Y$ так, что $f_n \searrow 0$, причем, однако, сходимость не является равномерной. Тогда Y не обладает свойством (J).*

Доказательство. Определим на пространстве Y норму при помощи предписания $\|f\| = \sup\limits_{x \in P} |f(x)|$. Известно (см. [3]), что пространство Y можно представить как пространство Y^*, элементы которого – непрерывные функции на некотором компактном пространстве Q. Если $f_n \searrow 0$ $(f_n \in Y)$ и если функции f_n соответствует функция f_n^*, то, конечно, $f_1^* \geqq f_2^* \geqq \ldots \geqq 0$. Если же $f_n^*(t) \to 0$ для любого $t \in Q$, то сходимость функций f_n^*, а, значит и сходимость функций f_n, равномерна. Итак, если сходимость функций f_n не является равномерной, то существует такое $t_0 \in Q$, что $\lim f_n^*(t_0) > 0$. Положим

$$J(f) = f^*(t_0)$$

для любого $f \in Y$. Тогда J — неотрицательный функционал, но не будет $J(f_n) \to 0$; следовательно, пространство Y не обладает свойством (J).

Замечание 1. Пусть P — топологическое пространство, на котором существует неограниченная непрерывная функция f. Тогда (ограниченная) последовательность $f_n(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{|f(x)|}{n}$ сходится к нулю монотонно, но неравномерно. Итак, множество всех *ограниченных* непрерывных функций на пространстве P не обладает свойством (J).

Замечание 2. Теорему 16 можно обобщить, напр., так: Пусть Y — линейное пространство, элементы которого — функции на множестве P. Пусть вместе с каждой функцией f в Y попадает и функция $|f|$. Пусть $\emptyset \neq P_0 \subset P$. Пусть F — положительная функция на P_0. Пусть для любого $f \in Y$ функция $\dfrac{f}{F}$ ограничена на P_0. Пусть существуют функции $f_n \in Y$ так, что $f_n \searrow 0$, причем, однако, сходимость последовательности $\frac{f_n}{F}$ не является равномерной на множестве P_0. Тогда Y не обладает свойством (J). (Нетрудное доказательство предоставляется читателю.)

17. Мы видим, что в теореме 16 важную роль играет ограниченность функций пространства Y. Отказавшись от этого условия, мы получим совершенно иное положение вещей. В основе исследования этого случая лежит следующая теорема:

18. *Пусть Y — линейное пространство, элементы которого — функции на непустом множестве P. Пусть $f_n \in Y$, $f_n \searrow 0$. Пусть J — неотрицательный функционал на Y. Пусть для всякого $\varepsilon > 0$ существуют функции f, $h \in Y$ и последовательность индексов $i_1 < i_2 < \ldots$ так, что $J(f) < \varepsilon$ и что для любого натурального числа N*

$$\sum_{n=1}^{N} (f_{i_n} - f) \leqq h .$$

Тогда $J(f_n) \to 0$.

Доказательство. Пусть не имеет места $J(f_n) \to 0$. Тогда $J(f_n) \searrow 2\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Возьмем функции f, h и последовательность $i_1 < i_2 < \ldots$ согласно условиям теоремы. Тогда получим $J(f_{i_n} - f) = J(f_{i_n}) - J(f) > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$, так что имеет место $N\varepsilon < \sum_{n=1}^{N} J(f_{i_n} - f) = J(\sum_{n=1}^{N} (f_{i_n} - f)) \leqq J(h)$ для любого натурального N, что невозможно.

Замечание 1. В теоремах из параrр. 20—26 мы будем пользоваться теоремой 18 следующим образом: для данной последовательности $f_n \searrow 0$ определим некоторую функцию $g \in Y$ и индексы i_n независимо от функционала J и от числа ε. Далее для каждого $\eta > 0$ найдем функцию $h \in Y$ так, чтобы было $\sum_{n=1}^{\infty} (f_{i_n} - \eta g)_+ \leqq h$.[12]) Тогда мы без труда выполним условия теоремы 18, положив $f = \eta g$ при достаточно малом $\eta > 0$.

Замечание 2. Если, наоборот, J есть неотрицательный функционал на Y, $f_n \in Y$, $f_n \searrow 0$, $\varepsilon > 0$ и если имеет место $J(f_n) \to 0$, то можно выбрать индекс p настолько большим, чтобы было $J(f_p) < \varepsilon$; если теперь положить $f = f_p$, $h = \sum_{n=1}^{p} f_n$, то ясно, что для любого натурального N имеет место $\sum_{n=1}^{N} (f_n - f) \leqq h$.

