

Mihail Benado

Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier.
II. Théorie des multisttructures

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 3, 308–344

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100149>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1955

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

LES ENSEMBLES PARTIELLEMENT ORDONNÉS ET LE THÉORÈME DE RAFFINEMENT DE SCHREIER, II

(Théorie des multistruktures)

MIHAIL BENADO, Bucarest.

(Reçu le 19 mars 1954.)

Introduction

1. L'importance du rôle que la notion d'ensemble partiellement ordonné joue dans le développement des Mathématiques modernes, va toujours en augmentant et l'essor de la *théorie des structures* (lattices) en est la meilleure illustration. Issue, d'une part, des recherches des logiciens de la seconde moitié du XIX-ème siècle et, d'autre part, des recherches arithmétiques de RICHARD DEDEKIND, cette théorie, dont la puissance unificatrice et simplificatrice devait être considérable, compte de nos jours, pour une de ces théories algébriques qui, telle la théorie des groupes, constituent le fondement et l'ossature même de l'édifice de la Science.

2. On sait, cependant, que la notion de structure n'épuise pas celle d'ensemble partiellement ordonné et, en fait, les questions sont déjà très nombreuses où les ensembles partiellement ordonnés qu'on y est conduit à étudier, ne sont pas des structures par rapport à l'ordre partiel requis.

Ainsi, par exemple, l'ensemble partiellement ordonné (par l'inclusion) de tous les sousmultigroupes d'un *multigroupe* [2] n'est ordinairement pas une structure; il en est de même des *configurations abstraites* [1] ainsi que de certains ensembles partiellement ordonnés qu'on rencontre dans la théorie de la *divisibilité* [3], dans la théorie de la *relativité spéciale* [4], dans le théorème Jordan-Hölder [5], dans les *méthodes d'énumération* [1, 6], dans la théorie des structures elle-même (problème de la représentation des structures distributives, etc) et dans maintes autres questions.

3. Organiser cette matière si riche et variée au moyen de quelques *schémas unificateurs*, permettant d'en entreprendre une étude générale et systématique, c'est une question très importante qui a déjà été l'objet de plusieurs travaux dont, notamment, ceux de E. FORADORI [7, I, II, III], [8], H. MAC NEILLE [9], M. M. DAY [10] et J. RICHARD BÜCHI [11]; telle est aussi la question que nous

allons reprendre dans le présent travail mais, par des voies entièrement différentes de celles qu'ont suivies les auteurs précités.

4. Il s'agit dans ce travail de faire valoir quelquesunes des méthodes *algébriques* de la théorie des structures dans des régions plus étendues de la théorie générale des ensembles partiellement ordonnés.

Or, d'un côté, je me suis rendu compte de ce que le sens et la validité de plusieurs principes fondamentaux de la théorie des structures, ne dépendent *nullement* du fait que, dans la structure S , $a \vee b$ et $a \wedge b$ sont respectivement les bornes supérieure et inférieure [12] des éléments $a, b \in S$; mais ils dépendent *uniquement* du fait que $a \vee b$ et $a \wedge b$ y sont respectivement un élément *minimal* [12] parmi tous les $x \in S$ tels que $\Omega \geq x \geq a, b$ et un élément *maximal* [12] parmi tous les $y \in S$ tels que $\omega \leq y \leq a, b$ (ici Ω, ω sont arbitraires mais fixes).

D'un autre côté, la plupart des ensembles partiellement ordonnés usuels satisfont à cette condition fondamentale à savoir que, pour *chaque* quadrilatère $(\Omega, \omega; a, b)$ il existe au moins un sousquadrilatère *irréductible* [15], cela veut dire qu'il y existe toujours (au moins) un couple d'éléments M, d tels que $\Omega \geq M \geq a, b$ et $\omega \leq d \leq a, b$ et tels que les conditions $M \geq x \geq a, b$ et $d \leq y \leq a, b$ entraînent respectivement $x = M$ et $y = d$ (voir § 1).

Ce sont ces ensembles partiellement ordonnés que j'ai appelés *multistrukture*s; on peut aussi les définir d'une façon purement algébrique, à savoir comme des systèmes munis de deux opérations \vee (= multi-union) et \wedge (= multi-section) non nécessairement universelles ni nécessairement *univoques*, lesquelles soient commutatives, résorptives et partiellement *associatives*. C'est la *première* définition qui prévaudra dans ce travail, celle-ci étant particulièrement propre à l'introduction des *connexions (multivoques) de Dedekind* (d'un quadrilatère irréductible $(M, d; a, b)$); ces connexions, dont j'ai déjà montré l'importance en théorie des structures [13, 14] constituent, à mon avis, l'un des moyens les plus puissants pour l'étude des propriétés générales des multistruktures.

5. Le présent travail envisage cette étude au point de vue abstrait. J'y ai notamment poursuivi les conséquences du théorème de raffinement de Schreier que j'ai établi dans la première partie de ce travail [15] (désignée dans la suite par I); mais on y trouvera aussi plusieurs résultats concernant maintes autres questions.

Cette étude, bien qu'elle n'y soit en aucun sens complète, sera, je le pense, suffisante afin de montrer le rôle de certaines méthodes de la théorie des structures dans la recherche des propriétés générales des ensembles partiellement ordonnés.

6. Et voici, maintenant, un aperçu sur la matière des §§ suivants:

Les deux premiers §§ sont consacrés à des généralités; il y est principalement question de l'équivalence des deux définitions des multistruktures ainsi que

de la caractérisation des structures en tant que multistruktures. Le § 3 est consacré à l'étude de quelques propriétés générales de ces systèmes.

Dans le § 4 j'étudie les multistruktures *modulaires* et *semimodulaires*; les premières sont celles où les connexions de Dedekind de chaque quadrilatère irréductible sont parfaites tandis que les secondes sont aux premières ce que les structures semimodulaires sont aux structures modulaires, [1]. On trouvera dans ce § un théorème de Schreier pour les multistruktures modulaires, très semblable (mais non identique) à celui de I, § 3; on y trouvera aussi des conditions nécessaires et suffisantes afin que le théorème Jordan-Hölder soit valide dans les multistruktures sous une forme analogue à celle que V. KOŘÍNEK [17] lui a donné dans le cas des structures (voir aussi, à ce sujet, la Note de O. ORE [5]).

Le § 5 traite de la théorie des *évaluations* dans les multistruktures; on y trouvera, notamment, une généralisation du théorème fondamental de V. GLIVENKO [18], sur les structures normées.

Enfin, le § 6 est consacré à l'étude de quelques propriétés générales de multistruktures *distributives*: ce sont celles-là où le *complément* relatif de chaque élément est *unique* (pourvu qu'il existe). Les multistruktures distributives sont surtout remarquables par le fait qu'elles sont des multistruktures modulaires et *fortes* cela veut dire que les connexions de Dedekind de chaque quadrilatère irréductible, y sont *univoques*, de sorte que le théorème de Schreier de I, § 3, y est toujours en puissance.

§ 1. La notion de multistrukture. Définitions et exemples

1.1. Définition. Soit P un ensemble partiellement ordonné; je dis que P est une *multistrukture* lorsque les axiomes suivants y sont en puissance:

$\mathfrak{M}1$. Soient $a, b \in P$; s'il existe un $\Omega \in P$ tel que $\Omega \geq a$, $\Omega \geq b$ alors, il existe aussi un $M \in P$ tel que $M \leq \Omega$, $M \geq a$, $M \geq b$ et tel que les conditions $x \leq M$, $x \geq a$, $x \geq b$ entraînent $x = M$.

$\mathfrak{M}2$. Soient $a, b \in P$; s'il existe un $\omega \in P$ tel que $\omega \leq a$, $\omega \leq b$ alors, il existe aussi un $d \in P$ tel que $d \geq \omega$, $d \leq a$, $d \leq b$ et tel que les conditions $y \geq d$, $y \leq a$, $y \leq b$ entraînent $y = d$.

Je vais désigner par $(a \vee b)_\Omega$ l'ensemble de tous les M de $\mathfrak{M}1$; pareillement $(a \wedge b)_\omega$ sera ensemble de tous les d de $\mathfrak{M}2$.

Il est clair que le principe de dualité est vrai dans toute multistrukture. Il est clair aussi que M de $\mathfrak{M}1$ est un élément *minimal* de l'ensemble de tous les éléments Ω^* tels que $\Omega^* \leq \Omega$, $\Omega^* \geq a$, $\Omega^* \geq b$ et que d de $\mathfrak{M}2$ est un élément *maximal* de l'ensemble de tous les éléments ω^* tels que $\omega^* \geq \omega$, $\omega^* \leq a$, $\omega^* \leq b$; ces éléments M , d ne sont pas nécessairement uniques.

1.2. Exemples de multistruktures. Le schéma axiomatique de 1.1 est capable d'un assez grand nombre de réalisations; j'en citerai les suivantes:

Exemple 1. Toute structure est une multistrukture; on a évidemment, pour chaque couple a, b d'éléments de la structure, et quels que soient M de $\mathfrak{M}1$ et d de $\mathfrak{M}2$, $M = a \vee b$, $d = a \wedge b$.

Exemple 2. Tout ensemble partiellement ordonné *fini* ou *archimédien* (I, 1.2) est une multistrukture; plus généralement, tout ensemble partiellement ordonné *inductif avec dualité*¹⁾ est une multistrukture. La démonstration, requiert, dans ces deux derniers cas, l'emploi de l'axiome de choix [12, p. 37]; la voici dans le cas des ensembles partiellement ordonnés P inductifs avec dualité:

Soit $a, b \in P$ et supposons qu'il existe un $\Omega \in P$ tel que $\Omega \geq a, b$; alors je dis qu'il existe au moins un $M \in P$ satisfaisant à $\mathfrak{M}1$. En effet soit C une chaîne (sous-ensemble ordonné) telle que pour chaque $x \in C$ on ait $\Omega \geq x \geq a, b$. Or, puisque, par définition, C doit avoir une borne inférieure M^* , il s'ensuit que l'ensemble de tous les $x' \in P$ tels que $\Omega \geq x' \geq a, b$ est \wedge -inductif, car on a, évidemment $\Omega \geq M^* \geq a, b$; l'ensemble de tous ces x' aura alors, (d'après le théorème de Zorn [12], *forme corrélatrice!*) au moins un élément minimal: ce sera, comme il est facile de s'en convaincre, un M de $\mathfrak{M}1$. Ceci et l'application de la dualité achève la démonstration.

Exemple 3. Soit S un semigroupe à division, [I, § 5].

On sait qu'un tel semigroupe S est un ensemble partiellement ordonné par la divisibilité; l'élément 0 y est le premier, l'élément 1, le dernier.

Supposons maintenant que l'ensemble partiellement ordonné S soit archimédien [I, § 1]; alors, l'axiome $\mathfrak{M}2$ y est évidemment en puissance; et je dis qu'il en est de même de $\mathfrak{M}1$. Il suffit, pour cela, de montrer que chaque quotient $1/a$ avec $a > 0$ satisfait à la condition des chaînes descendantes. Or, de ce que $1 > a_1 > a_2 > \dots > a_{i-1} > a_i > \dots > a$ il résulte que $a = a_i a_i^*$, pour chaque i ; mais $a_{i-1} > a_i$ donc, d'après les propriétés de S [I, § 5], $a_{i-1}^* < a_i^*$ et, puisque la chaîne ascendante $a < a_1^* < a_2^* < \dots < a_i^* < \dots < 1$ est finie, il en sera de même de la chaîne descendante $1 > a_1 > a_2 > \dots > a_{i-1} > a_i > \dots > a$, q. e. d.

Exemple 4. Considérons l'ensemble de tous les cercles de rayon positif ou nul du plan euclidien (par „cercle“ j'entends ici *l'intérieur du cercle + sa circonférence*). Cet ensemble est partiellement ordonné par l'inclusion ordinaire \geq de sousensembles de points du plan euclidien (Fig. 2).

Soient a, b deux cercles arbitraires. Supposons d'abord $a \leq b$. En ce cas on peut prendre $\Omega \geq b$, $\omega \leq a$ et je définis $M = b$, $d = a$; il est clair que $\mathfrak{M}1$ et $\mathfrak{M}2$ en sont vérifiés.

¹⁾ C'est-à-dire tel que toute chaîne (sousensemble ordonné) possède une borne supérieure (\vee — inductivité) et une borne inférieure (\wedge — inductivité); voir [12, page 36].

Supposons maintenant que a non $\leq b$ et b non $\leq a$; supposons, en outre, qu'il existe un cercle ω (lequel peut être un point) tel que $\omega \leq a$, $\omega \leq b$ et soit Ω un quelconque des cercles tels que $\Omega \geq a$, $\Omega \geq b$. Je prends alors pour cercle M un quelconque des cercles tels que $M \leq \Omega$, $M \geq a$, $M \geq b$ et tels que chacun d'eux soit tangent aux cercles a et b (fig. 2); il en existe, généralement, une infinité. De même, je prends pour cercle d un quelconque des cercles tels que $d \geq \omega$, $d \leq a$, $d \leq b$ et tels que chacun d'eux soit tangent aux cercles a et b ; il en existe généralement une infinité.

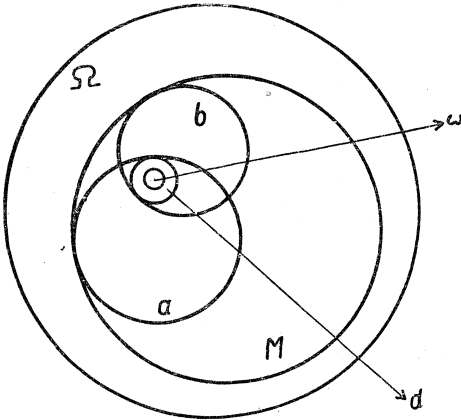


Fig. 2.

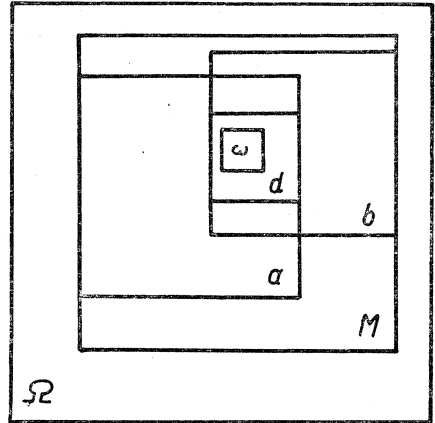


Fig. 3.

La vérification de $\mathfrak{M}1$ et $\mathfrak{M}2$ résulte alors de cette simple remarque que deux cercles a' , b' tels que $a' \leq b'$ et tels que a' ait avec la circonférence de b' (ou bien b' avec la circonférence de a') deux points distincts en commun, en ont tous les autres, c'est-à-dire que les cercles a' , b' coïncident.

Exemple 5. Considérons l'ensemble de tous les carrés (carré = intérieur du carré + sa frontière) de côté positif ou nul du plan euclidien tels que chacun de ces carrés ait ses côtés parallèles à deux directions rectangulaires fixes, données d'avance. Cet ensemble est partiellement ordonné par le même ordre partiel que dans l'exemple 4 (Fig. 3).

Soient a , b deux carrés arbitraires. Pour le cas $a \leq b$ on peut procéder comme dans l'exemple 4; on a simplement $M = b$ et $d = a$. Supposons maintenant que a non $\leq b$ et b non $\leq a$; supposons, de plus qu'il existe un carré ω (lequel peut être un point) tel que $\omega \leq a$, $\omega \leq b$ et soit Ω un quelconque des carrés tel que $\Omega \geq a$, $\Omega \geq b$. Désignons enfin par $|x|$ la mesure du côté du carré x .

Cela posé, je prends pour carré M un quelconque des carrés tels que $M \leq \Omega$, $M \geq a$, $M \geq b$ et tels que la mesure $|M|$ de leurs côtés soit donnée par la formule $|M| = |a| + |b| - \delta$ où δ signifie la dimension minimum du rectangle

d'intersection des carrés a et b (fig. 3); pour carré d , je prends un quelconque des carrés tels que $d \geq \omega$, $d \leq a$, $d \leq b$ et tels que $|d| = \delta$. L'ensemble des carrés M est généralement infini et il en est de même de l'ensemble des carrés d .

La vérification des axiomes $\mathfrak{M}1$ et $\mathfrak{M}2$ ne présente aucune difficulté.

Exemple 6. Soit \mathbf{M} un multigroupeïde c'est-à-dire un système algébrique muni d'une loi de composition multivoque: le produit ab , $a, b \in \mathbf{M}$, est un sous-ensemble non vide de \mathbf{M} .

J'appelle *sousmultigroupeïde* un sousensemble non vide M de \mathbf{M} tel que pour tout couple $a, b \in M$ on ait $ab \cap M \neq \emptyset$; et je dis qu'un sousmultigroupeïde M de \mathbf{M} est *multiplicativement fermé* lorsque pour tout couple $a, b \in M$ on a $ab \subset M$. L'ensemble de tous les sousmultigroupeïdes de \mathbf{M} est partiellement ordonné par l'inclusion (de sousensembles).

Soit (M) un ensemble non vide (totalement) ordonné de sousmultigroupeïdes de \mathbf{M} ; alors, $M' = \cup M$, $M \in (M)$ (la „Vereinigungsmenge“) est évidemment un sousmultigroupeïde de \mathbf{M} . Car on a, pour tout couple $a, b \in M'$; $ab \cap (\cup M) = \cup (ab \cap M)$, $M \in (M)$; or puisque (M) est ordonné, il y aura au moins un $M_0 \in (M)$ tel que $a, b \in M_0$ et, par conséquent, $ab \cap M' \neq \emptyset$.

Ainsi l'ensemble partiellement ordonné (par l'inclusion) de tous les sousmultigroupeïdes de \mathbf{M} est \vee -inductif; on en déduit, d'après l'exemple 2, troisième cas, le résultat suivant:

L'ensemble partiellement ordonné (par l'inclusion) de tous les sousmultigroupeïdes (d'un multigroupeïde \mathbf{M}) est une multistrukture, *pourvu qu'il soit \wedge -inductif*.

On peut réaliser aisément cette dernière condition en supposant, par exemple, que la condition des chaînes descendantes y soit en puissance, ou bien en supposant que l'ensemble ab soit *fini* pour chaque couple $a, b \in \mathbf{M}$.