19. В целях более ясной формулировки последующих теорем введем еще некоторые обозначения. Если f — функция, пусть

$$N_f = E[x; f(x) \neq 0] .$$

[12]) f_+ обозначает в дальнейшем $\max (f, 0)$.

Если $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ — какие-либо системы функций на множестве P, если $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ и если справедлива импликация

$$f \in \mathfrak{M}, \quad g \in \mathfrak{N}, \quad N_f \subset N_g \Rightarrow f \in \mathfrak{N},$$

то мы скажем, что $\mathfrak{N}$ — *нормальная часть* $\mathfrak{M}$. (Если, напр., $\mathfrak{M}$ — система всех непрерывных функций на топологическом пространстве P и если $\mathfrak{N}$ — система всех непрерывных функций f, для которых $\overline{N}_f$ компактно, то $\mathfrak{N}$ будет нормальной частью $\mathfrak{M}$.)

20. *Пусть $\mathfrak{A}$ есть σ-алгебра на множестве P. Пусть линейное пространство Z является нормальной частью множества всех конечных $\mathfrak{A}$-измеримых функций. Тогда Z обладает свойством (J).*

Доказательство. Пространство Z содержит, очевидно, вместе со всякой функцией f и функцию $|f|$ и $\min(f, 1)$. Пусть теперь $f_n \in Z$, $f_n \searrow 0$. Возьмем (см. замечание 1 к теореме 18) $i_n = n$, $g = f_1$, $h = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (f_n - \eta f_1)_+$. Функция h, очевидно, $\mathfrak{A}$-измерима. Если для данного x $f_1(x) = 0$, то будет и $f_2(x) = f_3(x) = \ldots = 0$, а, значит, и $h(x) = 0$. Если $f_1(x) > 0$, то для больших n будет $f_n(x) < \eta f_1(x)$, так что ряд, определяющий $h(x)$, содержит только конечное число ненулевых членов. Следовательно, функция h конечна. Так как $N_h \subset N_{f_1}$, будет $h \in Z$. Итак, пространство Z обладает свойством (J).

21. Если в предыдущей теореме в качестве системы Z взять множество всех конечных $\mathfrak{A}$-измеримых функций, то ясно, что для всякого неотрицательного функционала J на Z существует в точности одна мера μ на алгебре $\mathfrak{A}$ (так как, очевидно, $\mathfrak{A} = \mathfrak{T}_Z$) так, чтобы для любого $f \in Z$ имело место $J(f) = \int\limits_P f \,\mathrm{d}\mu$. Тогда каждая конечная $\mathfrak{A}$-измеримая функция будет интегрируемой по мере μ. Исследуем теперь такого рода меру более подробно.

Если бы существовала дизъюнктная последовательность $B_1, B_2, \ldots$ элементов из $\mathfrak{A}$, для которых имело бы место $\mu(B_n) > 0$, то можно было бы легко построить конечную неотрицательную $\mathfrak{A}$-измеримую функцию f так, чтобы $\int\limits_P f \,\mathrm{d}\mu = \infty$. Следовательно, такой последовательности $B_1, B_2, \ldots$ не существует; отсюда легко вывести, что множество P (поскольку оно обладает положительной мерой) можно разбить на конечное число дизъюнктных множеств $A_1, \ldots, A_n$, которые хотя и обладают положительной мерой, но ни одно из которых уже не содержит множества с меньшей положительной мерой. Если еще положить $\mu_i(A) = \mu(AA_i)$ для любого $A \in \mathfrak{A}$ $(i = 1, \ldots, n)$, то ясно, что меру μ можно выразить в виде суммы двузначных мер.

Обратно, если μ равна сумме конечного числа конечных двузначных мер, то каждая конечная $\mathfrak{A}$-измеримая функция является μ-интегрируемой.

Для случая, когда $\mathfrak{A}$ — система всех частей данного множества, утверждение настоящего параграфа приводит Г. В. Мэки (*G. W. Mackey*) в работе [5].

22. Зададимся опять σ-алгеброй $\mathfrak{A}$ на множестве P. Предположим, что на $\mathfrak{A}$ дана мера ν; возьмем кроме того $p > 0$ и образуем систему Z_p всех конечных $\mathfrak{A}$-измеримых функций f,[13]) для которых $\int_P |f|^p \, d\nu < \infty$. Тогда справедлива следующая теорема:

Пусть линейное пространство Z является нормальной частью Z_p. Тогда Z обладает свойством (J).