Des considérations analogues peuvent être développées à l'égard des multigroupes.

Exemple 7. On sait que l'espace-temps à quatre dimensions \mathbf{K}_4 de la relativité spéciale est partiellement ordonné par une relation $(x', y', z', t') \leq (x, y, z, t)$ ayant lieu si et seulement si on a

$$t' \leq t, (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \leq c^2(t - t')^2.$$

Or, je dis que par rapport à l'ordre partiel que je viens de rappeler, l'espace-temps \mathbf{K}_4 est une multistrukture, celle-ci n'étant d'ailleurs pas une structure (contrairement à ce qui arrive dans le cas bidimensionnel de \mathbf{K}_2 ; voir [1]).

Voici, tout d'abord, un changement de notation propre à abrégier l'écriture et à faciliter l'intuition géométrique: p étant un point quelconque de l'espace euclidien tridimensionnel \mathbf{R}_3 , je vais désigner par (\bar{p}, t) un point quelconque de \mathbf{K}_4 ; de même, je vais désigner par pq la distance (euclidienne) de deux points

²⁾ Le signe \emptyset est ici, comme partout dans ce travail, le symbole de l'ensemble vide [12].

$p, q \in \mathbf{R}_3$. La relation $(p', t') \leq (p, t)$ c'est-à-dire $(x', y', z', t') \leq (x, y, z, t)$ aura alors lieu, si et seulement si $t' \leq t$ et $p'p \leq c(t - t')$.

Cela posé, soient d'abord $(p', t'), (p'', t'') \in \mathbf{K}_4$ tels que $(p'', t'') \leq (p', t')$; alors, nous posons, comme à l'ordinaire,

$$(p', t') \vee (p'', t'') = (p', t'), \quad (p', t') \wedge (p'', t'') = (p'', t'')$$

et les axiomes $\mathfrak{M}1, \mathfrak{M}2$ de 1.1 sont évidemment vérifiés.

Supposons maintenant que $(p', t'), (p'', t'') \in \mathbf{K}_4$ soient tels que (p', t') non \leq non $\leq (p'', t'')$, (p'', t'') non \leq non $\leq (p', t')$, cela veut dire $p'p'' > c|t' - t''|$ et démontrons successivement les propositions suivantes:

A. Il existe des points $(\overset{\vee}{p}, \overset{\vee}{t}), (\hat{p}, \hat{t}) \in \mathbf{K}_4$ tels qu'on ait

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \overset{\vee}{p} \overset{\vee}{p} &= c(\overset{\vee}{t} - t'), \quad \overset{\vee}{p} \overset{\vee}{p} = c(\overset{\vee}{t} - t''); \quad \overset{\vee}{t} > t', t'' \\ \text{(I)} \quad \hat{p} \hat{p} &= c(t' - \hat{t}), \quad \hat{p} \hat{p} = c(t'' - \hat{t}); \quad \hat{t} < t', t'' \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit pour s'en convaincre, de prendre $\overset{\vee}{t} \geq \frac{t' + t''}{2} + \frac{p'p''}{2c}$, $\hat{t} \leq \frac{t' + t''}{2} - \frac{p'p''}{2c}$, (ces conditions étant même nécessaires!); on aura alors (vu que $p'p'' > c|t' - t''|$!) $\overset{\vee}{t} > t', t''$ et $\hat{t} < t', t''$, puis, évidemment, $c(\overset{\vee}{t} - t') + c(\overset{\vee}{t} - t'') \geq p'p'', p'p'' \leq c(t' - \hat{t}) + c(t'' - \hat{t})$ ce qui prouve, toujours en vertu de la supposition $p'p'' > c|t' - t''|$, l'existence dans \mathbf{R}_3 de triangles $p'p''\overset{\vee}{p}, p'p''\hat{p}$ dont les côtés $p'\overset{\vee}{p}, p''\overset{\vee}{p}$ et $\hat{p}p', \hat{p}p''$ soient donnés par les (I) et les (I).

Remarquons, en outre, que pour chaque $(\overset{\vee}{p}, \overset{\vee}{t})$ de (I) et chaque (\hat{p}, \hat{t}) de (I) on a

$$\begin{aligned} (\hat{p}, \hat{t}) &< (p', t') < (\overset{\vee}{p}, \overset{\vee}{t}) \\ (\hat{p}, \hat{t}) &< (p'', t'') < (\overset{\vee}{p}, \overset{\vee}{t}) \end{aligned}$$

ce qui prouve, en particulier, que \mathbf{K}_4 est un ensemble filtrant (directed set) au sens de BOURBAKI, [12], (BIRKHOFF, [1]).

Désignons par $\overset{\vee}{H}(\hat{H})$ l'ensemble de tous les $(\overset{\vee}{p}, \overset{\vee}{t})$ de (I) (l'ensemble de tous les (\hat{p}, \hat{t}) de (I)). On a évidemment

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad \overset{\vee}{p} \overset{\vee}{p} - \overset{\vee}{p} \overset{\vee}{p} &= c(t'' - t'), \quad \overset{\vee}{p} \in \overset{\vee}{H}_0 \\ \text{(II)} \quad \hat{p} \hat{p} - \hat{p} \hat{p} &= c(t' - t''), \quad \hat{p} \in \hat{H}_0; \end{aligned}$$

ici, on a désigné par $\overset{\vee}{H}_0(\hat{H}_0)$ l'ensemble de tous les $\overset{\vee}{p}(\hat{p})$ des paires $(\overset{\vee}{p}, \overset{\vee}{t}) \in \overset{\vee}{H}$ ($(\hat{p}, \hat{t}) \in \hat{H}$).

B. Les ensembles $\overset{\vee}{H}_0, \hat{H}_0$ constituent les deux nappes de l'hyperboloïde engendré par la rotation autour de la droite des points p', p'' , de l'hyperbole ayant ces derniers points pour foyers et $c|t' - t''|$ pour longueur du grand axe (on y suppose $t' \neq t''$).

Démonstration. Pour s'en convaincre, il suffit, évidemment, de montrer qu'à chaque point $\overset{\vee}{p} \in \overset{\vee}{R}_3 (\hat{p} \in \hat{R}_3)$, tel que $p'\overset{\vee}{p} - p''\overset{\vee}{p} = c(t'' - t')$, ($\hat{p}p' - \hat{p}p'' = c(t' - t'')$), on peut faire correspondre (et même d'une façon unique!) un $(\overset{\vee}{p}, \overset{\vee}{t}) \in \overset{\vee}{H}$ et un $(\hat{p}, \hat{t}) \in \hat{H}$. On tire, en effet des conditions en question:

$$\begin{aligned} \frac{p'\overset{\vee}{p}}{c} + t' &= \frac{p''\overset{\vee}{p}}{c} + t'' \quad (= \overset{\vee}{t}), \\ t' - \frac{\hat{p}p'}{c} &= t'' - \frac{\hat{p}p''}{c} \quad (= \hat{t}), \end{aligned}$$

ce qui donne $\overset{\vee}{t} > t', t''$ puis $\hat{t} < t', t''$ et, enfin

$$\begin{aligned} p'\overset{\vee}{p} &= c(\overset{\vee}{t} - t'), & p''\overset{\vee}{p} &= c(\overset{\vee}{t} - t''), \\ \hat{p}p' &= c(t' - \hat{t}), & \hat{p}p'' &= c(t'' - \hat{t}), \end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition B.

Remarquons encore qu'on a $\overset{\vee}{H}_0 = \hat{H}_0 =$ plan médiateur du segment $p'p''$, si et seulement si $t' = t''$.

Dorénavant, nous allons raisonner sur les $(\overset{\vee}{p}, \overset{\vee}{t}) \in \overset{\vee}{H}$ seulement; quant aux $(\hat{p}, \hat{t}) \in \hat{H}$ on leur appliquera un raisonnement corrélatif (par la dualité).

C. Soit $(\overset{\vee}{p}, \overset{\vee}{t}) \in \overset{\vee}{H}$ et soit $(p^*, t^*) \in \overset{\vee}{K}_4$ tel que

$$(p', t') < (p^*, t^*) \leq (\overset{\vee}{p}, \overset{\vee}{t}), \quad (p'', t'') < (p^*, t^*) \leq (\overset{\vee}{p}, \overset{\vee}{t});$$

alors, on a $(p^*, t^*) = (\overset{\vee}{p}, \overset{\vee}{t})$.

Démonstration. On a, en effet, successivement, $p'p^* \leq c(t^* - t')$, $p''p^* \leq c(t^* - t'')$, $p^*\overset{\vee}{p} \leq c(\overset{\vee}{t} - t^*)$ donc $p'\overset{\vee}{p} \leq p'p^* + p^*\overset{\vee}{p} \leq c(\overset{\vee}{t} - t')$, $p''\overset{\vee}{p} \leq p''p^* + p^*\overset{\vee}{p} \leq c(\overset{\vee}{t} - t'')$, c'est-à-dire, à cause de (I),

$$(*) \quad p'\overset{\vee}{p} = p'p^* + p^*\overset{\vee}{p} = c(\overset{\vee}{t} - t'), \quad p''\overset{\vee}{p} = p''p^* + p^*\overset{\vee}{p} = c(\overset{\vee}{t} - t'').$$

On en conclut $p^* = \overset{\vee}{p}$ et $t^* = \overset{\vee}{t}$. Cela est, en effet, évident, pourvu que $\overset{\vee}{t} > \frac{t' + t''}{2} + \frac{p'p''}{2c}$; car alors, le triangle $p'p''\overset{\vee}{p}$ étant véritable, le point p^* devra, en vertu des (*), se trouver à la fois sur $p'\overset{\vee}{p}$ et sur $p''\overset{\vee}{p}$ et, par conséquent, $p^* = \overset{\vee}{p}$ d'où il suit $c(\overset{\vee}{t} - t') \leq c(t^* - t')$ donc $\overset{\vee}{t} \leq t^*$ c'est-à-dire, à cause de $t^* \leq \overset{\vee}{t}$, $t^* = \overset{\vee}{t}$. Mais si $\overset{\vee}{t} = \frac{t' + t''}{2} + \frac{p'p''}{2c}$, alors $p'p'' = p'\overset{\vee}{p} + p''\overset{\vee}{p}$, donc $\overset{\vee}{p}$

est sur le segment $p'p''$ et, par conséquent, p^* le sera aussi (en vertu des (*)!). Alors, en ajoutant les (*) membre à membre, il viendra $p'p'' = p'p'' + 2p^*p$ c'est-à-dire $p^* = p$, etc., etc.

D. Soit $(p, t) \in K_4$ tel que $(p', t') < (p, t)$, $(p'', t'') < (p, t)$; alors, il existe un $(\check{p}, \check{t}) \in \check{H}$ tel que $(\check{p}, \check{t}) \leq (p, t)$.

Démonstration. En effet, le lieu des points $q \in R_3$, tels que $p'q + qp = c(t - t')$, est un ellipsoïde (de révolution) et il en est de même du lieu des points $r \in R_3$, tels que $p''r + rp = c(t - t'')$. Supposons, afin de fixer les idées, qu'on ait $t' \leq t''$.

Alors, ou bien le point p est à l'intérieur de la nappe \check{H}_0 (auquel cas \check{H}_0 coupe l'ellipsoïde $p'q + qp = c(t - t')$), ou bien le point p est à l'extérieur de la nappe \check{H}_0 (auquel cas \check{H}_0 coupe l'ellipsoïde $p''r + rp = c(t - t'')$); le cas où $p \in \check{H}_0$ est, d'après la proposition B, trivial. Quel qu'en soit le cas, il y aura donc toujours un $\check{p} \in \check{H}_0$ tel que l'une au moins des deux conditions $p'\check{p} + \check{p}p = c(t - t')$, $p''\check{p} + \check{p}p = c(t - t'')$ soit remplie; on en déduit $\check{p}p = c(t - t)$, c'est-à-dire, précisément, puisque $t \leq t$, $(\check{p}, \check{t}) \leq (p, t)$.

Corollaire (très important). On a $\check{H} = (p', t') \vee (p'', t'')$.

La justification en est immédiate.

Ceci et l'application de la dualité, achève la démonstration du fait que K_4 est une multistructure.

Je remarque enfin, pour des références futures, que si les points $(p', t') \leq (p, t)$ de K_4 sont tels que $p'p = c(t - t')$ alors, l'ensemble — quotient $(p, t)/(p', t')$ est (totalement) ordonné, c'est-à-dire une chaîne.

L'exemple que je viens de décrire constitue une réponse partielle à une question³⁾ posée par M. GARRETT BIRKHOFF dans son livre sur la Théorie des Structures (seconde édition, page 151).

1.3. Sousmultistructures. Soit \mathfrak{M} une multistructure arbitraire; j'appelle *sousmultistructure* (de \mathfrak{M}) un sousensemble non vide \mathfrak{N} de \mathfrak{M} , jouissant des deux propriétés suivantes:

1'. Soient $a, b \in \mathfrak{N}$ tels qu'il y ait au moins un $\Omega \in \mathfrak{N}$ avec $\Omega \geq a$, $\Omega \geq b$; alors, on a $\mathfrak{N} \cap (a \vee b)_\Omega \neq \emptyset$.

2'. Soient $a, b \in \mathfrak{N}$ tels qu'il y ait moins un $\omega \in \mathfrak{N}$ avec $\omega \leq a$, $\omega \leq b$; alors on a $\mathfrak{N} \cap (a \wedge b)_\omega \neq \emptyset$.

Une sousmultistructure \mathfrak{N} de \mathfrak{M} sera dite *fermée* lorsque pour chaque couple $a, b \in \mathfrak{N}$ de 1' et pour chaque couple $a, b \in \mathfrak{N}$ de 2' on a respectivement $(a \vee b)_\Omega \subset \mathfrak{N}$ et $(a \wedge b)_\omega \subset \mathfrak{N}$.

³⁾ Le lecteur trouvera une réponse complète à cette question, dans mon travail [4] où une étude approfondie des propriétés de la multistructure K_4 a été faite et d'où la description de l'exemple 7 ci-dessus a, du reste, à quelques détails près, été tirée.

Par exemple, \mathfrak{M} étant une multistruclure, le quotient a/b y est toujours une sousmultistruclure fermée; de même, si $x \in \mathfrak{M}$, l'ensemble de tous les $x' \in \mathfrak{M}$ tels que $x' \geq x$ et l'ensemble de tous les $x'' \in \mathfrak{M}$ tels que $x'' \leq x$, sont des multistruclures fermées.

1.4. Caractérisation des structures. Soit P un ensemble partiellement ordonné arbitraire.

Je dirai, suivant N. BOURBAKI [12], que P est un *ensemble filtrant* lorsque pour chaque couple $a, b \in P$ on peut trouver un $\Omega \in P$ tel que $\Omega \geq a$, $\Omega \geq b$ et un $\omega \in P$ tel que $\omega \leq a$, $\omega \leq b$.

De même, je dirai suivant G. BIRKHOFF [1], que P possède la *propriété d'interpolation*, lorsque pour $a_1, a_2, b_1, b_2 \in P$ tels que $a_i \leq b_j$ ($i, j = 1, 2$), il existe un $c \in P$ tel que $a_i \leq c \leq b_j$, ($i, j = 1, 2$).

1.41. Théorème. *Pour qu'une multistruclure soit une structure, il faut et il suffit qu'elle soit un ensemble filtrant et qu'elle possède la propriété d'interpolation.*

Démonstration. La nécessité des deux conditions de l'énoncé, est évidente. Pour prouver leur suffisance, remarquons d'abord que, \mathfrak{M} étant une multistruclure et $a, b, \Omega, \Omega^* \in \mathfrak{M}$ tels que $\Omega \geq \Omega^*$, $\Omega^* \geq a$, $\Omega^* \geq b$, on a toujours $(a \vee b)_\Omega \supset (a \vee b)_{\Omega^*}$ c'est-à-dire que tout $M^* \in (a \vee b)_{\Omega^*}$ est un $M^* \in (a \vee b)_\Omega$.

Supposons maintenant que la multistruclure \mathfrak{M} soit filtrante et qu'elle possède la propriété d'interpolation. Soient $a, b \in \mathfrak{M}$; alors, il existe un $\Omega \in \mathfrak{M}$ tel que $\Omega \geq a$, $\Omega \geq b$. Je dis que, quel que soit cet Ω , l'ensemble $(a \vee b)_\Omega$ n'a toujours qu'un seul élément. En effet, soient $M', M'' \in (a \vee b)_\Omega$; on a $M' \geq a$; $M' \geq b$, $M'' \geq a$, $M'' \geq b$. Or, puisque P possède la propriété d'interpolation, il y aura un $c \in \mathfrak{M}$ tel que $M' \geq c \geq a$, $M' \geq c \geq b$, $M'' \geq c \geq a$, $M'' \geq c \geq b$; il en résulte d'après M1 que $c = M'$, $c = M''$ ce qui prouve notre assertion. Cet élément unique de $(a \vee b)_\Omega$, je vais le désigner toujours par $(a \vee b)_\Omega$. Je dis maintenant que, quel que soit Ω tel que $\Omega \geq a$, $\Omega \geq b$, cet élément unique $(a \vee b)_\Omega$ est toujours le même. Car, soient $\Omega', \Omega'' \in \mathfrak{M}$, tels que $\Omega' \geq a$, $\Omega' \geq b$, $\Omega'' \geq a$, $\Omega'' \geq b$; il existe alors un $\Omega \in \mathfrak{M}$ tel que $\Omega' \geq \Omega \geq a$, $\Omega' \geq \Omega \geq b$, $\Omega'' \geq \Omega \geq a$, $\Omega'' \geq \Omega \geq b$. Or, puisque les ensembles $(a \vee b)_\Omega$, $(a \vee b)_{\Omega'}$, $(a \vee b)_{\Omega''}$ n'ont chacun qu'un seul élément, il s'ensuit, compte tenu de la remarque ci-dessus, que $(a \vee b)_{\Omega'} = (a \vee b)_{\Omega''} = (a \vee b)_\Omega$ et la démonstration s'achève par l'application de la dualité.

§ 2. Les multistruclures en tant que systèmes algébriques

La définition des multistruclures, donnée au § 1, est formulée dans les termes de l'ordre partiel (en tant que notion primitive). Le but du présent § est de montrer qu'on peut également définir les multistruclures comme systèmes algébriques c'est-à-dire comme ensembles munis d'opérations satisfaisant à certains axiomes usuels. Ces derniers rappellent, en beaucoup de façons, les

axiomes L1 — L4, [1] de la théorie des structures mais, il y a aussi des différences notables dues, pour l'essentiel, à la multivocité des opérations multistructurales \vee et \wedge .

2.1. Propositions préliminaires. Soit \mathfrak{M} une multistructure arbitraire et $a, b \in \mathfrak{M}$; supposons qu'il existe un $\Omega \in \mathfrak{M}$ tel que $\Omega \geq a$, $\Omega \geq b$ et un $\omega \in \mathfrak{M}$ tel que $\omega \leq a$, $\omega \leq b$. Considérons maintenant les ensembles $(a \vee b)_\Omega$ et $(a \wedge b)_\omega$; ces ensembles, nous allons les concevoir comme des ensembles de déterminations des opérations $a \vee b$ et $a \wedge b$ lorsque Ω et ω parcourent, indépendamment l'un de l'autre, l'ensemble de tous les majorants et l'ensemble de tous les minorants de la paire a, b . Et nous posons par définition

$$a \vee b = \cup (a \vee b)_\Omega; \quad \Omega \geq a, \Omega \geq b, \quad (1)$$

$$a \wedge b = \cup (a \wedge b)_\omega; \quad \omega \leq a, \omega \leq b, \quad (1')$$

Remarquons que si l'ensemble des majorants (minorants) du couple a, b est vide on a $a \vee b = \emptyset$ ($a \wedge b = \emptyset$) et réciproquement. Remarquons aussi que si \mathfrak{M} a un premier élément 0 et un dernier élément 1, alors, les formules (1), (1') s'écrivent simplement

$$a \vee b = (a \vee b)_1, \quad a \wedge b = (a \wedge b)_0;$$

c'est, du reste, ce qui a toujours lieu pour les intervalles de \mathfrak{M} .

Enfin, si \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 sont des sousensembles non vides de \mathfrak{M} , je définis

$$\mathfrak{M}_1 \vee \mathfrak{M}_2 = \cup (m_1 \vee m_2), \quad (2)$$

$$\mathfrak{M}_1 \wedge \mathfrak{M}_2 = \cup (m_1 \wedge m_2) \quad (2')$$

où $m_i \in \mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2$.

Lemme 1. Soient $a, b \in \mathfrak{M}$ tels que $a \vee b \neq \emptyset$ ($a \wedge b \neq \emptyset$) et $M', M'' \in a \vee b$ ($d', d'' \in a \wedge b$) tels que $M' \neq M''$ ($d' \neq d''$); alors, on a $M' \text{ non } \leq M''$, $M'' \text{ non } \leq M'$ ($d' \text{ non } \leq d''$, $d'' \text{ non } \leq d'$).

Le lemme est une conséquence immédiate de M1 (M2). Il s'ensuit que si $M', M'' \in a \vee b$ ($d', d'' \in a \wedge b$) sont tels que $M' \geq M''$ ($d' \geq d''$), alors, $M' = M''$ ($d' = d''$).

Lemme 2. Soient $a, b \in \mathfrak{M}$ tels que $a \leq b$; alors $a \vee b = b$ et $a \wedge b = a$. (Cela veut dire: pour chaque $M \in a \vee b$ et chaque $d \in a \wedge b$ on a $M = b$ et $d = a$).

Il en résulte que $a \vee a = a \wedge a = a$, pour chaque $a \in \mathfrak{M}$.

Lemme 3. Les opérations \vee et \wedge sont commutatives: $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$ (cela veut dire que les ensembles $a \vee b$ et $b \vee a$ sont identiques et de même pour $a \wedge b$ et $b \wedge a$); on y suppose naturellement que $a \vee b \neq \emptyset$ et $a \wedge b \neq \emptyset$ car, autrement, l'assertion est triviale.

Lemme 4. Les opérations \vee et \wedge sont résorptives; plus précisément si $a, b \in \mathfrak{M}$ sont tels que $a \vee b \neq \emptyset$ ($a \wedge b \neq \emptyset$) alors, on a (au sens des définitions (2), (2'))

$$a \vee (a \wedge b) = a, \quad a \wedge (a \vee b) = a$$

Le lemme est une conséquence du lemme 2.

Lemme 5. *Les opérations \vee, \wedge sont partiellement associatives; cela veut dire premièrement que $a \vee b \neq \emptyset$ et $(a \vee b) \vee c \neq \emptyset$ ($a \wedge b \neq \emptyset$ et $(a \wedge b) \wedge c \neq \emptyset$) entraînent $b \vee c \neq \emptyset$ et $a \vee (b \vee c) \neq \emptyset$ ($b \wedge c \neq \emptyset$ et $a \wedge (b \wedge c) \neq \emptyset$), deuxièmement, que pour chaque $M \in (a \vee b) \vee c$ ($d \in (a \wedge b) \wedge c$) il existe au moins un $M' \in a \vee (b \vee c)$ ($d' \in a \wedge (b \wedge c)$) tel que $M \vee M' \neq \emptyset$ ($d \wedge d' \neq \emptyset$) et tel que $M \vee M' = M$ ($d \wedge d' = d$).*

Démonstration. Soient $a, b, c \in \mathfrak{M}$ tels que $a \vee b \neq \emptyset$ et $(a \vee b) \vee c \neq \emptyset$. Or, la première de ces conditions signifie, d'après (1), qu'il existe un $\Omega \in \mathfrak{M}$ tel que $\Omega \geq a, \Omega \geq b$; quant à la seconde, puisque d'après (2), on a $(a \vee b) \vee c = \cup (M \vee c)$, $M \in a \vee b$, elle signifie qu'il existe au moins un $M_0 \in a \vee b$ tel que $M_0 \vee c \neq \emptyset$. Soit $M^* \in M_0 \vee c$; il s'ensuit $M^* \geq M_0, M^* \geq c$ et, par conséquent, puisque $M_0 \geq a, M_0 \geq b$, on aura $M^* \geq a, M^* \geq b, M^* \geq c$. Mais alors, évidemment, $b \vee c \neq \emptyset$ et $a \vee (b \vee c) \neq \emptyset$ ce qui prouve la première partie du lemme (pour $b \wedge c$ et $a \wedge (b \wedge c)$, on peut appliquer la dualité).

Soit maintenant $M \in (a \vee b) \vee c$; on montre comme précédemment que $M \geq a, M \geq b, M \geq c$. On en tire d'abord qu'il existe un $M_1 \in b \vee c$ tel que $M_1 \leq M$, puis qu'il existe un $M' \in a \vee M_1$ tel que $M' \leq M$. Or $M' \in a \vee M_1$ signifie $M' \in a \vee (b \vee c) = \cup (a \vee M_1)$, $M_1 \in b \vee c$; par conséquent, puisque, d'après le lemme 2, $M' \leq M$ entraîne $M \vee M' = M$, la seconde partie du lemme actuel est, elle aussi, vérifiée et on n'a plus qu'à appliquer la dualité.

Remarque 1. Supposons qu'on ait $a, b, c \in \Omega/\omega$ c'est-à-dire que $\omega \leq a \leq \Omega, \omega \leq b \leq \Omega, \omega \leq c \leq \Omega$; alors, Ω/ω étant une sousmultistruccure fermée de \mathfrak{M} ayant ω pour premier élément et Ω pour dernier élément, on vérifie comme précédemment que le lemme 5 est vrai pour les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} ((a \vee b)_\Omega \vee c)_\Omega, & \quad (a \vee (b \vee c)_\Omega)_\Omega, \\ ((a \wedge b)_\omega \wedge c)_\omega, & \quad (a \wedge (b \wedge c)_\omega)_\omega. \end{aligned} \quad ^4$$

Remarque 2 (*très importante*). En vertu du lemme 3, on peut évidemment écrire $(a \vee (b \vee c)_\Omega)_\Omega = ((c \vee b)_\Omega \vee a)_\Omega$, (on y suppose, naturellement, que $a \leq \Omega, b \leq \Omega, c \leq \Omega$). Or, d'après la démonstration du lemme 5, il suit que pour chaque $M \in ((a \vee b)_\Omega \vee c)_\Omega$ il existe un $M' \in (a \vee (b \vee c)_\Omega)_\Omega$ tel que $M' \leq M$; puis, par la même raison, il y aura un $M'' \in (c \vee (b \vee a)_\Omega)_\Omega (= ((a \vee b)_\Omega \vee c)_\Omega)$ tel que $M'' \leq M'$. On peut alors se demander si, comme cela semble résulter du lemme 1, $M'' = M$ (de sorte qu'on puisse en déduire $M = M'$ et, finalement, que $((a \vee b)_\Omega \vee c)_\Omega = (a \vee (b \vee c)_\Omega)_\Omega$).

La réponse y est, généralement, négative; car $M, M'' \in ((a \vee b)_\Omega \vee c)_\Omega$ signifie simplement que $M \in (M_0 \vee c)_\Omega$ et $M'' \in (M''_0 \vee c)_\Omega$ où $M_0, M''_0 \in (a \vee b)_\Omega$ mais il n'est nullement nécessaire que $M_0 = M''_0$ si bien, qu'on peut avoir $M \geq M''$ sans que, de ce même fait, on ait $M = M''$.

⁴ D'après les formules (2), (2'), on a ici $((a \vee b)_\Omega \vee c)_\Omega = \cup (M \vee c)_\Omega, M \in (a \vee b)_\Omega$, etc.

Ainsi, l'opération \vee (et, de même, l'opération \wedge) ne sont pas, généralement, associatives; c'est, du reste, ce qu'on peut vérifier sur le schéma de multistruccure ci-dessous:

On y voit, en effet, qu'on a

$$((a \vee b)_1 \vee c)_1 = \{1, f\}, (a \vee (b \vee c)_1)_1 = \{e, f\}.$$

$$((a \wedge b)_0 \wedge c)_0 = \{m, n\}, (a \wedge (b \wedge c)_0)_0 = \{m, n, 0\}.$$

C'est dans cette *associativité partielle* qu'on doit, à mon avis, chercher l'une des différences les plus notables entre une structure et une multistruccure (en tant que systèmes algébriques).

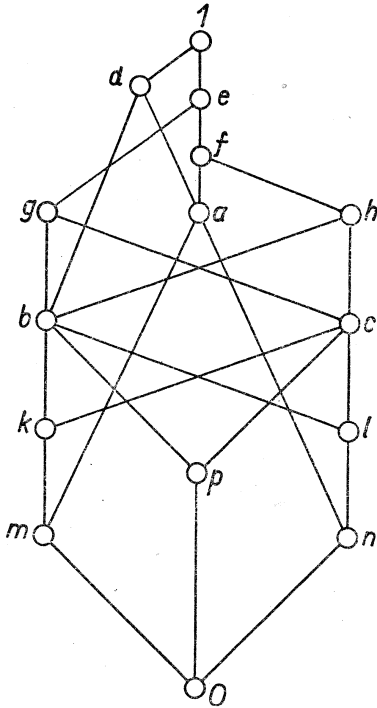


Fig. 4.

$M_1 \in c \vee a$ tel que $M_1 \leq M'$. Il s'ensuit (lemme 1) que $M = M_1$ donc $M = M'$ ce qui signifie que $c \vee a$ est une partie de $c \vee b$. Et, puisque la réciproque de cette dernière assertion est aussi vraie, il en résulte $c \vee a = c \vee b$; il ne reste plus qu'à appliquer la dualité.

Nous allons maintenant montrer que parmi les lemmes 1—6 ci-dessus, il y en a dont l'ensemble est logiquement équivalent aux assertions $\mathfrak{M}1$ et $\mathfrak{M}2$ de 1.1.

Lemme 6. Les opérations \vee, \wedge sont partiellement monotones (par rapport à \geq); cela veut dire que si $a, b, c \in \mathfrak{M}$ sont tels que $a \geq b$ et que $c \vee a \neq \emptyset$ ($c \wedge b \neq \emptyset$), alors on a $c \vee b \neq \emptyset$ ($c \wedge a \neq \emptyset$) et pour chaque $M \in c \vee a$ ($d \in c \wedge b$) il existe un $M' \in c \vee b$ ($d' \in c \wedge a$) tel que $M' \leq M$ ($d' \geq d$).

Démonstration. D'abord $c \vee a \neq \emptyset$ signifie qu'il existe un $\Omega \in \mathfrak{M}$ tel que $\Omega \geq a, \Omega \geq c$; or, $a \geq b$ donc $\Omega \geq b$ et, par conséquent, $c \vee b \neq \emptyset$. Soit maintenant $M \in c \vee a$ donc $M \geq a, M \geq c$ et comme $a \geq b$ il en résulte $(c \vee b)_M \neq \emptyset$; c'est-à-dire qu'il existe un $M' \in c \vee b$ tel que $M' \leq M$. Pour \wedge on applique la dualité.

Corollaire. Si l'on a $a = b$ et $c \vee a \neq \emptyset$ ($c \wedge a \neq \emptyset$) alors, on a aussi $c \vee a = c \vee b$ ($c \wedge a = c \wedge b$).

On a, en effet, $a \geq b$ et $b \geq a$. Si donc $M \in c \vee a$ alors, il existe d'après le lemme, un $M' \in c \vee b$ tel que $M' \leq M$. Mais, toujours d'après le lemme, il y aura un

2.2. Définition algébrique des multistuctures. J'appelle multistucture un ensemble non vide \mathfrak{M} muni de deux lois de compositions (opérations) \vee , \wedge , non nécessairement universelles ni nécessairement univoques⁵⁾ satisfaisant aux axiomes suivants:

MI. Soient $a, b \in \mathfrak{M}$; si l'on a $a \vee b \neq \emptyset$ ($a \wedge b \neq \emptyset$) alors, on a aussi $b \vee a \neq \emptyset$ ($b \wedge a \neq \emptyset$) et, en outre: I'. $a \vee b = b \vee a$, I'', $a \wedge b = b \wedge a$ (commutativité).

MI. Soient $a, b, c \in \mathfrak{M}$; si l'on a $a \vee b \neq \emptyset$ et $(a \vee b) \vee c \neq \emptyset$ ($a \wedge b \neq \emptyset$ et $(a \wedge b) \wedge c \neq \emptyset$) alors, on a aussi $b \vee c \neq \emptyset$ et $a \vee (b \vee c) \neq \emptyset$ ($b \wedge c \neq \emptyset$ et $a \wedge (b \wedge c) \neq \emptyset$) et, en outre: II'. pour chaque $M \in (a \vee b) \vee c$ il existe un $M' \in a \vee (b \vee c)$ tel que $M \vee M' \neq \emptyset$ et tel que $M \vee M' = M$, II''. pour chaque $d \in (a \wedge b) \wedge c$ il existe un $d' \in a \wedge (b \wedge c)$ tel que $d \wedge d' \neq \emptyset$ et tel que $d \wedge d' = d$ (associativité partielle)⁶⁾.

MI. Soient $a, b \in \mathfrak{M}$; si l'on a $a \vee b \neq \emptyset$ ($a \wedge b \neq \emptyset$) alors on a aussi $a \wedge (a \vee b) \neq \emptyset$ ($a \vee (a \wedge b) \neq \emptyset$) et, en outre: III'. $a \wedge (a \vee b) = a$, III''. $a \vee (a \wedge b) = a$ (résorption)⁷⁾.

MI. Pour chaque $a \in \mathfrak{M}$ on a $a \vee a \neq \emptyset$, $a \wedge a \neq \emptyset$.

MI. Soient $a, b, c \in \mathfrak{M}$ tels que $a = b$ et tels que $c \vee a \neq \emptyset$ ($c \wedge a \neq \emptyset$); alors, $c \vee b \neq \emptyset$ ($c \wedge b \neq \emptyset$) et, en outre: V'. $c \vee a = c \vee b$, V''. $c \wedge a = c \wedge b$.

MI. Soient $a, b \in \mathfrak{M}$ tels que $a \vee b \neq \emptyset$ ($a \wedge b \neq \emptyset$); soient de même $M, M' \in a \vee b$ ($d, d' \in a \wedge b$) tels que $M \vee M' \neq \emptyset$, ($d \wedge d' \neq \emptyset$).

Alors, si $M \neq M'$ ($d \neq d'$) on a $M^* \neq M$, $M' (d^* \neq d, d')$ pour chaque $M^* \in M \vee M'$ ($d^* \in d \wedge d'$).

Que les propositions MI — MVI soient une conséquence de MI et M2, cela a déjà été montré (2.1); il s'agit ici de montrer que la réciproque est également vraie.

2.21. Nous allons tout d'abord montrer qu'une multistucture (au sens de MI — MVI) est un ensemble partiellement ordonné. Posons, à cet effet, les définitions suivantes:

$Op (\geq)$. Soient $a, b \in \mathfrak{M}$; nous écrirons $b \geq a$ si et seulement si: 1) $a \vee b \neq \emptyset$, 2) $a \vee b = b$.

$Op (\leq)$. Soient $a', b' \in \mathfrak{M}$; nous écrirons $a' \leq b'$ si et seulement si: 1) $a' \wedge b' \neq \emptyset$, 2) $a' \wedge b' = a'$.

Il s'agit de montrer que les relations binaires \geq , \leq sont des relations d'ordre partiel dans \mathfrak{M} et que $b \geq a$ signifie même chose que $a \leq b$.

⁵⁾ Cela veut dire qu'il peut y avoir des couples $a, b \in \mathfrak{M}$ tels que si $a \vee b \neq \emptyset$ ($a \wedge b \neq \emptyset$), l'ensemble $a \vee b$ ($a \wedge b$) ait au moins deux éléments distincts.

⁶⁾ On a, naturellement, (par définition), $(a \vee b) \vee c = \cup (M \vee c)$, $M \in a \vee b$ et $(a \wedge b) \wedge c = \cup (d \wedge c)$, $d \in a \wedge b$; en outre une égalité telle que $x \vee y = z$ ($x \wedge y = z$) signifie qu'on a $M = z$ ($d = z$) pour chaque $M \in x \vee y$ ($d \in x \wedge y$).