Доказательство. Если $f_n \in Z$, $f_n \searrow 0$, то и $f_n^p \searrow 0$, следовательно, $\int_P f_n^p \, d\nu \to 0$. Возьмем (см. замечание 1 к теореме 18) индексы $i_1 < i_2 < \ldots$ так, чтобы имело место $\sum_{n=1}^{\infty} \int_P f_{i_n}^p \, d\nu < \infty$ в случае $p < 1$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (\int_P f_{i_n}^p \, d\nu)^{\frac{1}{p}} < \infty$ в случае $p \geqq 1$. Каждому $\eta > 0$ поставим теперь в соответствие функцию $h = \sum_{n=1}^{\infty} (f_{i_n} - \eta f_1)_+$. Нетрудно убедиться, что $h \in Z$. Отсюда следует, что Z обладает свойством (J).

23. Предположим теперь, что P — топологическое пространство. Мы увидим, что и в этом случае имеет место теорема, аналогичная теореме из предыдущего параграфа:

Пусть линейное пространство Z является нормальной частью множества всех непрерывных функций на пространстве P. Тогда Z обладает свойством (J).

Доказательство. Пусть $f_n \in Z$, $f_n \searrow 0$. Пусть (см. замечание 1 к теореме 18) $g = \sqrt{f_1}$. Каждому $\eta > 0$ поставим в соответствие функцию $h = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n - \eta g)_+$. Если $g(x) > 0$, то для некоторого N будет $f_N(x) < \eta g(x)$. Ввиду непрерывности это соотношение справедливо и в некоторой окрестности U точки x. Если $n > N$, $y \in U$, то тем более будет $f_n(y) < \eta g(y)$. На множестве U функция h дана, следовательно, суммой $\sum_{n=1}^{N-1} (f_n - \eta g)_+$; поэтому она непрерывна в точке x. Если же $g(x) = 0$, то можно подобрать такую окрестность U точки x, чтобы для $y \in U$ было $g(y) \leqq \eta$. Тогда для любого n и любого $y \in U$ имеет место

$$f_n(y) \leqq f_1(y) = g^2(y) \leqq \eta g(y) ,$$

следовательно, $h(y) = 0$ для $y \in U$. Итак, функция h везде непрерывна; из соотношения $N_h \subset N_g = N_{f_1}$ следует $h \in Z$, $g \in Z$.

[13]) Мы имеем в виду действительно функции, а не классы функций.

24. Теореме предыдущего параграфа можно придать несколько иной вид. Для этого мы введем следующее определение: Если $\mathfrak{M}$ — система множеств, то пусть $\delta(\mathfrak{M})$ есть наименьшее δ-тело, содержащее $\mathfrak{M}$. Если P — топологическое пространство, то пусть $\mathfrak{S}^*$ есть система всех множеств вида $E[x; f(x) > 0]$, где f — непрерывная функция на P. Пусть $\mathfrak{B} = \delta(\mathfrak{S}^*)$. (Итак, $\mathfrak{B}$ есть наименьшая σ-алгебра, по отношению к которой все непрерывные функции измеримы.) Элементы системы $\mathfrak{B}$ мы назовем *множествами Бэра;* определенную на $\mathfrak{B}$ меру мы назовем *мерой Бэра*. Теперь имеет место:

Пусть линейное пространство Z является нормальной частью системы Y всех непрерывных функций на топологическом пространстве P. Пусть J — неотрицательный функционал на Z. Тогда существует мера Бэра μ так, что для любого $f \in Z$ имеет место

$$J(f) = \int_P f \, \mathrm{d}\mu \ ;$$

значения меры μ на $\mathfrak{T}_Z$[14]) *определяются функционалом J однозначно.*

Доказательство. Мы знаем, что на $\mathfrak{T}_Z$ существует в точности одна такая мера μ и что эту меру можно (см. 5) распространить на σ-алгебру $\zeta(\mathfrak{T}_Z)$. Поэтому достаточно доказать, что система $\zeta(\mathfrak{T}_Z)$ содержит все множества Бэра. Итак, нужно доказать, что $TB \in \mathfrak{T}_Z$ для любого $T \in \mathfrak{T}_Z$ и для любого $B \in \mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{V}$ — система всех множеств вида $E[x; f(x) > 1]$, где $f \in Z$. Докажем прежде всего, что $VG \in \mathfrak{V}$, коль скоро $V \in \mathfrak{V}$, $G \in \mathfrak{S}^*$. Действительно, в таком случае существуют $f \in Z$ и $g \in Y$ так, что $g \geqq 0$ и

$$V = E[x; f(x) > 1] \ , \quad G = E[x; g(x) > 1] \ ;$$

тогда мы получим

$$VG = E[x; h(x) > 1] \ ,$$

где $h = \min(f, g)$. Так как Z — нормальная часть Y, то $h \in Z$, откуда $VG \in \mathfrak{V}$.