⁷⁾ La signification d'une égalité telle que $a \vee (a \wedge b) = a$ est tout à fait claire vu la note 6) et les définitions (2), (2').

Lemme 1. *Pour chaque $a \in \mathfrak{M}$ on a $a \vee a = a = a \wedge a$.*

Démonstration. On a d'abord, d'après \mathfrak{MIV} , $a \vee a \neq \emptyset$ et $a \wedge a \neq \emptyset$. Soit $b \in \mathfrak{M}$ tel que $a \vee b \neq \emptyset$ ($a \wedge b \neq \emptyset$); il en existe au moins un tel, c'est $b = a$. D'après \mathfrak{MIII} on a $a \wedge (a \vee b) = a$; d'après \mathfrak{MIV} on aura donc aussi $a \vee a = a \vee [a \wedge (a \vee b)]$. Mais le second membre de cette dernière égalité, est d'après \mathfrak{MIII} , quel que soit $M \in a \vee b$, identique à a lui-même; ainsi on a bien $a \vee a = a$ et aussi, par la dualité $a \wedge a = a$.

Lemme 2. *Si l'on a $a \leq b$, alors on a aussi $b \geq a$ et réciproquement.*

Démonstration. Supposons qu'on ait $a \leq b$; d'après $Op(\leq)$ cela signifie que $a \wedge b \neq \emptyset$ et que $a \wedge b = a$. On a donc, d'après \mathfrak{MIII} , $b \vee (a \wedge b) \neq \emptyset$ et d'après \mathfrak{MIV} on a encore $b \vee (a \wedge b) = b \vee a$. Mais, $b \vee (a \wedge b) = b$ (\mathfrak{MIII} !) donc $b \vee a = b = a \vee b$ (\mathfrak{MI} !). D'après $Op(\geq)$, il en résulte $b \geq a$.

Pour la réciproque, on peut appliquer la dualité.

Corollaire. *Supposons que pour $a, b \in \mathfrak{M}$ on ait $a \vee b \neq \emptyset$ et supposons en outre qu'il y ait au moins un $M_0 \in a \vee b$ tel que $M_0 = b$. Alors, je dis qu'on a $a \vee b = b$ c'est-à-dire que $b \geq a$.*

En effet, puisqu'on a $a \vee b \neq \emptyset$ on aura aussi, à cause de \mathfrak{MIII} , $a \wedge (a \vee b) \neq \emptyset$ et encore, (\mathfrak{MIV}) $a \wedge M_0 = a \wedge b$. Or, $a \wedge M = a$ pour chaque $M \in a \vee b$ (\mathfrak{MIII} !) donc, $a \wedge b = a$ ce qui signifie, d'après $Op(\leq)$, que $a \leq b$ ou encore, d'après le lemme 2, $b \geq a$ q. e. d. La propriété corrélatrice par la dualité y est donc également vraie.

Lemme 3. *Soient $a, b, c \in \mathfrak{M}$ tels que $a \vee b \neq \emptyset$ et $(a \vee b) \vee c \neq \emptyset$ ($a \wedge b \neq \emptyset$ et $(a \wedge b) \wedge c \neq \emptyset$); soit, de même $M \in (a \vee b) \vee c$, ($d \in (a \wedge b) \wedge c$). Alors, il existe au moins un $M' \in a \vee (b \vee c)$, ($d' \in a \wedge (b \wedge c)$) tel que $M \geq M'$ ($d \leq d'$).*

Le lemme est une conséquence immédiate de \mathfrak{MII}' et $Op(\geq)$ (\mathfrak{MII}'' et $Op(\leq)$).

Lemme 4. *Soient $a, b \in \mathfrak{M}$ tel que $a \vee b \neq \emptyset$ ($a \wedge b \neq \emptyset$). Alors on a pour chaque $M \in a \vee b$ ($d \in a \wedge b$), $M \geq a$, $M \geq b$ ($d \leq a$, $d \leq b$).*

Cela résulte immédiatement de \mathfrak{MIII}' (\mathfrak{MIII}'') et de $Op(\geq)$ ($Op(\leq)$).

Théorème 1. *Les relations binaires \leq et \geq sont des relations d'ordre partiel dans \mathfrak{M} .*

Démonstration. D'après le lemme 2, il suffira de le faire voir pour \geq . Soit d'abord $a \in \mathfrak{M}$; puisque, d'après le lemme 1, on a $a \vee a = a$, il en résulte ($Op(\geq)$) $a \geq a$. Soient, en second lieu $a, b \in \mathfrak{M}$ tels que $a \geq b$, $b \geq a$; alors, $b \vee a = a$, $a \vee b = b$ respectivement. Donc, d'après \mathfrak{MI} , $a = b$.

Soient, en troisième lieu $a, b, c \in \mathfrak{M}$ tels que $a \geq b$, $b \geq c$; il s'agit de prouver que $a \geq c$. Il convient, tout d'abord, de prouver une transitivité *plus faible*, a savoir que $x = y$ et $y \geq z$ entraînent $x \geq z$. Or, de $y \geq z$ il suit que $y \vee z = y$ et, d'autre part, $x = y$ entraîne $x \vee z = y \vee z$. Donc $x \vee z = y = x$ c'est-à-dire $x \geq z$.

Cela étant, de $a \geq b$, $b \geq c$ il suit d'abord $a \vee b = a$, $b \vee c = b$. Puis, on a par l'application de $\mathfrak{M}V'$, $a \vee b = a \vee (b \vee c)$ c'est-à-dire $a = a \vee (b \vee c)$. Mais, d'après $\mathfrak{M}I$, on a $a \vee (b \vee c) = (c \vee b) \vee a$ et, d'après le lemme 3, pour chaque $M \in (c \vee b) \vee a$ il existe un $M' \in c \vee (b \vee a) = c \vee a$ tel que $M \geq M'$.

Ainsi $a \geq M'$ pour un certain $M' \in a \vee c$; or, d'après le lemme 4 on a, pour chaque $M^* \in a \vee c$, $M^* \geq a$. Il s'ensuit $a = M'$ et, par conséquent (corollaire du lemme 2) $a \vee c = a$, c'est-à-dire, $a \geq c$ et le théorème 1 est complètement démontré.

Lemme 5. Soient $a, b, c \in \mathfrak{M}$ tels que $a \geq b$ et $c \vee a \neq \emptyset$ ($c \wedge b \neq \emptyset$); alors, pour chaque $M \in c \vee a$ ($d \in c \wedge b$) il existe un $M' \in c \vee b$ ($d' \in c \wedge a$) tel que $M \geq M'$ ($d \leq d'$).

Démonstration. On a, en effet, $a \vee b = a$ donc aussi $c \vee a = c \vee (a \vee b) = (a \vee b) \vee c$. Soit $M \in (a \vee b) \vee c$; d'après le lemme 3, il existe un $M' \in a \vee (b \vee c)$ tel que $M' \leq M$. Or, $a \vee (b \vee c) = \cup (a \vee M^*)$, $M^* \in b \vee c$; il existe donc un $M_0^* \in b \vee c$ tel que $M' \in a \vee M_0^*$. Ainsi $M' \geq M_0^*$, et parceque $M \geq M'$, il s'ensuit (théorème 1!) $M \geq M_0^*$. Pour \wedge on applique la dualité et le lemme est démontré.

Lemme 6. Soient $a, b \in \mathfrak{M}$ tels que $a \vee b \neq \emptyset$ ($a \wedge b \neq \emptyset$) et $M \in a \vee b$ ($d \in a \wedge b$); soit, en outre, $\Omega \in \mathfrak{M}$ ($\omega \in \mathfrak{M}$) tel que $\Omega \geq a$, $\Omega \geq b$ ($\omega \leq a$, $\omega \leq b$)⁸). Alors, il existe au moins un $d_0^* \in \Omega \wedge M$ ($M_0^* \in \omega \vee d$) tel que $d_0^* \geq a$ ($M_0^* \leq a$).

Démonstration. D'abord, puisque $M \geq a$, il suit du lemme 5 qu'on a $\Omega \wedge M \neq \emptyset$. Puis, on a évidemment $a = (a \wedge \Omega) \wedge M$; d'après le lemme 3, pour chaque $d \in (a \wedge \Omega) \wedge M$ il existe un $d' \in a \wedge (\Omega \wedge M)$ tel que $d \leq d'$. Mais $a \wedge (\Omega \wedge M) = \cup (a \wedge d^*)$, $d^* \in \Omega \wedge M$; il existe, par conséquent, un $d_0^* \in \Omega \wedge M$ tel que $d' \in a \wedge d_0^*$ donc $d' \leq d_0^*$ et comme $d' \geq d = a$ on en conclut $d_0^* \geq a$. La proposition corrélatrice en résulte par la dualité.

Remarque. D'après le lemme, il existe aussi un $d_1^* \in \Omega \wedge M$ ($M_1^* \in \omega \vee d$) tel que $d_1^* \geq b$ ($M_1^* \leq b$); mais, en général, $d_0^* \neq d_1^*$ ($M_0^* \neq M_1^*$).

Théorème 2. Soient $a, b \in \mathfrak{M}$ tels que $a \vee b \neq \emptyset$ ($a \wedge b \neq \emptyset$); soit, en outre, $\Omega \in \mathfrak{M}$ ($\omega \in \mathfrak{M}$) tel que $\Omega \geq a$, $\Omega \geq b$ ($\omega \leq a$, $\omega \leq b$). Alors, il existe au moins un $M_0 \in a \vee b$ ($d_0 \in a \wedge b$) tel que $M_0 \leq \Omega$ ($d_0 \geq \omega$).

Démonstration. D'après le lemme 6, il existe un $d_0^* \in \Omega \wedge M$ tel que $d_0^* \geq a$ et l'on a

$$d_0^* \leq \Omega, d_0^* \leq M; b \leq \Omega, b \leq M \quad (M \in a \vee b).$$

Maintenant, je fais jouer aux éléments Ω , M le rôle que les éléments a, b détiennent respectivement dans l'énoncé du lemme 6; quant aux éléments b, d_0^* je leur fais jouer le rôle que les éléments ω, d détiennent respectivement dans l'énoncé du même lemme. J'en conclus à l'existence d'un $M_0' \in b \vee d_0^*$ tel que

⁸ Il suit évidemment du lemme 4, que l'ensemble de ces Ω (ou bien de ces ω) n'est pas vide.

$M'_0 \leq \Omega$. Or, puisque $d_0^* \geq a$, il suit du lemme 5 que pour chaque $M' \in b \vee d_0^*$ il existe un $M \in b \vee a$ tel que $M' \geq M$; il y aura donc, en particulier, un $M_0 \in b \vee a$ tel que $M'_0 \geq M_0$ et l'on aura finalement $\Omega \geq M_0$. La proposition corrélatrice résulte par la dualité.

2.22. A ce point, je fais remarquer que l'axiome \mathfrak{MVI} n'est pas encore intervenu dans les raisonnements; c'est cet axiome \mathfrak{MVI} qui va maintenant nous permettre d'achever la démonstration.

Théorème. Soient $a, b \in \mathfrak{M}$ tels que $a \vee b \neq \emptyset$ ($a \wedge b \neq \emptyset$) et soient $M \in a \vee b$ ($d \in a \wedge b$); alors, les conditions $M \geq x \geq a$, $M \geq x \geq b$ ($d \leq y \leq a$, $d \leq y \leq b$) entraînent $x = M$ ($y = d$).

Démonstration. En effet, d'après le théorème 2 de 2.21 il existe un $M' \in a \vee b$ ($d' \in a \wedge b$) tel que $M' \leq x$ ($d' \geq y$); mais, alors, $M \geq M'$ ($d \leq d'$) c'est-à-dire $M \vee M' = M$ ($d \wedge d' = d$) ce qui, d'après \mathfrak{MVI} signifie que $M = M'$ ($d = d'$). Il en résulte $x = M$ ($y = d$), q. e. d.

2.23. Voici maintenant, pour clore ce §, deux problèmes concernant cette axiomatique des multistrukture:

Problème 1. L'axiome \mathfrak{MVI} est-il indépendant de $\mathfrak{MII} - \mathfrak{MIV}$?

Problème 2. Y a-t-il des multistrukture *associatives*, autres que les structures ? (par multistrukture associative j'entends une telle que, sous les hypothèses de \mathfrak{MII} , on ait $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ et $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$).

§ 3. Quelques propriétés générales des multistrukture

3.1. **Quotients semblables.** Soit \mathfrak{M} une multistrukture arbitraire et $(\Omega, \omega; a, b)$ un quadrilatère quelconque de \mathfrak{M} . J'appelle *quotients (directement) semblables* les côtés opposés d'un de ses sousquadrilatères $(M, d; a, b)$ où $M \in (a \vee b)_\Omega$ et $d \in (a \wedge b)_\omega$; ainsi $M/a, b/d$ forment une paire de quotients directement semblables, et $M/b, a/d$ en forment une autre.

Dans la définition précédente, on peut se passer de la considération explicite du quadrilatère $(\Omega, \omega; a, b)$, comme suit: je dirai que les quotients x/y et x'/y' sont directement semblables (symbole $x/y \simeq x'/y'$) lorsqu'on a $x \geq x'$, $y \geq y'$ et lorsque $x \in (x' \vee y)_x$, $y' \in (x' \wedge y)_{y'}$; ces deux dernières conditions entraînent d'ailleurs respectivement, comme il est aisé de s'en convaincre, $(x' \vee y)_x = x$, $(x' \wedge y)_{y'} = y'$ (2.1, lemme 1).

La relation de similitude directe \simeq , que je viens de définir, est évidemment réflexive mais, elle n'est pas généralement transitive; cela tient essentiellement à ce que, dans \mathfrak{M} , les opérations \vee, \wedge sont multivoques. On est ainsi conduit à étendre un peu cette notion de quotients directement semblables et je vais dire que deux quotients $x/y, x'/y'$ sont *directement T-semblables* (symbole $x/y \sim \sim x'/y'$) lorsque $x \geq x'$, $y \geq y'$ et lorsqu'il existe un nombre fini de quotients

a_i/b_i ($i = 0, 1, 2, \dots, r$; $a_0/b_0 = x/y$, $a_r/b_r = x'/y'$) tels qu'on ait $x/y \simeq a_1/b_1 \simeq a_2/b_2 \simeq \dots \simeq a_{r-1}/b_{r-1} \simeq x'/y'$.

Enfin, je dirai, suivant KOŘÍNEK [16], que deux quotients x/y , x'/y' sont T -semblables d'en bas (d'en haut) s'il existe un quotient s/t tel que $x/y \sim s/t$, $x'/y' \sim s/t$ ($s/t \sim x/y$, $s/t \sim x'/y'$); le quotient s/t sera dit quotient *intermédiaire* attaché à la paire x/y , x'/y' .

Il est évident que ces notions de quotients semblables coïncident, dans le cas des structures, avec les notions habituelles [16].

3.11. Théorème. *Si l'on a $x/y \sim x'/y'$ alors, les conditions $x = y$ et $x' = y'$ s'entraînent mutuellement et, il s'ensuit que les conditions $x > y$ et $x' > y'$ s'entraînent aussi mutuellement.*

La démonstration n'offre aucune difficulté.

3.12. Voici maintenant un exemple prouvant que la relation \simeq n'est pas généralement transitive. Considérons le schéma de multistrukture suivant:

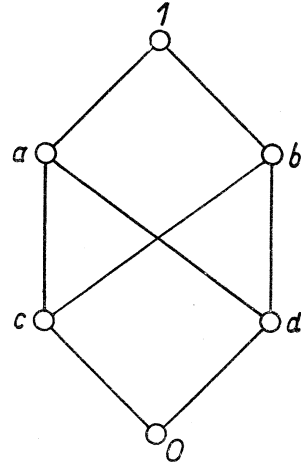


Fig. 5.

On a évidemment $1/a \simeq b/c$, $b/c \simeq d/0$; cependant, $1/a \not\simeq d/0$ car, puisque $a > d$, on a $(a \vee d)_1 = a < 1$ (et $(a \wedge d)_0 = d > 0$).

3.2. Connexions de Dedekind. Soient toujours $(\Omega, \omega; a, b)$ un quadrilatère quelconque dans une multistrukture \mathfrak{M} et $M \in (a \vee b)_\Omega$, $d \in (a \wedge b)_\omega$ deux éléments fixes. Je définis les correspondances (en général multivoques) suivantes:

$$\begin{aligned} \chi_D(p) &= (b \wedge p)_a, \quad p \in \Omega/a; & \varphi_D(p') &= (a \vee p')_M, \quad p' \in b/\omega \\ \tilde{\chi}_D(q) &= (a \wedge q)_d, \quad q \in \Omega/b; & \tilde{\varphi}_D(q') &= (b \vee q')_M, \quad q' \in a/\omega \end{aligned}$$

L'ensemble $(b \wedge p)_a$ est évidemment une partie de b/d , puis $(a \vee p')_M$ en est une de M/a , etc; remarquons aussi que $(b \wedge p)_a$ est une partie de $(b \wedge p)_\omega$ et que $(a \vee p')_M$ en est une de $(a \vee p')_\Omega$. Ainsi le couple d'opérations multivoques (χ_D, φ_D) applique l'un des quotients Ω/a , b/ω sur une partie de l'autre; et une propriété analogue a lieu pour $(\tilde{\chi}_D, \tilde{\varphi}_D)$ à l'égard des quotients Ω/b , a/ω .

Je dis que les opérations (χ_D, φ_D) , $(\tilde{\chi}_D, \tilde{\varphi}_D)$ possèdent les propriétés **A** et **B** de [I, § 1]. Soient, en effet, $p_1, p_2 \in \Omega/a$ tels que $p_1 \geq p_2$ et $p'_2 \in \chi_D(p_2)$; il y aura alors, d'après 2.1, lemme 6, un $p'_1 \in \chi_D(p_1)$ tel que $p'_1 \geq p'_2$; et une propriété corrélatrice a lieu (par la dualité) pour φ_D : les opérations (χ_D, φ_D) possèdent donc la propriété **A** de [I, § 1]. Soit maintenant $p \in \Omega/a$ et $p' \in \chi_D(p)$; on a évidemment $p' \leq p$ et comme $a \leq p$, on en déduit que $(a \vee p')_p \neq \emptyset$ et que $\bar{p} \leq p$ quel que soit $\bar{p} \in (a \vee p')_p$. Or, pour chaque $p' \in \chi_D(p)$, $(a \vee p')_p$ est une partie

de $(a \vee p')_M$ et la propriété analogue se vérifie pour φ_D : les opérations (χ_D, φ_D) possèdent la propriété **B** de [I, § 1]. De sorte qu'on pourra écrire (toujours au sens de [I, § 1]).

$$(3) \quad \Omega/a \rightleftharpoons b/\omega \bmod \chi_D, \varphi_D \text{ et à fortiori}^9) \quad (3') \quad M/a \rightleftharpoons b/d \bmod \chi_D, \varphi_D$$

$$(3\tilde{)} \quad \Omega/b \rightleftharpoons a/\omega \bmod \tilde{\chi}_D, \tilde{\varphi}_D \text{ et à fortiori}^9) \quad (3\tilde{}') \quad M/b \rightleftharpoons a/d \bmod \tilde{\chi}_D, \tilde{\varphi}_D$$

En outre, on vérifie que les opérations (χ_D, φ_D) , $(\tilde{\chi}_D, \tilde{\varphi}_D)$ possèdent, *en tant que correspondances entre les côtés $M/a, b/d$ et $M/b, a/d$ respectivement*, les propriétés **A*** et **B*** de [I, § 2]; on pourra donc écrire

$$(\chi_D, \varphi_D) \in \Gamma(M/a, b/d), (\tilde{\chi}_D, \tilde{\varphi}_D) \in \tilde{\Gamma}(M/b, a/d) \quad (4)$$

Les opérations (χ_D, φ_D) , $(\tilde{\chi}_D, \tilde{\varphi}_D)$ vont, en tant que jouissant des propriétés (3), (3), (4), être appelées *les connexions de Dedekind attachées au sous-quadrilatère $(M, d; a, b)$* .

3.21. Voici quelques propriétés simples mais très importantes de ces connexions de Dedekind; les notations sont celles de 3.2.

Lemme 1. Soit $p \in M/a$ ($p' \in b/d$); alors, $(b \vee p)_M = M$ ($(a \wedge p')_a = d$).

Démonstration. On a, en effet, $p \geq a$ et $(a \vee b)_M = M$; or, d'après 2.1, lemme 6, pour chaque $M^* \in (b \vee p)_M$ il existe un $M_0 \in (b \vee a)_M$ tel que $M_0 \leq M^*$ et comme on a également $M^* \leq M = M_0$, il s'ensuit $M^* = M$. Il ne reste plus qu'à appliquer la dualité.

Lemme 2. Soient $p \in M/a$, $p'_i \in (b \wedge p)_a$ et $\bar{p} \in (a \vee p'_i)_p$, ($p' \in b/d$, $p_j \in (a \vee p')_M$ et $\bar{p}' \in (b \wedge p_j)_{p'}$); alors on a $(b \wedge \bar{p})_{p'_i} = p'_i((a \vee \bar{p}')_{p_j} = p_j)$.

Démonstration. On a, évidemment, $p \geq \bar{p} \geq p'_i$; puis, on a $(b \wedge p'_i)_{p'_i} = p'_i$, $(b \wedge p)_{p'_i} = p'_i$ et, enfin $p'_i \leq x_0 \leq p'_i$ pour un certain $x_0 \in (b \wedge \bar{p})_{p'_i}$ (cela, en vertu du lemme 6 de 2.1, énoncé corrélatif).

Par conséquent $x_0 = p'_i$. Mais alors, (lemme 1 de 2.1), $(b \wedge \bar{p})_{p'_i} = p'_i$ et la proposition corrélatrice par la dualité est également vraie.

3.3. Multistuctures fortes. Nous avons déjà dit que les connexions de Dedekind de 3.2 sont des correspondances généralement multivoques. Or, il peut y arriver que ces connexions soient *univoques* sans que, pour autant, la multistucture se réduise à une structure: c'est ce que montre l'exemple 4 de 1.2. Les quotients $M/a, b/d, M/b, a/d$ y sont, en effet, toujours (totalement) ordonnés et, il suffit alors, d'appliquer le lemme 1 de 2.1. Il en est de même de l'exemple 7 de 1.2 (voir cet exemple, l'avant dernière remarque).

J'appellerai multistucture *forte* une multistucture \mathfrak{M} telle que pour tout quadrilatère $(\Omega, \omega; a, b)$ il y ait au moins un sousquadrilatère $(M_0, d_0; a, b)$ avec $M_0 \in (a \vee b)_\Omega$ et $d_0 \in (a \wedge b)_\omega$, dont les connexions de Dédekend *soient univoques*.

⁹⁾ On voit aussi que (χ_D, φ_D) , constituent des correspondances (multivoques) entre les quotients $M/a, b/d$ et il en est de même de $(\tilde{\chi}_D, \tilde{\varphi}_D)$ à l'égard des quotients $M/b, a/d$.

On vérifie alors immédiatement le fait que quel que soit le sousquadrilatère $(M, d; a, b)$ de $(\Omega, \omega; a, b)$ avec $M \in (a \vee b)_\Omega$ et $d \in (a \wedge b)_\omega$, les connexions de Dedekind qui lui sont attachées, sont toujours univoques.

Théorème. *Pour qu'une multistruclure \mathfrak{M} soit forte il faut et il suffit que dans tout quadrilatère $(\Omega, \omega; a, b)$, il y ait au moins un sousquadrilatère $(M_0, d_0; a, b)$ avec $M_0 \in (a \vee b)_\Omega$ et $d_0 \in (a \wedge b)_\omega$ tel que les conditions suivantes soient remplies:*

1) *Pour chaque $p \in M_0/a$ et chaque paire $x', y' \in b/d_0$ telle que $p \geq x', p \geq y'$, il y ait au moins un $z' \in \mathfrak{M}$ tel que $b \geq z' \geq x', p \geq z' \geq y'$.*

2) *Pour chaque $p' \in b/d_0$ et chaque paire $x, y \in M_0/a$ telle que $p' \leq x, p' \leq y$ il y ait au moins un $z \in \mathfrak{M}$ tel que $a \leq z \leq x, p' \leq z \leq y$.*

La démonstration n'en offre aucune difficulté (voir 1.4).

Corollaire. *Les conditions 1) et 2) ci-dessus sont remplies pourvu que l'ensemble des x' tels que $x' \in b/d_0, p \geq x'$ et l'ensemble des x tels que $x \in M_0/a, p' \leq x$, — soient des structures (ici, comme dans les 1) et 2) ci-dessus, on a naturellement $p \in M_0/a$ et $p' \in b/d_0$).*

§ 4. Multistruclures modulaires

4.1 Définitions. Je dis qu'une multistruclure \mathfrak{M} est *modulaire* lorsque dans tout quadrilatère $(\Omega, \omega; a, b)$ de \mathfrak{M} il existe au moins un sousquadrilatère $(M_0, d_0; a, b)$ avec $M_0 \in (a \vee b)_\Omega$ et $d_0 \in (a \wedge b)_\omega$ tel que la connexion de Dedekind (χ_D, φ_D) , (ou bien $\tilde{\chi}_D, \tilde{\varphi}_D$), qui lui est attachée soit parfaite au sens de [I, § 1]; cela veut dire: 1° que pour chaque $p \in M_0/a$ et chaque $p'_i \in (b \wedge p)_a$, il y ait au moins un $\bar{p}_0 \in (a \vee p'_i)_p$ tel que $\bar{p}_0 = p$, 2° que pour chaque $p' \in b/d_0$ et chaque $p_j \in (a \vee p')_{M_0}$, il y ait au moins un $\bar{p}'_0 \in (b \wedge p_j)_{p'}$, tel que $\bar{p}'_0 = p'$ (d'après le lemme 1 de 2.1, on a alors $(a \vee p'_i)_p = p$ et $(b \wedge p_j)_{p'} = p'$).

4.11. Je dis qu'une multistruclure \mathfrak{M} est α -*modulaire* lorsque la condition 2° précédente y est seule en puissance; de même, je dirai qu'une multistruclure \mathfrak{M} est β -*modulaire* lorsque la condition 1° précédente y est seule en puissance.

4.12 C'est une conséquence immédiate de sa définition que dans une multistruclure modulaire, les propriétés 1° et 2° soient vraies pour chaque sousquadrilatère irréductible $(M, d; a, b)$ de $(\Omega, \omega; a, b)$ et pour chacune des deux connexions (χ_D, φ_D) , $(\tilde{\chi}_D, \tilde{\varphi}_D)$ qui lui sont attachées; il en est de même dans les cas des multistruclures α -modulaires ou β -modulaires.

4.13 Enfin, je dirai qu'une multistruclure \mathfrak{M} est *localement modulaire* lorsqu'il existe un $\omega_0 \in \mathfrak{M}$ tel que pour chaque quadrilatère $(\Omega, \omega_0; a, b)$ il y ait au moins un sousquadrilatère $(M, d; a, b)$ avec $M \in (a \vee b)_\Omega$, $d \in (a \wedge b)_{\omega_0}$ tel que les connexions de Dedekind (χ_D, φ_D) et $(\tilde{\chi}_D, \tilde{\varphi}_D)$ qui lui sont attachées possèdent les propriétés 1° et 2° précédentes.

Remarquons tout de suite que cette dernière définition est une assertion,

généralement *plus faible*, que celle d'après laquelle la sousmultistrukture fermée (1.3) ayant ω_0 pour premier élément serait modulaire.

4.14. Il est aisé de vérifier le fait que les multistruktures discutées dans les exemples 4,5 et 7 de 1.2 sont des multistruktures modulaires; il en est de même de la multistrukture définie par la fig. 5.

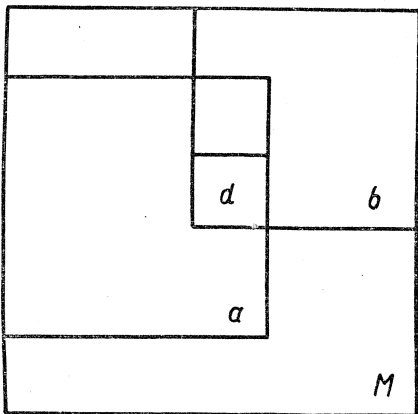


Fig. 6.

4.2. En ce qui concerne les exemples 4,7 de 1.2 il est intéressant de noter qu'il s'y agit de multistruktures à la fois fortes et modulaires. Or, on constate immédiatement que, dans une multistrukture \mathfrak{M} à la fois forte et modulaire, la proposition suivante est toujours vraie:

Soient $(\Omega, \omega; a, b)$ un quadrilatère quelconque de \mathfrak{M} et $M \in (a \vee b)_\Omega$, $d \in (a \wedge b)_\omega$; alors, on a les isomorphismes („de multistrukture“) suivants:

$$M/a \cong b/d \ (\chi_D, \varphi_D); \quad M/b \cong a/d \ (\tilde{\chi}_D, \tilde{\varphi}_D)$$

On en conclut, d'après [I, §3], que dans toute multistrukture forte et modulaire,

deux chaînes aux extrémités communes, possèdent des raffinements canoniques isomorphes.

Une multistrukture modulaire n'est pas nécessairement, une multistrukture forte; c'est précisément ce que montre l'exemple 5 de 1.2. Quant à la réciproque, elle n'est pas vraie non plus, simplement parce qu'il existe des structures non-modulaires.

Il apparaît ainsi dans que une multistrukture modulaire, des quotients (directement) semblables x/y , x'/y' (3.1) ne sont, généralement plus, isomorphes par les connexions de Dedekind et ceci, précisément parce que ces connexions y sont multivoques. Mais il y a plus: dans une multistrukture modulaire il peut y avoir des quotients (directement) semblables, lesquels ne sont isomorphes ni par les connexions de Dedekind ni par quelques autres correspondances que ce soient; c'est précisément ce qui arrive dans l'exemple 5 de 1.2 pour le cas de figure ci-dessous.

On y voit, en effet, que a non $\geq b$, b non $\geq a$ donc $M > a > d$, $M > b > d$ et que $M/a \cong b/d$, $M/b \cong a/d$; or, les quotients M/b , b/d y sont, évidemment, (totalement) ordonnés tandis que M/a , a/d ne le sont pas.

4.3. Théorème. Soient \mathfrak{M} une multistrukture modulaire et $(\Omega, \omega; a, b) \in \mathfrak{M}$; soient $M \in (a \vee b)_\Omega$ et $d \in (a \wedge b)_\omega$. Alors, à tout quotient $p_1 \geq p_2$ tel que $M \geq p_1 \geq p_2 \geq a$ on peut faire correspondre, par les connexions de Dedekind associées

à $(M, d; a, b)$, un quotient $p'_1 \geq p'_2$ tel que $b \geq p'_1 \geq p'_2 \geq d$ et tel que $p_1/p_2 \simeq \simeq p'_1/p'_2$ (on a aussi un théorème corrélatif par la dualité).

Démonstration. Considérons un $p'_2 \in (b \wedge p_2)_a$; il existe alors, d'après le lemme 6 de 2.1, au moins un $p'_1 \in (b \wedge p_1)_a$ tel que $p'_1 \geq p'_2$ et je dis qu'on a $p_1/p_2 \simeq \simeq p'_1/p'_2$, c'est-à-dire que $(p'_1 \vee p_2)_{p_1} = p_1$ et $(p'_1 \wedge p_2)_{p'_2} = p'_2$. Or, puisque \mathfrak{M} est modulaire, on a $(a \vee p'_1)_{p_1} = p_1$; mais $p_1 \geq p_2 \geq a$ et, par conséquent (3.21, lemme 1) on aura aussi $(p'_1 \vee p_2)_{p_1} = p_1$. Puis on a, toujours par le lemme 1 de 3.21 $(p'_1 \wedge p_2)_{p'_2} = p'_2$, ce qui démontre le théorème.

4.31. Corollaire. *Si l'on a $x/y \simeq x'/y'$, alors, les quotients $x/y, x'/y'$ ne sont premiers que simultanément.* Supposons, en effet, que x/y soit premier; si x'/y' n'était pas premier, alors, il y aurait un p' tel que $x' > p' > y'$. Il en résulte l'existence d'un $p \in (y \vee p')_x$ tel que $x/p \simeq x'/p'$. Mais, x/y étant premier, on a ou bien $p = x$ ou bien $p = y$ et par conséquent, ou bien $(x' \wedge p)_{y'} = x'$ ou bien $(x' \wedge p)_{y'} = y'$, c'est-à-dire, finalement, ou bien $p' = x'$ ou bien $p' = y'$ ce qui ne peut être. De même, pour la réciproque. *Plus généralement, les conditions $x/y =$ premier, $x'/y' =$ premier s'entraînent mutuellement dès qu'on a $x/y \simeq x'/y'$.*

4.4. Théorème. *Toute multistruclure α -modulaire (β -modulaire) est une multistruclure modulaire.*

Démonstration. Soient $(\Omega, \omega; a, b)$ un quadrilatère quelconque de \mathfrak{M} et $M \in (a \vee b)_\Omega$, $d \in (a \wedge b)_\omega$; d'après l'hypothèse, on a, $(b \wedge p_i)_{p'} = p'$ pour chaque $p' \in b/d$ et chaque $p_i \in (a \vee p')_M$. Cela étant, considérons un $p \in M/a$ et soient $p'_i \in (b \wedge p)_a$ et $\bar{p} \in (a \vee p'_i)_p$; il faut montrer qu'on a $\bar{p} = p$. Or, on a $p \geq \geq \bar{p} \geq a$ donc (3.21, lemme 1) $(b \vee \bar{p})_M = M$; puis, \mathfrak{M} étant α -modulaire, on aura, dans le quadrilatère $(M, p'_i; p, b)$, $(p \wedge x_i)_{x'} = x'$ pour chaque $x' \in p/p'_i$ et chaque $x_i \in (b \vee x')_M$. Mais \bar{p} c'est un x' car on a évidemment, $p \geq \bar{p} \geq p'_i$ et comme $(b \vee \bar{p})_M = M$ il s'ensuit $(p \wedge M)_{\bar{p}} = \bar{p}$ c'est-à-dire $\bar{p} = p$, q. e. d.

4.41. Corollaire. *Une multistruclure est modulaire si et seulement si les relations $\Omega \geq a \geq \omega$, $\Omega \geq b \geq b' \geq \omega$, $(a \vee b)_\Omega = (a \vee b')_\Omega = \Omega$, $(a \wedge b)_\omega = (a \wedge b')_\omega = \omega$ entraînent $b = b'$.*

4.5. Théorème de raffinement de Schreier. *Dans une multistruclure modulaire, deux chaînes aux extrémités communes possèdent au moins un système de raffinements canoniques de même longueur et dont les quotients conjugués sont T-semblables d'en bas (d'en haut).*

La démonstration¹⁰⁾ repose sur l'application itérée du théorème 4.3. (forme corrélatif) suivant la technique de I, § 3 (seconde démonstration); les détails en sont laissés aux soins du lecteur, dont la tâche serait facilitée par le schéma

¹⁰⁾ Laquelle s'applique également au cas des multistruclures localement modulaires (4.13).

suisvant contenant le premier pas du processus de raffinement (les notations sont celles même de I, § 3 (seconde démonstration)).

$$\begin{aligned}
 \Omega &\cong a_{11} \cong a_{12} \cong \dots \cong a_{1,j-1} \cong a_{1j} \cong \dots \cong a_{1,s-2} \cong a_{1,s-1} \cong a_1, \\
 b_1 &\cong a_{12}^1 \cong \dots \cong a_{1,j-1}^1 \cong a_{1j}^1 \cong \dots \cong a_{1,s-2}^1 \cong a_{1,s-1}^1 \cong d_1^1, \\
 b_2 &\cong \dots \cong a_{1,j-1}^2 \cong a_{1j}^2 \cong \dots \cong a_{1,s-2}^2 \cong a_{1,s-1}^2 \cong d_2^1, \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 b_{j-1} &\cong a_{1j}^{j-1} \cong \dots \cong a_{1,s-2}^{j-1} \cong a_{1,s-1}^{j-1} \cong d_{j-1}^1, \\
 b_j &\cong \dots \cong a_{j,s-2}^j \cong a_{j,s-1}^j \cong d_j^1, \\
 &\dots\dots\dots \\
 b_{s-2} &\cong a_{1,s-1}^{s-2} \cong d_{s-2}^1, \\
 b_{s-1} &\cong d_{s-1}^1, \\
 &\omega.
 \end{aligned}$$

Ici, on a

$$a_{11} \in (a_1 \vee b_1)_\Omega, \quad d_1^1 \in (a_1 \wedge b_1)_\omega, \quad \dots, \quad d_j^1 \in (d_{j-1}^1 \wedge b_j), \quad j = 1, 2, \dots, s$$

$$(d_0^1 = a_1, \quad d_s^1 = \omega).$$

Puis, on a

$$a_{1j}^{j-1} \in (b_j \vee d_{j-1}^1)_{b_{j-1}}, \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (a_{11}^0 = a_{11})$$

et, à la fin,

$$a_{1,j-1}/a_{1,j} \sim b_{j-1}/a_{1,j}^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (a_{10} = \Omega, a_{1s} = a_1);$$

on a, effectivement, par l'application itérée du théorème 4.3 (forme corrélatiue),

$$a_{1,j-1}/a_{1,j} \simeq a_{1,j-1}^1/a_{1,j}^1 \simeq a_{1,j-1}^2/a_{1,j}^2 \simeq \dots \simeq a_{1,j-1}^{j-2}/a_{1,j}^{j-2} \simeq b_{j-1}/a_{1,j}^{j-1},$$

$j = 1, 2, \dots, s$ et, il suffit alors, d'appliquer la définition de la relation \sim (3.1).