Введем еще следующие обозначения: если A — множество, и $\mathfrak{M}$ — система множеств, то $A\mathfrak{M}$ будет обозначать систему всех AM, где $M \in \mathfrak{M}$. Докажем соотношение

$$A\delta(\mathfrak{M}) = \delta(A\mathfrak{M}) \ . \qquad (^*_*)$$

$A\delta(\mathfrak{M})$ является, очевидно, δ-телом, содержащим $A\mathfrak{M}$; итак,

$$A\delta(\mathfrak{M}) \supset \delta(A\mathfrak{M}) \ .$$

Пусть, наоборот, $\mathfrak{T}$ есть система всех $T \subset P$,[15]) для которых $AT \in \delta(A\mathfrak{M})$.

---

[14]) Определение $\mathfrak{T}_Z$ см. парагр. 9.

[15]) Мы предполагаем, что множество A и все элементы $\mathfrak{M}$ — части множества P.

Ясно, что $\mathfrak{T}$ есть δ-тело, содержащее $\mathfrak{M}$, и что $A\mathfrak{T} = \delta(A\mathfrak{M})$. Отсюда следует, что $\delta(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{T}$, следовательно

$$A\delta(\mathfrak{M}) \subset A\mathfrak{T} = \delta(A\mathfrak{M}) .$$

Таким образом соотношение $(^*_*)$ доказано.

Мы уже доказали, что $V\mathfrak{S}^* \subset \mathfrak{T}_Z$ для любого $V \in \mathfrak{V}$. Значит, будет и

$$V\mathfrak{B} = V\delta(\mathfrak{S}^*) = \delta(V\mathfrak{S}^*) \subset \mathfrak{T}_Z$$

для любого $V \in \mathfrak{V}$ или

$$B\mathfrak{B} \subset \mathfrak{T}_Z$$

для любого $B \in \mathfrak{B}$. Отсюда следует

$$B\mathfrak{T}_Z = B\delta(\mathfrak{B}) = \delta(B\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{T}_Z$$

для любого $B \in \mathfrak{B}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Для случая, когда Z есть система всех непрерывных функций на данном пространстве, эту теорему приводит Э. Хьюитт (*E. Hewitt*) в [2].

25. Теорему параграфа 23 можно обобщить следующим образом:

Пусть ν — мера Бэра на P; пусть $p > 0$. Пусть далее Y_p — множество всех непрерывных функций f на пространстве P, для которых $\int\limits_P |f|^p \,\mathrm{d}\nu < \infty$. Пусть Z — нормальная часть Y_p. Тогда Z обладает свойством (J).

Доказательство. Пусть $f_n \in Z$, $f_n \searrow 0$. Возьмем (см. замечание 1 к теореме 18) индексы $i_1 < i_2 < \ldots$ так, чтобы имело место $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_P f_{i_n}^p \,\mathrm{d}\nu < \infty$ в случае $p < 1$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\int\limits_P f_{i_n}^p \,\mathrm{d}\nu)^{\frac{1}{p}} < \infty$ в случае $p \geqq 1$. Тогда $\int\limits_P (\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{i_n})^p \,\mathrm{d}\nu < \infty$. (Функция $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{i_n}$ может, конечно, и не быть непрерывной.)

Пусть далее $A_1 = E[x; f_1(x) > 1]$, $A_n = E\left[x; \dfrac{1}{n-1} \geqq f_1(x) > \dfrac{1}{n}\right]$ для $n > 1$. Имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f_1^p \,\mathrm{d}\nu = \int\limits_P f_1^p \,\mathrm{d}\nu < \infty$. Поэтому существуют конечные положительные числа c_n так, что $c_n \nearrow \infty$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \int\limits_{A_n} f_1^p \,\mathrm{d}\nu < \infty$. Положим $b_n = c_n^{\frac{1}{p}}$ и определим в интервале $\langle 0, \infty)$ функцию φ_0 при помощи предписания

$$\varphi_0(0) = 0 , \quad \varphi_0\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{b_n} ,$$

$$\varphi_0 \text{ — линейна в каждом интервале } \left\langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right\rangle,$$

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{b_1} \text{ для } t \geqq 1.$$

Далее, пусть для $t \geqq 0$

$$\varphi(t) = \max\,(\varphi_0(t), \sqrt{t}) .$$

Следовательно, функция φ непрерывна и не убывает в $\langle 0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(t) \geqq \frac{1}{b_n}$ для $t \geqq \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Пусть, далее,

$$\psi(0) = 0 ,$$

$$\psi(t) = \frac{t}{\varphi(t)} \quad \text{для} \quad t > 0 .$$

Так как для $t > 0$ имеем $\psi(t) \leqq \frac{t}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}$, то функция ψ непрерывна в $\langle 0, \infty)$ и в этом интервале имеет место

$$t = \varphi(t) \,.\, \psi(t) .$$

Пусть g, k — функции на пространстве P, определяемые соотношениями

$$g(x) = \psi(f_1(x)) , \quad k(x) = \varphi(f_1(x)) .$$

Функции g, k непрерывны и имеет место $f_1 = gk$. Далее для $x \in A_n$ получаем $g(x) = \frac{f_1(x)}{\varphi(f_1(x))} \leqq b_n f_1(x)$, следовательно

$$\int_P g^p \,\mathrm{d}\nu \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} b_n^p f_1^p \mathrm{d}\nu = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{A_n} f_1^p \,\mathrm{d}\nu < \infty .$$