4.51. Corollaire (théorème Jordan-Hölder). *Dans une multistrueture modulaire de longueur finie deux séries aux extrémités communes ont même longueur et les quotients T -semblables d'en bas (d'en haut), en quelque ordre.*

4.6. Théorème. *Soit \mathfrak{M} une multistrueture méromorphe (I, §4) et qui soit en même temps un espace Δ modulaire (I, §2); alors, \mathfrak{M} est une multistrueture modulaire.*

Démonstration. Soient $(\Omega, \omega; a, b)$ un quadrilatère quelconque de \mathfrak{M} et $M \in (a \vee b)_\Omega$, $d \in (a \wedge b)_\omega$, $p' \in b/d$, $p_j \in (a \vee p')_M$, $\bar{p}' \in (b \wedge p_j)_{p'}$. On a évidemment $M \geq p_j \geq a$, $b \geq \bar{p}' \geq p' \geq d$ et aussi $(a \vee \bar{p}')_{p_j} = p_j$ (3.21, lemme 2, forme corrélatiue). Par conséquent

$$p_j/a \Leftrightarrow p'/d, \quad p_j/a \Leftrightarrow \bar{p}'/d$$

il s'ensuit $\bar{p}'/d \Leftrightarrow p'/d$ et, finalement, puisque \mathfrak{M} est méromorphe, $\bar{p}' = p'$. Ce qui, d'après 4.4, démontre le théorème.

Remarque. La proposition précédente est l'analogue du théorème de Ward de I, § 4.

4.7. Sur les conditions de semimodularité. Soit \mathfrak{M} une multistruclure modulaire; on a vu à 4.31 que si l'on a $x/y \simeq x'/y'$ (ou, plus généralement, $x/y \sim x'/y'$) alors la condition $x/y = \text{premier}$ entraîne la condition $x'/y' = \text{premier}$ et réciproquement. Il suit de là que, dans toute multistruclure modulaire les propriétés suivantes sont en puissance:

(σ') Soit $(\Omega, \omega; a, b)$ un quadrilatère de \mathfrak{M} tel que $a/\omega = \text{premier}$, $b/\omega = \text{premier}$ et que $a \neq b$; alors, on a $M/a = \text{premier}$, $M/b = \text{premier}$ quel que soit $M \in (a \vee b)_\Omega$.

(σ'') Soit $(\Omega, \omega; a, b)$ un quadrilatère de \mathfrak{M} tel que $\Omega/a = \text{premier}$, $\Omega/b = \text{premier}$ et que $a \neq b$; alors, on a $a/d = \text{premier}$, $b/d = \text{premier}$, quel que soit $d \in (a \wedge b)_\omega$.

Ces conditions (σ'), (σ''), nous les appellerons parfois *première* et *seconde condition de semimodularité*, respectivement; nous allons voir un peu plus loin que, sous certaines hypothèses, ces conditions de semimodularité sont respectivement équivalentes aux conditions de primitivité [17] suivantes:

(π') Soit $(\Omega, \omega; a, b)$ un quadrilatère de \mathfrak{M} et supposons qu'il y ait un $d \in (a \wedge b)_\omega$ tel que $b/d = \text{premier}$; on a alors $M/a = \text{premier}$, quel que soit $M \in (a \vee b)_\Omega$.

(π'') Soit $(\Omega, \omega; a, b)$ un quadrilatère de \mathfrak{M} et supposons qu'il y ait un $M \in (a \vee b)_\Omega$, tel que $M/a = \text{premier}$; on a alors $b/d = \text{premier}$ quelque soit $d \in (a \wedge b)_\omega$.

Notre principal but, dans les alinéas suivants, est de démontrer que l'une ou l'autre des conditions (σ'), (σ''), prise à part, est nécessaire et suffisante afin que le théorème Jordan-Hölder soit valide dans une multistruclure (de longueur finie), sous l'une ou l'autre des formes que nous allons préciser; nous aurons, de la sorte, généralisé des résultats assez récents de Kořinek, [17] et précisé davantage certains résultats de Ore, [5].

Soit \mathfrak{M} une multistruclure dont les chaînes bornées soient finies; alors, la condition (σ'') est nécessaire et suffisante afin que la proposition suivante soit vraie dans \mathfrak{M} :

Théorème. *Deux séries aux extrémités communes $\Omega > \omega$ ont même longueur et il existe une correspondance biunivoque (et non-lacunaire) entre leurs quotients de façon telle que des quotients correspondants soient T-semblables d'en bas et que le quotient intermédiaire s/t qui leur est associé satisfasse aux conditions $\Omega \geq s > t \geq \omega$ ¹¹.*

L'application de la dualité nous fournit une proposition corrélatrice, laquelle est (sous même supposition quant aux chaînes de \mathfrak{M}) logiquement équivalente à (σ').

4.71. Démontrons d'abord la suffisance. Or, le fait que les deux séries ont même longueur est simplement une conséquence de la „quadrilateral condition“

¹¹ Il importe de remarquer que ces conditions $\Omega \geq s > t \geq \omega$ ne signifient point une restriction; car, de ce que la condition (σ'') est valide dans \mathfrak{M} , il s'ensuit évidemment qu'elle y est valide dans toute sousmultistruclure de la forme Ω/ω , $\Omega, \omega \in \mathfrak{M}$ (voir aussi 4.5 et 4.51).

(forme corrélatrice) de Ore, [5]. Pour vérifier la seconde partie du théorème, nous allons appliquer un raisonnement inductif. La propriété est évidemment vraie pour chaque paire de séries (aux extrémités communes) de longueur 2; supposons donc qu'elle le soit aussi pour chaque paire de séries (aux extrémités communes) de longueur plus petite qu'un nombre naturel $r > 2$. Soient

$$\begin{aligned} \Omega > a_1 > a_2 > \dots > a_{r-1} > \omega & a_0 = b_0 = \Omega, a_r = b_r = \omega \\ \Omega > b_1 > b_2 > \dots > b_{r-1} > \omega & \end{aligned} \quad (5)$$

deux séries de longueur r ; on peut y supposer que $a_1 \neq b_1$ et $a_{r-1} \neq b_{r-1}$ sans quoi on n'aurait plus rien à démontrer. Soit $d_1 \in (a_1 \wedge b_1)_\omega$; d'après (σ'') et puisque $a_1 \neq d_1$, on aura naturellement $a_1/d_1 =$ premier, $b_1/d_1 =$ premier et aussi

$$\Omega/a_1 \simeq b_1/d_1, \quad \Omega/b_1 \simeq a_1/d_1. \quad (5')$$

Maintenant, ou bien $d_1 \neq b_2$ ou bien $d_1 = b_2$.

1. Supposons d'abord qu'on ait $d_1 = b_2$; alors, nous considérons les séries

$$\begin{aligned} a_1 > a_2 > \dots > a_{r-1} > \omega, \\ a_1 > d_1 > b_3 > b_4 > \dots > b_{r-1} > \omega \end{aligned}$$

dont la longueur est, évidemment, égale à $r - 1$. Or, la propriété étant vraie pour les paires de séries de longueur moindre que r , il y aura entre les quotients $a_1/a_2, a_2/a_3, \dots, a_{r-1}/\omega$ d'une part, et les quotients $a_1/d_1, d_1/b_3 = b_2/b_3, b_3/b_4, \dots, b_{r-1}/\omega$ d'autre part, une correspondance biunivoque (et non lacunaire) telle que les quotients correspondants soient T-semblables d'en bas, et que le quotient intermédiaire qui leur est attaché s/t , soit tel que $a_1 \geq s > t \geq \omega$.¹¹)

On aura ainsi, en particulier, $a_1/d_1 \sim s/t$ et $a_{i_0-1}/a_{i_0} \sim s/t, i_0 > 1$ donc aussi (par la seconde des (5'), $d_1 = b_2$, et la transitivité de \sim) $\Omega/b_1 \sim s/t$ et $a_{i_0-1}/a_{i_0} \sim \sim s/t$; on n'a plus alors qu'à prolonger la définition de la correspondance biunivoque (et non lacunaire) qu'institue la récurrence, en y ajoutant la paire $\Omega/a_1, b_1/b_2$ de (5'). La propriété est donc vraie pour les séries (5).

2. Supposons en second lieu que $d_1 \neq b_2$; alors, puisque $b_1/d_1 =$ premier et $b_1/b_2 =$ premier, on aura aussi $d_1/d_2 =$ premier et $b_2/d_2 =$ premier et

$$b_1/d_1 \simeq b_2/d_2, \quad b_1/b_2 \simeq d_1/d_2 \quad (6)$$

pour chaque $d_2 \in (d_1 \wedge b_2)_\omega$. Maintenant si, par hasard, $d_2 = b_3$, alors, en considérant les séries $a_1 > a_2 > \dots > a_{r-1} > \omega, a_1 > d_1 > d_2 > b_4 > b_5 > \dots > b_{r-1} > \omega$, on raisonnera comme on vient de le faire sous 1. Supposons donc $d_2 \neq b_3$ et soit $d_3 \in (d_2 \wedge b_3)_\omega$; on aura $d_2/d_3 =$ premier, $b_3/d_3 =$ premier et

$$b_2/d_2 \simeq b_3/d_3, \quad b_2/b_3 \simeq d_2/d_3. \quad (6')$$

En général, si, après avoir déterminé ainsi un d_{j-1} avec $b_{j-1} > d_{j-1}$ et $b_{j-1}/d_{j-1} =$ premier ($j > 1$) on aurait $d_{j-1} = b_j$, alors, on considérerait les séries $a_1 > a_2 > \dots > a_{r-1} > \omega, a_1 > d_1 > d_2 > \dots > d_{j-1} > b_{j+1} > b_{j+2} > \dots > b_{r-1} > \omega$ et l'on raisonnerait comme précédemment. Si, par contre,

on a toujours $d_{j-1} \neq b_j$, on choisira un $d_j \in (d_{j-1} \wedge b_j)_\omega$ et l'on aura $d_{j-1}/d_j =$
 $=$ premier, $b_j/d_j =$ premier et aussi

$$b_{j-1}/d_{j-1} \simeq b_j/d_j, \quad b_{j-1}/b_j \simeq d_{j-1}/d_j, \quad j = 2, 3, \dots \quad (6'')$$

Supposons, enfin, qu'on ait $d_{j-1} \neq b_j$ pour chaque $j = 2, 3, \dots, r-2$ et soit $d_{r-1} \in (d_{r-2} \wedge b_{r-1})_\omega$; puisque $d_{r-2} \neq b_{r-1}$ et que b_{r-2}/d_{r-2} et b_{r-2}/b_{r-1} sont premiers, on aura évidemment $d_{r-1} = \omega$. On considérera alors les séries $a_1 > a_2 > \dots > a_{r-1} > \omega$, $a_1 > d_1 > d_2 > \dots > d_{j-1} > d_j > \dots > d_{r-2} > \omega$ et on leur appliquera l'hypothèse inductive. On obtiendra ainsi les relations

$$\begin{aligned} a_{i-1}/a_i &\sim s_i/t_i, & d'_{\pi(i-1)}/d'_{\pi(i)} &\sim s_i/t_i \\ a_1 &\geq s_i > t_i > \omega, & i &= 2, 3, \dots, r \end{aligned} \quad (7)$$

où l'on a posé $d'_1 = a_1$, $d'_2 = d_1$, $d'_3 = d_2$, \dots , $d'_i = d_{i-1}$ et où $\pi(i)$ est la trace qu'une certaine permutation $(i-1, i) \rightarrow \pi((i-1, i)) = (l-1, l)$ des couples ordonnés $(i-1, i)$, laisse sur les indices $i = 2, 3, \dots, r$. Les secondes relations (7) s'écrivent aussi (à cause de $d'_i = d_{i-1}$)

$$d'_{\pi(i-1)-1}/d'_{\pi(i)-1} \sim s_i/t_i, \quad i = 2, 3, \dots, r \quad (d_0 = a_1)$$

lesquelles nous donnent, vu les secondes relations (5'), (6'')

$$b_{\pi(i-1)-1}/b_{\pi(i)-1} \sim s_i/t_i, \quad i = 2, 3, \dots, r.$$

On n'a plus qu'à y ajouter $\Omega/a_1 \sim b_{r-1}/\omega$ ce qui achève la démonstration, (car on a, vu les troisièmes relations (7), $\Omega \geq s_i > t_i \geq \omega$, $i = 1, 2, 3, \dots, r$).

4.72. Maintenant il s'agit de démontrer que la condition (σ'') est nécessaire afin que le théorème Jordan-Hölder soit valide dans une multistruccure \mathfrak{M} (de longueur finie) sous la forme énoncée à 4.7.

Soit $(\Omega, \omega; a, b)$ un quadrilatère de \mathfrak{M} tel que $\Omega/a =$ premier, $\Omega/b =$ premier et que $a \neq b$; il s'ensuit immédiatement a non $\leq b$, b non $\leq a$ et, par conséquent, $d < a$, $d < b$ pour chaque $d \in (a \wedge b)_\omega$.

Alors, si, par hasard, on a $a/d =$ premier, on aura aussi $b/d =$ premier car, les séries allant de Ω à d , doivent, par hypothèse, avoir même longueur.

Supposons donc que a/d et b/d soient non premiers et considérons les séries

$$\begin{aligned} \Omega &> a > x_1 > x_2 > \dots > x_{i-1} > x_i > \dots > x_{r-1} > d, \\ \Omega &> b > y_1 > y_2 > \dots > y_{j-1} > y_j > \dots > y_{s-1} > d, \\ x_0 &= a, \quad y_0 = b, \quad x_r = y_s = d. \end{aligned} \quad (8)$$

Evidemment, $r = s > 0$ et a non $\leq y_j$, y_j non $\leq a$, b non $\leq x_i$, x_i non $\leq b$ pour chaque $i, j = 1, 2, \dots, r-1$ (car $d \in (a \wedge b)_\omega$!).

Maintenant je dis que notre hypothèse par l'absurde est en contradiction avec l'existence d'une correspondance biunivoque et non lacunaire (entre les quotients des séries (8)) satisfaisant aux conditions du théorème de 4.7. En effet, quel que soit le principe de cette correspondance, il y aura toujours un quotient x_{i-1}/x_i , $i \geq 1$ qui soit T -semblable d'en bas à un quotient y_{j-1}/y_j ,

$j \geq 1: x_{i-1}/x_i \sim t/t', y_{j-1}/y_j \sim t/t', \Omega \geq t > t' \geq d^{(1)}$; mais, alors, on devrait y avoir $a > t, b > t, t > t' \geq d$, ce qui ne peut être (car $d \in (a \wedge b)_\omega$!).

La nécessité de la condition (σ'') est démontrée.

4.73. Nous allons maintenant démontrer que *la condition de semimodularité (σ') est équivalente à la condition de primitivité (π'')* .

D'abord, il est clair que cette dernière entraîne la première; pour démontrer la réciproque, nous allons supposer que les chaînes bornées de \mathfrak{M} sont finies.

Soit $(\Omega, \omega; a, b)$ un quadrilatère de \mathfrak{M} ; nous supposons, afin d'écartier le cas trivial, que $a \text{ non } \leq b$ et $b \text{ non } \leq a$.

Soient $M \in (a \vee b)_\Omega$ et $d \in (a \wedge b)_\omega$ et supposons que M soit tel que $M > a$ soit un intervalle premier; je dis *qu'il en est de même de b/d* . En effet, soit $M > q_1 > q_2 > \dots > q_{j-1} > q_j > \dots > q_{s-1} > b$ une série quelconque allant de M à b . On a évidemment $a \neq q_1$ (car $M \in (a \vee b)_\Omega$), donc, d'après (σ'') , on aura $q_1/q'_1 = \text{premier}$ et $a/q'_1 = \text{premier}$ pour chaque $q'_1 \in (a \wedge q_1)_a$.

En continuant par voie d'induction, on aura en particulier $a > q'_{s-1} \geq d$, $q_{s-1} > q'_{s-1}$, $q_{s-1}/q'_{s-1} = \text{premier}$, puis, comme $b \neq q'_{s-1}$, un $q'_s \in (q'_{s-1} \wedge b)_a$ tel que $(q'_{s-1}/q'_s = \text{premier et}) b/q'_s = \text{premier}$. Or, $q'_s = d$, car $a > q'_s \geq d, b > q'_s \geq d$; ainsi, $b/d = \text{premier}$, q. e. d.

L'application de la dualité nous fournit le résultat complémentaire que dans toute multistruclure dont les chaînes bornées sont finies, les propositions (π') et (σ') sont logiquement équivalentes.