Так как $N_g = N_{f_1}$, то $g \in Z$. Возьмем теперь $\eta > 0$ и образуем функцию $h = \sum_{n=1}^{\infty} (f_{i_n} - \eta g)_+$. Если $f_1(x) > 0$, то будет и $g(x) > 0$ и точно так же, как в пар. 23, обнаружим, что функция h непрерывна в точке x. Если $f_1(x) = 0$, то будет и $k(x) = 0$ и в некоторой окрестности U точки x будет $k(y) < \eta$; тогда для любого $y \in U$ и для любого n имеет место

$$f_{i_n}(y) \leqq f_1(y) = g(y)\, k(y) \leqq \eta g(y) .$$

Отсюда снова легко вытекает, что функция h непрерывна; очевидно, будет $h \leqq \sum_{n=1}^{\infty} f_{i_n}$. Дальнейший ход рассуждений очевиден.

26. В виде примера нормальной части системы всех непрерывных функций на данном топологическом пространстве P мы привели систему Z всех функций f, для которых замыкание множества N_f компактно. Из теоремы пар. 23 следует, что Z обладает свойством (J). Можно, однако, доказать более общую теорему. Для этого дадим следующее определение: Мы скажем, что множество $A \subset P$ *относительно псевдокомпактно*, если каждая функция f, непрерывная на P, является ограниченной на A. (Обратим внимание, что в следующей теореме и в теореме 27 не встречается предположение, что исследуемое пространство является нормальной частью какого-либо наперед заданного пространства.) Теперь имеет место утверждение:

Пусть P — топологическое пространство. Пусть Z — линейное пространство, элементами которого являются непрерывные функции на P. Пусть множество N_f относительно псевдокомпактно для любого $f \in Z$. Пусть вместе с каждой функцией f в Z входят также функции $|f|$ и $\min(f, 1)$. Пусть для каждого $f \in Z$, где $f \geqq 0$, существуют непрерывные неотрицательные функции g, k так, что $g \in Z$, $N_k \subset N_g$ и что $f \leqq gk$.[16]) *Тогда Z обладает свойством (J).*

Доказательство. Пусть $f_n \searrow 0$. Построим такие функции g, k для функции $f = f_1$. Возьмем $\eta > 0$; пусть $h_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n - \eta g)_+$. Пусть $F = E[x; k(x) \geqq \eta]$. Как и в пар. 25, обнаружим, что функция h_0 непрерывна и принимает на $P - F$ только нулевые значения. Образуем теперь вспомогательную функцию $k' = \min(k, \eta)$. Функция $\eta - k'$ неотрицательна, а для $x \in P - F$ — положительна. Функция g положительна на F, так как $N_k \subset N_g$. Следовательно, функция $g + \eta - k'$ всюду положительна, так что функция $g' = \dfrac{1}{g + \eta - k'}$ непрерывна на P и, значит, ограничена на $F \subset N_g$. Однако, для $x \in F$ имеем $g'(x) = \dfrac{1}{g(x)}$; поэтому существует $\delta > 0$ так, что для $x \in F$ будет $g(x) \geqq \delta$. Если на F $h_0(x) \leqq D$, то $h_0 \leqq \dfrac{D}{\delta} g$. В пар. 18, замечание 1, можно поэтому положить $h = \dfrac{D}{\delta} g$.

Замечание. Простым примером пространства, имеющего много „добрых свойств“ и не имеющего свойства (J), может служить множество Z всех непрерывных функций f в интервале $\langle 0, 1 \rangle$, для которых $f(0) = 0$ и для которых существует производная справа в точке 0. Из доказанной теоремы легко вытекает, однако, что множество Z_0 всех функций из системы Z, для которых производная справа в точке 0 равна 0, точно так же обладает свойством (J); действительно, каждому $f \in Z_0$, где $f \geqq 0$, можно поставить в соответствие функции

$$g(x) = \sqrt{x f(x)}\,, \quad k(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{x}}\ (g(0) = k(0) = 0)\,.$$

---

[16]) Если, напр., вместе с каждой функцией $f \geqq 0$ в Z входит и функция $\sqrt{f}$, то можно выбрать $g = k = \sqrt{f}$; если $1 \in Z$, то можно положить $g = 1$, $k = f$.

27. *Пусть K — компактное пространство, содержащее более одного элемента; пусть $b \in K$, $P = K - \{b\}$. Пусть Z — линейное пространство, элементами которого являются непрерывные функции на пространстве P. Пусть вместе с каждой функцией f в Z входят и финкции $|f|$ и $\min(f, 1)$. Пусть для каждого $x \in P$ существует $f \in Z$ так, что $f(x) \neq 0$; далее предположим, что для каждой неотрицательной функции $f \in Z$ существуют неотрицательные функции p, k так, что $p \in Z$, $k(x) \to 0$ для $x \to b$ (нет, однако, необходимости предполагать, что функция k непрерывна) и что имеет место $f \leqq pk$. Тогда Z обладает свойством (J).*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$, $f_n \in Z$, $f_n \searrow 0$. Подберем к функции f_1 функции p, k по условиям теоремы. Пусть теперь J — неотрицательный функционал на Z. Пусть η — такое положительное число, что имеет место $J(\eta p) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Образуем теперь компактное множество F, не содержащее точки b и обладающее тем свойством, что для любого $x \in P - F$ будет $k(x) < \eta$; на $P - F$ тогда будет $f_1(x) \leqq \eta p$. Так как для каждого $x \in P$ существует $f_x \in Z$ так, что $f_x(x) > 0$, то существует неотрицательная функция $q \in Z$, которая положительна на F. Подберем $\delta > 0$ так, чтобы $J(\delta q) < \frac{1}{2}\varepsilon$; пусть, наконец, $f = \eta p + \delta q$. Тогда $J(f) < \varepsilon$. Функция $h_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n - f)_+$ принимает на $P - F$ только нулевые значения, как видно из соотношения $f_n(x) \leqq f_1(x) \leqq \eta p(x) \leqq f(x)$ $(x \in P - F)$. Так как на множестве F функция f положительна, то функция h_0 непрерывна. Итак, для достаточно больших A будет $h_0 \leqq Af$; в теореме 18 можно, следовательно, положить $h = Af$.

Замечание. Из этой теоремы вытекает, например, что множество всех функций, непрерывных в интервале $\langle 1, \infty)$ и медленно возрастающих, обладает свойством (J). (Мы скажем, что функция f в интервале $\langle 1, \infty)$ медленно возрастает, если существуют числа A, n так, что $|f(x)| \leqq Ax^n$.) Точно так же множество всех функций, непрерывных в $\langle 1, \infty)$, медленно возрастающих и отличных от нуля только на множестве конечной меры, обладает свойством (J). Аналогично можно обнаружить, что и множество всех непрерывных функций f в $\langle 1, \infty)$, для которых существуют числа A и δ $(\delta < 1)$ так, что $|f(x)| \leqq Ax^\delta$, обладает свойством (J). Нетрудно, однако, убедиться, что множество Y всех непрерывных функций f в интервале $\langle 1, \infty)$, для которых существует A так, что $|f(x)| \leqq Ax$, уже не обладает свойством (J). Действительно, в замечании 2, пар. 16 можно положить

$$P_0 = \langle 1, \infty),\ F(x) = x,\ f_n(x) = \frac{x^2}{x+n}.$$

28. В дальнейшем нам понадобится следующая теорема о продолжении неотрицательного функционала:

Пусть Y, Z — линейные пространства, элементами которых являются конечные действительные функции на непустом множестве P. Пусть для *каждого $f \in Z$ существует $g \in Y$ так, что $g \geqq f$. Пусть J — неотрицательный функционал на Y. Тогда на Z существует неотрицательный функционал, который на Y совпадает с J.*

Доказательство — см. [4], стр. 345.

29. Из этой теоремы непосредственно следует:

Пусть пространство Z, элементами которого являются функции на множестве P, обладает свойством (J). Пусть линейное пространство Y является частью Z; пусть для каждого $f \in Z$ существует $g \in Y$ так, что $g \geqq f$. Пусть J — неотрицательный функционал на Y. Тогда существует такая мера μ, что для любого $g \in Y$ имеет место равенство

$$J(g) = \int_P g \, \mathrm{d}\mu \, .$$

30. *Пусть P — топологическое пространство. Пусть Y — линейное пространство, элементами которого являются непрерывные функции на P. Пусть множество N_f относительно псевдокомпактно*[17]) *для любого $f \in Y$. Пусть для каждой функции $f \in Y$ существуют неотрицательные функции g, k так, что $g \in Y$, k непрерывна на P, $N_k \subset N_g$ и что $|f| \leqq gk$. Пусть J — неотрицательный функционал на Y. Тогда на P существует мера Бэра μ так, что для любого $f \in Y$*