4.74. Nous allons enfin prouver que *l'ensemble des conditions (σ') et (σ'') (ou bien des conditions (π') et (π'') équivaut à ce que la multistruclure \mathfrak{M} soit modulaire (pourvu que ses chaînes bornées soient finies)*.

Il est clair en effet que la modularité de \mathfrak{M} entraîne les conditions (σ') et (σ'') à la fois (voir 4.31). Quant à la réciproque, il convient tout d'abord d'établir la proposition suivante:

Lemme. *Soit \mathfrak{M} une multistruclure arbitraire et $x, y, z \in \mathfrak{M}$ tels que $x > y$ avec $x/y = \text{premier}$ et que $z \wedge y \neq \emptyset$ ($z \vee x \neq \emptyset$). Soit, de même, $d \in z \wedge y$ ($M \in z \vee x$). Alors, si parmi tous les $d' \in z \wedge x$ tels que $d' \geq d$ ($M' \in z \vee y$ tels que $M' \leq M$; 2.1, lemme 6) il y en a tels que $d' > d$ ($M' < M$), — on aura $x/y \simeq d'/d$ ($M/M' \simeq x/y$).*

Démonstration. On a évidemment $z \geq d' > d, y \geq d$ et, par conséquent, $d \in (y \wedge d')_a$. Soit $M^* \in (y \vee d')_x$; on a $x \geq M^* \geq y$. Or, on ne peut avoir $M^* = y$, sans quoi on aurait $y \geq d'$ et par conséquent, vu que $d' > d, -d \text{ non } \in z \wedge y$. Ainsi $M^* = x$ (car $x/y = \text{premier}$) et la démonstration s'achève par l'application de la dualité.

4.741. Maintenant, soit \mathfrak{M} une multistruclure dont les chaînes bornées sont finies et telle que les conditions $(\sigma'), (\sigma'')$ y soient, à la fois, en puissance.

Considérons un intervalle quelconque $\Omega > \omega$ de \mathfrak{M} et $x \in \Omega/\omega$; designons par $\|x\|_\Omega$ la longueur d'une série allant de Ω à x . Nous allons prouver qu'on a

$$\|a\|_\Omega + \|b\|_\Omega = \|M\|_\Omega + \|d\|_\Omega \quad (9)$$

où $a, b \in \Omega/\omega$ et où $M \in (a \vee b)_\Omega$ et $d \in (a \wedge b)_\omega$.

En effet, soit $M > p_1 > p_2 > \dots > p_{r-1} > a$ une série allant de M à a . Considérons un $p'_{r-1} \in (b \wedge p_{r-1})_a$ puis $p'_{r-2} \in (b \wedge p_{r-2})_{p'_{r-1}}$ puis encore $p'_{r-3} \in (b \wedge p_{r-3})_{p'_{r-2}}$, etc. On obtient de la sorte une chaîne $b \cong p'_1 \cong p'_2 \cong \dots \cong p'_{r-2} \cong p'_{r-1} \cong d$ dont je dis qu'elle est de longueur *au plus* égale à r . Car, en vertu du lemme précédent et de 4.73, si l'on a $p'_{i-1} > p'_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$; $p'_0 = b, p'_r = d$) on aura même $p'_{i-1}/p'_i = \text{premier}$.

Conséquemment, $\|d\|_\Omega - \|b\|_\Omega \leq \|a\|_\Omega - \|M\|_\Omega$, c'est-à-dire

$$\|a\|_\Omega + \|b\|_\Omega \geq \|M\|_\Omega + \|d\|_\Omega. \quad (9')$$

L'application de la dualité nous fournit encore

$$\|a\|_\Omega + \|b\|_\Omega \leq \|M\|_\Omega + \|d\|_\Omega. \quad (9'')$$

L'égalité (9) est la conséquence immédiate de (9') et (9'') et il ne reste plus qu'à appliquer le théorème 5.5¹²).

4.742. Remarque. Si l'on désigne par $\|x\|_\omega$ la longueur d'une série allant de x à ω ($x \in \Omega/\omega$) on aura encore (les hypothèses étant les mêmes)

$$\|a\|_\omega + \|b\|_\omega = \|M\|_\omega + \|d\|_\omega. \quad (10)$$

§ 5. Théorie des évaluations

5.1. Définitions. Soit \mathfrak{M} une multistrukture; je dis qu'une fonctionnelle $v[a]$, $a \in \mathfrak{M}$, est une *évaluation sur \mathfrak{M} de première espèce*, lorsque pour chaque couple $a, b \in \mathfrak{M}$ tel que $a \vee b \neq \emptyset$, $a \wedge b \neq \emptyset$ il y a un $M \in a \vee b$ et un $d \in a \wedge b$ de façon qu'on ait

$$V1. \quad v[a] + v[b] = v[M] + v[d]$$

Je dis qu'une fonctionnelle $v[a]$ est une *évaluation sur \mathfrak{M} de seconde espèce*, lorsque pour chaque couple $a, b \in \mathfrak{M}$ tel que $a \vee b \neq \emptyset$, $a \wedge b \neq \emptyset$ et pour chaque $M \in a \vee b$ ($d \in a \wedge b$) il y a un $d \in a \wedge b$ ($M \in a \vee b$) de façon que V1 soit en puissance.

Enfin, je dis qu'une fonctionnelle $v[a]$ est une *évaluation sur \mathfrak{M} de troisième espèce* lorsque pour chaque couple $a, b \in \mathfrak{M}$ tel que $a \vee b \neq \emptyset$, $a \wedge b \neq \emptyset$, la relation V1 est en puissance pour chaque $M \in a \vee b$ et chaque $d \in a \wedge b$.

5.12. Une évaluation $v[a]$ sur \mathfrak{M} sera dite *isotone* lorsque pour chaque couple $a \geq b$ de \mathfrak{M} , on a

¹²) Relativement à la sousmultistrukture (fermée!) Ω/ω .

V2. $a \geq b$ entraîne $v[a] \geq v[b]$

Enfin, elle sera dite *positive* si

V2'. $a > b$ entraîne $v[a] > v[b]$

5.13. Une multistruclure sera dite *normée* lorsqu'elle possède une évaluation positive de troisième espèce.

5.2. Exemples. Les multistruclures décrites dans les exemples 4, 5, 7 de 1.2 possèdent des évaluations de première et de seconde espèces, telles les suivantes

1) $v[a] = R(a)$ ($R(a)$ = mesure du rayon du cercle a ; exemple 4 de 1.2)

2) $v[(x, y, z, t)] = (ht + k) + lx + my + nz$ (exemple 7 de 1.2)³)

3) $v[(x, y, z, t)] = x^2 + y^2 + z^2 + ct^2$.

Les deux premières sont des évaluations de seconde espèce; la troisième est une évaluation de première espèce. La fonction $v[(x, y, z, t)] = t$ est une évaluation *positive* de seconde espèce sur la multistruclure K_4 (exemple 7 de 1.2)³).

Quant à l'exemple 5 de 1.2, c'est une multistruclure normée qu'on obtient en posant $v[a] = C(a)$ ($C(a)$ = mesure du côté du carré a). Un autre exemple, très important celui-là, de multistruclure normée nous est fourni par les multistruclures modulaires de longueur finies et ayant un dernier (premier) élément; cela résulte immédiatement de l'égalité (9), ou (10) en prenant pour évaluation $v[x] = \|x\|_1$ ($v[x] = \|x\|_0$).

5.3. Voici quelques conséquences simples de V1 et V2'. Tout d'abord, l'axiome V2' entraîne que $a = b$ soit une conséquence de $a \geq b$ et $v[a] = v[b]$. Puis, on a la proposition suivante:

5.31. Lemme. Soit \mathfrak{M} une multistruclure normée et $a, b \in \mathfrak{M}$ tels que $a \vee b \neq \emptyset$, $a \wedge b \neq \emptyset$. Alors on a $v[M] = K' = \text{constant}$ et $v[d] = K'' = \text{constant}$ pour chaque $M \in a \vee b$ et chaque $d \in a \wedge b$.

Démonstration. Le lemme est un corollaire immédiat de l'égalité V1.

5.32. Corollaire. A tout couple $a, b \in \mathfrak{M}$ tel que $a \vee b \neq \emptyset$, $a \wedge b \neq \emptyset$ on peut attacher le nombre non-négatif $\partial(a, b) = v[M] - v[d]$ jouissant des propriétés usuelles suivantes: 1. $\partial(a, b) = \partial(b, a)$, 2. $\partial(a, b) = 0$ si et seulement si $a = b$.

Ce nombre $\partial(a, b)$ est, du reste, une véritable distance; on a, en effet, la proposition suivante

5.4. Théorème. Toute multistruclure normée est un espace métrique pourvu qu'elle soit un ensemble filtrant et que la distance y soit définie par $\partial(a, b) = v[M] - v[d]$, (5.3).

Démonstration. On a, puisque \mathfrak{M} est filtrant, $a \vee b \neq \emptyset$, $a \wedge b \neq \emptyset$, pour chaque couple $a, b \in \mathfrak{M}$; ainsi $\partial(a, b)$ y est défini pour chaque couple $a, b \in \mathfrak{M}$ et, d'après 5.32, il suffit de montrer qu'on a $\partial(a, c) + \partial(c, b) \geq \partial(a, b)$; $a, b, c \in \mathfrak{M}$.

Or, on a successivement:

$$\begin{aligned} v[a] + v[c] &= v[M'] + v[d']; & M' \in a \vee c, & d' \in a \wedge c, \\ v[b] + v[c] &= v[M''] + v[d'']; & M'' \in b \vee c, & d'' \in b \wedge c, \\ v[a] + v[b] &= v[M] + v[d]; & M \in a \vee b, & d \in a \wedge b. \end{aligned}$$

et, par conséquent:

$$\partial(a, c) + \partial(c, b) - \partial(a, b) = 2(v[c] + v[d] - v[d'] - v[d'']). \quad (11)$$

Puis, on a $a, c \geq d'$ et $b, c \geq d''$; si donc $x \in (d' \vee d'')_c$ et $y \in d' \bar{\wedge} d''$, on aura encore

$$v[d'] + v[d''] = v[x] + v[y]$$

et, par suite, le second membre de (11) s'écrira $2(v[c] - v[x] + v[d] - v[y])$. Mais, évidemment, $v[c] \geq v[x]$ et, je dis qu'on peut trouver un $d \in a \wedge b$ tel que $d \geq y$; il suffit, pour s'en convaincre, d'appliquer le lemme 6 de 2.1 (deux fois de suite) aux intervalles $a \geq d', b \geq d''$.

On aura donc $v[d] \geq v[y]$ et, finalement, $\partial(a, c) + \partial(c, b) \geq \partial(a, b)$!

Remarque. Lorsque \mathfrak{M} est une structure, le théorème précédent est une partie d'un théorème bien connu de V. GLIVENKO [18]; on peut aussi étendre aux multistrukture normées la majeure partie des théorèmes de la „Géométrie des systèmes de choses normées“ de cet auteur, mais je ne le ferai pas ici.

5.5. Théorème. Toute multistrukture normée est modulaire.

Démonstration. Les notations étant celles de 3.21 (lemmes 1 et 2) il suffit de montrer qu'on a $\bar{p}' = p'$. Or, d'après les lemmes que je viens de citer, on peut écrire

$$\begin{aligned} v[a] + v[p'] &= v[p_j] + v[d], \\ v[a] + v[\bar{p}'] &= v[p_j] + v[d] \end{aligned}$$

donc $v[\bar{p}'] = v[p']$ c'est-à-dire précisément (puisque $\bar{p}' \geq p'$), $\bar{p}' = p'$ et le théorème est démontré.

5.51. Remarque. La propriété réciproque à savoir, que toute multistrukture \mathfrak{M} modulaire est normée, est également vraie, *pourvu que les chaînes bornées de \mathfrak{M} soient finies* (voir 4.741).

§ 6. Multistrukture distributives

6.1. Définition. Nous avons vu à 4.41 qu'une multistrukture modulaire peut être caractérisée par cette propriété que pour chaque paire de chaînes $\Omega \geq a \geq \omega$, $\Omega \geq b \geq b' \geq \omega$, les conditions $(a \vee b')_\Omega = \Omega$ et $(a \wedge b)_\omega = \omega$ entraînent l'égalité $b = b'$; l'analogie avec la théorie des structures, nous suggère alors la définition suivante:

Une multistructure sera dite *distributive* chaque fois que les conditions $\Omega \geq a, b, b' \geq \omega$ et les conditions $(a \vee b)_\Omega = (a \vee b')_\Omega = \Omega, (a \wedge b)_\omega = (a \wedge b')_\omega = \omega$ entraînent l'égalité $b = b'$.

Voici une autre formulation, très commode, de cette définition. Appelons *complément de a relativement à $\Omega \geq \omega$* ($\Omega \geq a \geq \omega$) tout élément b (s'il en existe) tel que $\Omega \geq b \geq \omega$ et que $(a \vee b)_\Omega = \Omega, (a \wedge b)_\omega = \omega$.

D'après cela, une multistructure sera distributive si et seulement si, les compléments relatifs de ses éléments sont uniques (pourvu qu'ils existent).

Au sens de cette définition les multistructures suivantes sont distributives: les structures distributives, la multistructure décrite à 3.12, l'ensemble (partiellement ordonné par l'inclusion) des sousgroupes cycliques ou, plus généralement, des sous-groupes cycliques généralisés, [1], de quelque groupe, les sousmultistructures *fermées* et les produits cartésiens de multistructures distributives. Un dernier exemple intéressant nous en est fourni par les espaces métriques *transitifs* formées par les éléments d'une multistructure normée et filtrante (5.4); nous allons en donner la raison ci-dessous:

6.11. Lemme. *Soit \mathfrak{M} une multistructure filtrante et supposons que \mathfrak{M} soit un espace métrique tel que pour chaque couple $b, c \in \mathfrak{M}$ et chaque couple L, m tel que $L \in b \vee c$ et $m \in b \wedge c$ on ait*

$$\partial(a, b) + \partial(a, c) = \partial(a, L) + \partial(a, m)$$

quelque soit $a \in \mathfrak{M}$ avec $L \geq a \geq m$. Alors, la multistructure est distributive.

Démonstration. Soient $a, b, b', \Omega, \omega \in \mathfrak{M}$ tels que $\Omega \geq a, b, b' \geq \omega$ et tels que

$$\begin{aligned} (a \vee b)_\Omega &= (a \vee b')_\Omega = \Omega, \\ (a \wedge b)_\omega &= (a \wedge b')_\omega = \omega. \end{aligned}$$

Il faut prouver qu'il en résulte $b = b'$. Or, puisque $\Omega \in a \vee b, \Omega \in a \vee b', \omega \in a \wedge b, \omega \in a \wedge b'$ et que $\Omega \geq b \geq \omega$ on pourra écrire

$$\begin{aligned} \partial(b, a) + \partial(b, b) &= \partial(b, \Omega) + \partial(b, \omega) \\ \partial(b, a) + \partial(b, b') &= \partial(b, \Omega) + \partial(b, \omega). \end{aligned}$$

On déduit par soustraction (puisque $\partial(b, b) = 0$), $\partial(b, b') = 0$ ce qui entraîne $b = b'$, q. e. d.

6.12. Théorème. *Soit \mathfrak{M} une multistructure normée et filtrante et supposons que l'espace métrique (5.4) formée par ses éléments soit transitif; alors, la multistructure \mathfrak{M} est distributive.*

Démonstration. Je rappelle qu'un espace métrique E est dit *transitif* lorsque pour chaque couple $a, b \in E$ les conditions

$$\begin{aligned} \partial(a, x) + \partial(x, b) &= \partial(a, b), \\ \partial(a, y) + \partial(y, b) &= \partial(a, b), \\ \partial(x, z) + \partial(z, y) &= \partial(x, y), \end{aligned}$$

($x, y, z \in E$), entraînent la condition $\partial(a, z) + \partial(z, b) = \partial(a, b)$.

Cela posé, soient $b, c \in \mathfrak{M}$ et $L \in b \vee c$, $m \in b \wedge c$; je dis qu'on a

$$\begin{aligned} \partial(b, L) + \partial(L, c) &= \partial(b, c), \\ \partial(b, m) + \partial(m, c) &= \partial(b, c). \end{aligned} \quad (12)$$

On a, en effet, successivement

$$\begin{aligned} \partial(b, L) &= v[L] - v[b], \\ \partial(L, c) &= v[L] - v[c], \end{aligned}$$

$$\partial(b, L) + \partial(L, c) = 2v[L] - v[b] - v[c] = v[L] - v[m] = \partial(b, c)$$

ce qui prouve la première des (12). Quant à la seconde des (12) on peut appliquer la dualité.

Maintenant, soit $a \in \mathfrak{M}$ tel que $L \geq a \geq m$; il en résulte

$$\partial(L, a) + \partial(a, m) = \partial(L, m); \quad (13)$$

les relations (12) prouvent alors, vu la transitivité de l'espace métrique \mathfrak{M} , qu'on a

$$\partial(b, a) + \partial(a, c) = \partial(b, c),$$

et, par conséquent, d'après (13) et la définition de $\partial(b, c)$

$$\partial(a, b) + \partial(a, c) = \partial(a, L) + \partial(a, m), \quad (L \geq a \geq m).$$

Le théorème est maintenant la conséquence du lemme 6. 11.

6.2. Il convient de remarquer que les lois ordinaires de distributivité n'y sont plus généralement en puissance dans les multistruktures distributives; c'est ce que montre l'exemple de 3.12: on a, en effet

$$c \vee (a \wedge b) = \{a, b, c\} \neq \{c, d\} = (c \vee a) \wedge (c \vee b)$$

(quant à la signification d'une expression telle que $c \wedge (a \vee b)$ voir les définitions (2), (2') de 2.1).

6.3. Il est évident que chaque multistrukture distributive est modulaire mais, la réciproque n'est par vraie simplement parce que les structures modulaires ne sont pas toutes distributives (voir aussi l'ex. 4 de 1.2).

6.4. Une propriété très importante des multistruktures distributives, c'est qu'elles sont des multistruktures fortes (3.3).

Soient, en effet, $(\Omega, \omega; a, b)$ un quadrilatère quelconque et $M \in (a \vee b)_\Omega$, $d \in (a \wedge b)$, $p' \in b/d$ et $p_j, p'_j \in (a \vee p')_M$. On a évidemment, (3.21, lemme 1), $(b \vee p_j)_M = (b \vee p'_j)_M = M$. Puis on a, la multistrukture étant modulaire, $(b \wedge p_j)_{p'} = (b \wedge p'_j)_{p'} = p'$. Il s'ensuit $p_j = p'_j$, et, par la dualité, aussi $p'_i = p_i$, pour chaque $p \in M/a$ et chaque couple $p'_i, p_i \in (b \wedge p)_a$.

Il en résulte les isomorphismes $M/a \rightleftharpoons b/d \pmod{\chi_D, \varphi_D}$, $M/b \rightleftharpoons a/d \pmod{\tilde{\chi}_D, \tilde{\varphi}_D}$ et, partant, (I, §3), le théorème de raffinement de Schreier.

6.5. Théorème.¹³⁾ Soit \mathfrak{M} une multistruclure modulaire dont les chaînes bornées sont finies; alors, pour que \mathfrak{M} soit distributive il faut et il suffit que la condition suivante soit en puissance:

(D) Soit $(\Omega, \omega; a, b)$ un quadrilatère tel que les quotients $\Omega/a, \Omega/b$ soient premiers et $a \neq b$; soient, de même, $d \in (a \wedge b)_\omega$ et \bar{b} tel que $\Omega \geq \bar{b} \geq d$ et que $(a \vee \bar{b})_\Omega = \Omega$ et $(a \wedge \bar{b})_\omega = \omega$. Alors, $\bar{b} = b$.

Démonstration. La nécessité de la condition (D) ci-dessus, est évidente; pour démontrer la suffisance, considérons un quadrilatère $(\Omega, \omega; a, b)$ tel que $(a \vee b)_\Omega = \Omega$ et soient $d \in (a \wedge b)_\omega$ et $\bar{b} \in \mathfrak{M}$ tel que $\Omega \geq \bar{b} \geq d$ et que $(a \vee \bar{b})_\Omega = \Omega$, $(a \wedge \bar{b})_\omega = \omega$. Le théorème sera démontré quand on aura prouvé que $b = \bar{b}$. Soient, à cet effet

$$\begin{aligned} \Omega > p_1 > p_2 > \dots > p_{r-1} > a, & (p_0 = q_0 = \Omega, a = p_r, b = q_s) \\ \Omega > q_1 > q_2 > \dots > q_{s-1} > b, \end{aligned} \quad (14)$$

deux séries quelconques allant de Ω à a et de Ω à b ; nous allons y appliquer un raisonnement inductif suivant les longueurs r, s des séries (14).

Le théorème est évidemment vrai pour $r = s = 1$.

I. Supposons donc que le théorème soit vrai pour $r = 1$ et $j \leq s - 1$ ($s > 1$) en ce sens que pour chaque quadrilatère $(\Omega', \omega'; a', b')$ tel que $(a' \vee b')_{\Omega'} = \Omega'$ et que les intervalles $\Omega' > a'$ et $\Omega' > b'$ soient respectivement de longueur 1 et $j \leq s - 1$ ($s > 1$), il n'y ait pas d'autre complément de a' relativement à Ω'/d' , $d' \in (a' \wedge b')_{\omega'}$, que b' lui-même, ni d'autre complément de b' relativement à Ω'/d' , que a' lui-même. Il s'agit de démontrer que cette propriété reste vraie aussi pour $r = 1$ et $j = s$.

I*. Soient, à cet effet, $d \in (a \wedge b)_\omega$, $d_1^{s-1} \in (a \wedge q_{s-1})_a$, ($a = p_1, b = q_s$) et $x \in (\bar{b} \vee d_1^{s-1})_\Omega$; on a évidemment (puisque, $(a \vee \bar{b})_\Omega = \Omega$)

$$(a \vee x)_\Omega = \Omega. \quad (15)$$

Puis on a $a \geq d_1^{s-1} \geq d$ et $(a \wedge \bar{b})_a = d$; on aura donc aussi, \mathfrak{M} étant modulaire,

$$(a \wedge x)d_{a, s-1} = d_1^{s-1}, \quad (x \in (\bar{b} \vee d_1^{s-1})_\Omega!). \quad (15')$$

Or, il est évident que $(a \vee q_{s-1})_\Omega = \Omega$ et $(a \wedge q_{s-1})_{a, s-1} = d_1^{s-1}$; il s'ensuit, compte tenu des (15), (15') et de l'hypothèse inductive propre à ce sous-cas que $x = q_{s-1}$ pour chaque $x \in (\bar{b} \vee d_1^{s-1})_\Omega$. Par conséquent

$$(\bar{b} \vee d_1^{s-1})_{a, s-1} = q_{s-1}. \quad (16)$$

Maintenant, soit $y \in (\bar{b} \wedge d_1^{s-1})_a$; on a $(\bar{b} \wedge a)_a = d$ et $a \geq d_1^{s-1} \geq d$; par conséquent, $y = d$, ou, ce qui revient au même

$$(\bar{b} \wedge d_1^{s-1})_a = d. \quad (16')$$

¹³⁾ Ce théorème est à rapprocher du théorème 2, Chap. IX, du livre de M. BIRKHOFF [1]; mais, la technique de sa démonstration en est différente.

Mais, on a, d'autre part, $(b \vee d_1^{s-1})_{a_{s-1}} = q_{s-1}$ (par la modularité de \mathfrak{M} !), puis $(b \wedge d_1^{s-1})_a = d$; il s'ensuit, compte tenu des (16), (16') et de la condition (D), que $\bar{b} = b$.

I**. Passons maintenant à la seconde partie de cette première induction. Supposons donc que \bar{a} soit un certain autre complément de b relativement à Ω/d : $(\bar{a} \vee b)_\Omega = \Omega$, $(\bar{a} \wedge b)_a = d$. Il faut prouver que $\bar{a} = a$. Considérons, à cet effet, un élément $x' \in (\bar{a} \wedge q_{s-1})_a$. Comme on a $\Omega \geq q_{s-1} \geq b$ et que \mathfrak{M} est modulaire, il s'ensuit $(b \vee x')_{a_{s-1}} = q_{s-1}$; d'ailleurs, $(b \wedge x')_a = d$.

Ainsi, chaque élément $x' \in (\bar{a} \wedge q_{s-1})_a$ est un complément de b relativement à q_{s-1}/d et comme d_1^{s-1} en est évidemment un autre, il suit de (D) que $x' = d_1^{s-1}$ ce qui donne

$$(q_{s-1} \wedge \bar{a})_{a_1^{s-1}} = d_1^{s-1}.$$

On a d'ailleurs aussi, comme il est facile de s'en convaincre

$$(q_{s-1} \vee \bar{a})_\Omega = \Omega.$$

Ainsi, \bar{a} est un complément de q_{s-1} relativement à Ω/d_1^{s-1} . Or, a , en est évidemment un autre; on aura donc, compte tenu de l'hypothèse inductive propre à ce sous-cas, $\bar{a} = a$.

II. Supposons maintenant que le théorème soit vrai pour s quelconque et $i \leq r - 1$ ($r > 1$), en ce sens que pour chaque quadrilatère $(\Omega', \omega'; a', b')$ tel que $(a' \vee b')_{\Omega'} = \Omega'$ et que les intervalles $\Omega' > a'$, $\Omega' > b'$ soient respectivement de longueur $i \leq r - 1$ ($r > 1$) et s , il n'y ait d'autre complément de a' relativement à Ω'/d' , $d' \in (a' \wedge b')_{a'}$, que b' lui-même, ni d'autre complément de b' relativement à Ω'/d' que a' lui-même. Il s'agit de montrer que cette propriété reste vraie pour r et s quelconques.

II*. Soient, à cet effet, $d \in (a \wedge b)_\omega$, $d_{r-1}^s \in (p_{r-1} \wedge b)_a$, ($a = p_r$, $b = q_s$) et $y \in (\bar{b} \wedge p_{r-1})_a$. On a d'abord $(a \wedge y)_a = d$ puis, \mathfrak{M} étant modulaire, on a aussi, $(a \vee y)_{p_{r-1}} = p_{r-1}$ pour chaque $y \in (\bar{b} \wedge p_{r-1})_a$; ainsi, y est un complément de a relativement à p_{r-1}/d et, puisque d_{r-1}^s en est un autre (toujours par la modularité de \mathfrak{M}), il en résulte, d'après I, que $y = d_{r-1}^s$. Maintenant, on a $(\bar{b} \vee p_{r-1})_\Omega = \Omega$ et $(\bar{b} \wedge p_{r-1})_{a_{r-1}} = d_{r-1}^s$; mais, on a aussi $(b \vee p_{r-1})_\Omega = \Omega$, $(b \wedge p_{r-1})_{a_{r-1}} = d_{r-1}^s$. Par conséquent, vu l'hypothèse inductive relative à ce sous-cas II*, on aura $\bar{b} = b$.

II**. Supposons enfin que \bar{a} soit un complément de b (autre que a) relativement à Ω/d : $(\bar{a} \vee b)_\Omega = \Omega$, $(\bar{a} \wedge b)_a = d$, et considérons un $x \in (\bar{a} \vee d_{r-1}^s)_\Omega$. On a d'abord $(b \vee x)_\Omega = \Omega$ puis, \mathfrak{M} étant modulaire, $(b \wedge x)_{a_{r-1}} = d_{r-1}^s$. Mais $(b \vee p_{r-1})_\Omega = \Omega$, $(b \wedge p_{r-1})_{a_{r-1}} = d_{r-1}^s$ donc, d'après l'hypothèse inductive propre au sous-cas actuel $x = p_{r-1}$. On en déduit $(\bar{a} \vee d_{r-1}^s)_{p_{r-1}} = p_{r-1}$ et $(\bar{a} \wedge d_{r-1}^s)_a = d$; d'ailleurs, $(a \vee d_{r-1}^s)_{p_{r-1}} = p_{r-1}$ et $(a \wedge d_{r-1}^s)_a = d$. D'après le sous-cas I, il en résulte finalement $\bar{a} = a$ et le théorème est complètement démontré.

6.51. Corollaire. Dans une multistructure modulaire *mais non-distributive* et telle que les chaînes bornées soient finies, il doit y avoir toujours une *sous-structure* dont voici le schéma:

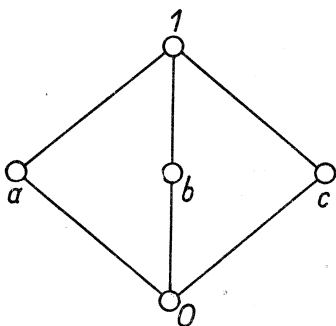


Fig. 7.

la multistructure \mathfrak{M} est modulaire. On n'a plus, maintenant, qu'à appliquer le théorème 6.5.

6.52. Corollaire. Pour qu'une multistructure \mathfrak{M} , dont les chaînes bornées sont finies, soit distributive, il faut et il suffit que la condition (D) et la condition (D') qu'on en déduit par la dualité, y soient toutes les deux en puissance.

Démonstration. Il est évident, que les conditions (D) et (D') doivent être toutes les deux en puissance afin que \mathfrak{M} soit distributive; quant à la réciproque, il suffit de remarquer que les dites conditions entraînent respectivement les conditions (σ'') et (σ') de semimodularité (4.7) donc, d'après 4.74,

BIBLIOGRAPHIE

- [1] *G. Birkhoff*, Lattice Theory, revised edition, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., New-York, 1948.
- [2] *O. Ore* (et *M. Dresher*), Theory of multigroups, Amer. Journ. of Math. 60, 1938, 705 à 733.
- [3] *M. Benado*, Sur la théorie de la divisibilité, (en roumain, avec des résumés en français et en russe), Bul. Sci. t. VI, Cahier 2 (1954), 263—268.
- [4] *M. Benado*, Sur un problème de M. Garrett Birkhoff (en roumain avec des résumés en français et en russe), Bul. Sci. t. VI, Cahier 4 (1954), 703—735.
- [5] *O. Ore*, Chains in partially ordered sets, Bull. of the Amer. Math. Soc. 49, 1943, 558—566.
- [6] *L. Weisner*, Abstract theory of inversion of finite series, Trans. of the Amer. Math. Soc. 38, 1935, 474—84.
- [7] *E. Foradori*, Zur Grundlegung einer allgemeinen Teiltheorie, I, II, III, Monatshefte f. Math. u. Phys. 39, 40, 41, 1932, 1933, 1934, 439—454, 161—180, 133—173.
- [8] *E. Foradori*, Teiltheorie und Verbände, Deutsche Mathematik, 5, 1940, 37—43.
- [9] *H. Mac Neille*, Partially ordered sets, Trans. of the Amer. Math. Soc. 42, 1937, 416—460.
- [10] *M. M. Day*, Arithmetic of ordered systems, Trans. of the Amer. Math. Soc. 53, 1945, 1—43.
- [11] *J. Richard Büchi*, Die Boolesche partial Ordnung und die Paarung von Gefügen, Portugaliae Mathematica, 7, 1948, 119—180.
- [12] *N. Bourbaki*, Théorie des ensembles (fasc. de résultats), Paris, Hermann, 1939.

- [13] *M. Benado*, Sur les théorèmes de décomposition de l'Algèbre, Études et recherches mathématiques, vol. III, fasc. 1—2 1952, 263—283 (en roumain, avec des résumés en français et en russe).
- [14] *M. Benado*, Théorie abstraite des relations de normalité. Études et Recherches mathématiques, vol. IV, fasc. 1—2, 69—112 (en roumain, avec des résumés en russe et en français).
- [15] *M. Benado*, Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier I, Чехосл. мат. ж., 4 (79), 105—129.
- [16] *V. Kořinek*, Der Schreiersche Satz und das Zassenhaussche Verfahren in Verbänden, Věstník Královské České Společnosti Nauk, 1941, 1—29.
- [17] *V. Kořinek*, Lattices in which the theorem of Jordan — Hölder is generally true, Bull. internat. de l'Acad. tchèque des Sci. L^{ème} Année, 23, 1949.
- [18] *V. Glivenko*, Géométrie des systèmes de choses normées, Amer. Journ. of Math. 58, 1936, 799—828.
- [19] *A. Kurosch*, Sur la théorie des systèmes partiellement ordonnés d'ensembles finis, Rec. Math. n. 5, 5 (1939), 343—346 (en russe).

Remarques ajoutées pendant la correction des épreuves

(12. VIII. 1955.)

1. Peu après que le présent travail eût été achevé, j'ai pris connaissance du travail de M. ALEXANDER KUROSCH [19]. Les „systèmes partiellement ordonnés d'ensembles finis“ dont il y est question et dont M. Kurosch a montré l'importance dans la recherche des propriétés „locales“ des groupes sont, comme il est facile de s'en convaincre, des ensembles partiellement ordonnés *archimédiens* et filtrants (à droite); ce sont donc des multistrukture filtrantes à droite au sens du présent mémoire (voir 1.2, Exemple 2). Mais leur étude de ce point de vue bien que apparemment intéressante, me semble être hérissee de grandes difficultés.

2. D'après ce qui a été dit au 5.2 à l'égard de l'exemple 5 de 1.2 et d'après le théorème 5.4, il s'ensuit que *pour chaque point du plan euclidien l'ensemble des carrés contenant ce point et ayant leurs côtés parallèles à deux directions fixées rectangulaires, peut être organisé en espace métrique.*

Резюме

ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И ТЕОРЕМА ШРЕЙЕРА ОБ УПЛОТНЕНИИ, II

(Теория мультиструктур)

МИХАИЛ БЕНАДО, (Mihail Benado), Бухарест.

(Поступило в редакцию 19/III 1954 г.)

Первая часть этой работы [15] содержит главным образом исследование об условиях применимости теоремы Шрейера об уплотнении к *произвольным* частично упорядоченным множествам.

В этой второй части работы [15] изучаются общие свойства некоторых частично упорядоченных множеств, названных автором мультиструктурами, и определенных следующим образом:

Пусть P — частично упорядоченное множество; P является мультиструктурой, если выполняются следующие аксиомы:

М1. Пусть $b, c \in P$ — два элемента; если существует такое Ω , что $\Omega \geq b, c$, то существует также $L \in P$ такое, что имеет место $L \leq \Omega$, $L \geq b, c$ и такое, что из соотношений $x \leq L$, $x \geq b, c$ следует $x = L$.

М2. Пусть $b, c \in P$ — два элемента; если существует такое $\omega \in P$, что $\omega \leq b, c$, то существует также $m \in P$ такое, что $m \geq \omega$, $m \leq b, c$ и такое, что из соотношений $y \geq m$, $y \leq b, c$ следует $y = m$.

С этими частично упорядоченными множествами, частным случаем которых являются структуры, мы встречаемся очень часто в алгебраических и топологических проблемах, что оправдывает их изучение.

Хотя теорема Шрейера об уплотнении представляет центральную тему этой второй части моей работы, я разбираю в ней еще ряд вопросов, краткий перечень которых здесь и приводится.

Три первых параграфа посвящены исследованию общих свойств мультиструктур, а именно: 1. довольно подробное описание нескольких примеров мультиструктур (§ 1); 2. доказательство эквивалентности двух определений мультиструктур (§ 2); 3. исследование общих свойств (многозначных дедекиндовых связей); здесь вводится, между прочим, понятие сильной мультиструктуры, т. е. такой мультиструктуры, что дедекиндовы связи каждого неприводимого четырехугольника являются однозначными (§ 3).

Параграф 4 посвящается изучению модулярных и полумодулярных мультиструктур. В частности здесь доказывается теорема Шрейера об уплотнении для модулярных мультиструктур и проводится более глубокое исследование справедливости одного из видов теоремы Жордана-Гельдера.

В параграфе 5 разрабатывается теория оценок мультиструктур; главным результатом здесь является обобщение одной теоремы В. Гливленко [18] о нормированных структурах.

Наконец, параграф 6 посвящен дистрибутивным мультиструктурам; из исследованных свойств заслуживает особого внимания то, что дистрибутивные мультиструктуры являются модулярными и сильными, и что вследствие этого две цепи с общими последними точками всегда обладают изоморфными (каноническими) уплотнениями.