$$J(f) = \int_P f \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Доказательство. Пусть Z — множество всех непрерывных функций φ на пространстве P, для которых существует $p \in Y$ так, что $|\varphi| \leqq p$. Докажем прежде всего, что $Y \subset Z$. Итак, пусть $f \in Y$. Подберем к функции f функции g, k согласно условиям теоремы. Так как $N_k \subset N_g$ и так как множество N_g относительно псевдокомпактно, то функция k ограничена, $k \leqq A$. Следовательно, $|f| \leqq Ag$, причем $Ag \in Y$; отсюда следует $f \in Z$. Пусть теперь J — неотрицательный функционал на Y. Согласно параграфу 28 можно предположить, что J — неотрицательный функционал на Z. Нетрудно, однако, убедиться, что пространство Z удовлетворяет условиям теоремы пар. 26 и обладает, следовательно, свойством (J). Итак, функционал J можно представить в виде интеграла по некоторой мере. Так же, как и в пар. 24 теперь можно доказать, что эту меру можно распространить на меру Бэра.

Замечание 1. Частным случаем является, напр., следующая теорема: Пусть Y — линейное пространство, элементами которого являются непрерывные функции на компактном пространстве K. Пусть для каждого $f \in Y$ существует $g \in Y$, $g \geqq \sqrt{|f|}$. Тогда каждый неотрицательный функционал на пространстве Y можно представить в виде интеграла по некоторой мере Бэра на пространстве K.

---

[17]) См. пар. 26.

Замечание 2. Теорема 30 является некоторой модификацией теоремы пар. 26. Точно так же можно модифицировать теорему 27:

Пусть K — компактное пространство, содержащее более одного элемента; пусть $b \in K$, $P = K - \{b\}$. Пусть Y — линейное пространство, элементами которого являются непрерывные функции на пространстве P. Пусть для каждого $x \in P$ существует $f \in Y$ так, что $f(x) \neq 0$; далее предположим, что для каждой функции $f \in Y$ существуют неотрицательные функции p, k так, что $p \in Y$, $k(x) \to 0$ для $x \to b$ и что $|f| \leqq pk$. Тогда для каждого неотрицательного функционала J на Y существует мера Бэра μ на P так, что для любого $f \in Y$

$$J(f) = \int_P f \, \mathrm{d}\mu .$$

(Доказательство аналогично доказательству теоремы 30.) Обратим внимание на то, что в условиях этой теоремы уже не фигурирует требование, чтобы пространство Y содержало вместе с каждой функцией f и функцию $|f|$ или $\min(f, 1)$; эту теорему можно поэтому (так же, как и теорему 30) применять и к некоторым пространствам, элементами которых являются гладкие функции.

31. В параграфе 21 мы занимались пространством Z всех конечных $\mathfrak{A}$-измеримых функций, где $\mathfrak{A}$ — некоторая σ-алгебра. Теперь мы будем предполагать, что на $\mathfrak{A}$ уже заранее дана мера ν и обратимся к исследованию пространства Z/Z_0, где Z_0 — множество тех $f \in Z$, которые равны нулю почти всюду относительно меры ν.

Итак, пусть $\mathfrak{A}$ есть σ-алгебра на множестве P; пусть ν — мера на $\mathfrak{A}$. Множество $A \in \mathfrak{A}$ мы назовем *ν-атомом*, если $\nu(A) > 0$ и если для любого $B \in \mathfrak{A}$, где $B \subset A$, или $\nu(B) = \nu(A)$ или $\nu(B) = 0$.

Если $B \in \mathfrak{A}$, то пусть

$$\nu_B$$

обозначает меру, определенную соотношением $\nu_B(A) = \nu(AB)$ $(A \in \mathfrak{A})$.

Если все пространство P представляет собой соединение последовательности множеств конечной меры, скажем, что мера *σ-конечна*.

Теперь мы можем доказать следующую теорему:

Пусть ν есть σ-конечная мера на σ-алгебре $\mathfrak{A}$. Пусть Y — множество всех конечных $\mathfrak{A}$-измеримых функций; пусть Y_0 — множество всех функций из Y, равных нулю почти всюду (относительно ν). Пусть J — неотрицательный функционал на $Z = Y/Y_0$. Тогда существует мера μ со следующими свойствами:

1. *Мера μ является неотрицательной линейной комбинацией*[18]) *мер вида ν_A, где A есть ν-атом;*

---

[18]) Мы должны, конечно, допустить и пустую сумму.

2. $J(f) = \int_P f \,\mathrm{d}\mu$ *для любого* $f \in Z$.

Наоборот, каждая мера μ *со свойством* 1. *определяет на* Z *неотрицательный функционал.*

Доказательство. Пусть J — неотрицательный функционал на Z. Очевидно, можно считать J неотрицательным функционалом на Y; тогда, конечно, будет $J(f) = 0$ для любого $f \in Y_0$. Согласно пар. 21, на $\mathfrak{A}$ существуют двузначные меры $\mu_1, \ldots, \mu_n$ ($n \geqq 0$) так, что $J(f) = \int_P f \,\mathrm{d}\mu$ для любого $f \in Y$, причем $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$. Если $\nu(A) = 0$ и если f — характеристическая функция множества A, то, конечно, $f \in Y_0$, и, значит, $0 = J(f) = \int_P f \,\mathrm{d}\mu = \mu(A)$. Тем более имеет место импликация $\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu_i(A) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Отсюда следует существование $g_i \in Y$ таких, что меры μ_i имеют вид $\mu_i(A) = \int_A g_i \,\mathrm{d}\nu$. Множество $A_i = E[x; g_i(x) \neq 0]$ есть, очевидно, ν-атом. Следовательно, мера ν_{A_i} двузначна; кроме того она конечна, будучи σ-конечной. Если $\nu_{A_i}(A) = 0$, то и $\mu_i(A) = 0$; если $\nu_{A_i}(A) \neq 0$, то $\nu_{A_i}(P - A) = 0$, следовательно $\mu_i(P - A) = 0$, $\mu_i(A) \neq 0$, так что мера μ_i является кратным ν_{A_i}.

Замечание. Аналогично можно исследовать, напр., пространства L_p, где $p > 1$ (при σ-конечной мере) и доказать, что между пространствами L_p и L_q, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, имеет место соотношение двойственности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *P. J. Daniell:* A general form of integral, Annals of Mathematics, *19* (1917—18), стр. 279—294.

[2] *E. Hewitt:* Linear functionals on spaces of continuous functions, Fundamenta Mathematicae, *37* (1950), стр. 161—189.

[3] *S. Kakutani:* Concrete representation of abstract (M) — spaces, Annals of Mathematics, *42* (1941), стр. 994—1024.

[4] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер:* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Москва-Ленинград 1950.

[5] *G. W. Mackey:* Equivalence of a problem in measure theory to a problem in the theory of vector lattices, Bull. Amer. Math. Soc., vol. *50* (1944), стр. 719—722.

[6] *J. Mařík:* Lebesgueův integrál v abstraktních prostorech, Časopis pro pěstování matematiky, *76* (1951), стр. 175—194.

[7] *J. Mařík:* Vrcholy jednotkové koule v prostoru funkcionál na daném polouspořádaném prostoru, Časopis pro pěstování matematiky, *79* (1954), стр. 3—40.

Résumé

LA REPRÉSENTATION D'UNE FONCTIONELLE PAR UNE INTÉGRALE

JAN MAŘÍK, Praha.

(Réçu le 17 février 1955.)

Soit P un ensemble arbitraire non vide; soit Z un espace linéaire, dont les éléments sont des fonctions réelles, définies sur l'ensemble P. Supposons encore que l'implication

$$f \in Z \Rightarrow |f| \in Z\,,\ \min(f, 1) \in Z$$

soit valable.

Soit J une fonctionelle (additive) sur Z telle que les relations $f_n \in Z$, $f_n \searrow 0$ entraînent $J(f_n) \to 0$. Soit $\mathfrak{T}_Z$ le δ-corps minimal, contenant le système de tous les ensembles $E[x; f(x) > 1]$, où $f \in Z$. Le théorème 12 dit, qu'il existe dans ce cas exactement une fonction φ sur $\mathfrak{T}_Z$ σ-additive telle qu'on ait

$$J(f) = \int_P f \,\mathrm{d}\varphi$$

pour chaque fonction $f \in Z$.

Dans le théorème 18, on trouve une condition suffisante, pour que chaque fonctionelle J non-négative sur Z ait la propriéte

$$f_n \in Z,\ f_n \searrow 0 \Rightarrow J(f_n) \to 0;$$

on a alors une condition suffisante, pour que chaque fonctionelle non-négative puisse être représentée par une intégrale.

Les théorèmes suivants montrent quelques applications du théorème 18. Par example, l'ensemble de toutes les fonctions continues au support compact ou l'ensemble de toutes les fonctions continues et ν-intégrables, où ν est une mesure de Baire, sur un espace topologique donné, satisfait aux hypothèses du théorème 18. Quelques théorèmes analogues sont démontrés pour certains ensembles de fontions $\mathfrak{A}$-mesurables, où $\mathfrak{A}$ est une σ-algèbre.