Luigi Muracchini

Sulla applicabilità proiettiva delle superficie negli spazi a connessione proiettiva a tre dimensioni

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 2, 274–288

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100145

SULLA APPLICABILITÀ PROIETTIVA DELLE SUPERFICIE NEGLI SPAZI A CONNESSIONE PROIETTIVA A TRE DIMENSIONI

di LUIGI MURACCHINI (a Bologna).

(Adunanza del 1 marzo 1955.)

L'applicabilità proiettiva di due superficie immerse in spazi a connessione proiettiva, introdotta dal Bompiani, viene studiata con i metodi di E. Cartan. Dopo aver determinato il sistema di equazioni di Pfaff cui soddisfano le coppie di superficie proiettivamente applicabili, se ne determina la generalità delle soluzioni. Si mostra poi come una superficie immersa in uno spazio a connessione proiettiva normale possa venire applicata proiettivamente su una superficie dello spazio proiettivo ordinario.

1. Introduzione. Il Bompiani, applicando alcune sue ricerche di carattere topologico sugli elementi differenziali di curve e calotte di superficie o varietà,[1]) ha fra l'altro esteso la nozione di applicabilità proiettiva di due superficie dello spazio proiettivo ordinario S_3, dovuta a G. Fubini, al caso di due superficie immerse in spazi P_3 a connessione proiettiva. Per la sua estensione il Bompiani ha seguito le linee della trattazione da lui stesso elaborata per il caso dello spazio proiettivo ordinario, S_3.[2]) In tale modo egli estende dapprima le nozioni di asintotiche, di forme elementari e di sistemi assiali, servendosene poi per dare la definizione di applicabilità proiettiva, del tutto analoga a quella che si può dare nello spazio S_3. Precisamente si dice applicabilità proiettiva fra due superficie Σ, $\overline{\Sigma}$ di due spazi P_3, $\overline{P}_3$,[3]) una corrispondenza asintotica[4]) che conserva i sistemi assiali. Il Bompiani osserva poi che vale la seguente proprietà caratteristica, estensione di una nota delle applicabilità proiettive in S_3: le giaciture principali[5]) relative agli E_2, uscenti da un punto P di Σ e apparte-

[1]) *E. Bompiani, Topologia differenziale,* Note I—V, Rend. Acc. Naz. Lincei, (8) *8*, 3—8, 8—15, 81—86, 169—175, 271—275 (1950).

[2]) *E. Bompiani, Le forme elementari e la teoria proiettiva delle superficie,* Boll. Un. Mat. Ital., *5*, 167—173, 209—214 (1926).

[3]) I due spazi P_3, $\overline{P}_3$ potendo eventualmente essere sovrapposti.

[4]) Che muta cioè curve asintotiche in curve asintotiche.

[5]) *La k-giacitura principale* relativa a *k E indipendenti* è stata introdotta dal Bompiani nella Nota I del lavoro citato in [1]).

nenti a quella superficie, ed agli E_2 di autoparallela ad essi tangenti, e le giaciture principali analoghe relative agli elementi di $\bar{\Sigma}$ corrispondenti dei primi nell'applicabilità proiettiva, si corrispondono in una proiettività π.

Nel presente lavoro ho ripreso la questione dell'applicabilità proiettiva di due superficie di spazi P_3 a connessione proiettiva con i metodi di E. Cartan.[6]) Dopo aver osservato che la giacitura principale del Bompiani relativa ad un E_2 di P_3, uscente da un punto P, ed allo E_2 di autoparallela tangente a quello in P, non è altro che il piano osculatore in P alla immagine tangenziale[7]) dello E_2 considerato nello S_3 tangente in P allo spazio P_3, segue intanto che la definizione data dal Bompiani delle as ntotiche di una superficie equivale a quella che ne ha dato il Cartan.[8]) Dò poi un'altra definizione della applicabilità proiettiva del Bompiani, più adatta alla trattazione coi metodi di Cartan. Tale definizione è la seguente, estensione anch'essa di una definizione dell'applicabilità proiettiva in S_3: una corrispondenza $\varkappa$ fra due superficie Σ, $\bar{\Sigma}$, immerse in due spazi P_3, $\bar{P}_3$ a connessione proiettiva, si dirà applicabilità proiettiva se per ogni coppia di punti corrispondenti P, P esiste una omografia fra gli spazi S_3, $\bar{S}_3$, tangenti a P_3, $\bar{P}_3$ in P, $\bar{P}$, che realizzi un contatto geometrico del secondo ordine fra le immagini tangenziali di ogni coppia di elementi E_2, $\bar{E}_2$, di Σ, $\bar{\Sigma}$ uscenti da P, $\bar{P}$ e corrispondenti in $\varkappa$. Dopo aver rilevato alcune proprietà della applicabilità proiettiva di due superficie di spazi a connessione proiettiva qualsiasi, in una coppia di punti corrispondenti, scrivo il sistema di equazioni di Pfaff cui soddisfano le coppie di superficie proiettivamente applicabili. Per studiarlo conviene ridursi al caso di uno spazio a connessione proiettiva normale di Cartan e ciò può sempre farsi come mostrerò. Il sistema di equazioni di Pfaff si semplifica allora e se ne possono esaminare le condizioni di integrabilità. Si può così ottenere il seguente risultato: le coppie di superficie Σ, $\bar{\Sigma}$ (a punti non parabolici), immerse rispettivamente in spazi P_3, $\bar{P}_3$ a connessione proiettiva normale generici, proiettivamente applicabili dipendono da una funzione arbitraria di due variabili. Questo risultato induce a ritenere che ogni superficie a punti non parabolici di uno spazio $\bar{P}_3$ sia proiettivamente applicabile su (almeno) una superficie di un altro spazio P_3 (eventualmente sovrapposto al primo). Ciò viene confermato nel n. 5 dove si tratta il caso in cui lo spazio P_3 è uno spazio proiettivo ordinario e si perviene al seguente risultato: ogni superficie (a punti non parabolici) di uno spazio a connessione proiettiva normale si può applicare proiettivamente su una superficie dello spazio proiettivo ordinario. Quest'ultimo risultato permette di trasportare alle superficie di uno spazio a connessione

[6]) *E. Cartan, Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective,* Paris, Gauthier-Villars, 1937. Indicheremo tale opera nel seguito con (L); *E. Cartan, Sur les variétés à connexion projective,* Bull. Soc. Math. France, *52*, 205—241 (1924).

[7]) Cfr. *E. Cartan,* (L) citato in [6]) ed anche: *En. Bortolotti, Varietà a connessione proiettiva e loro immagini tangenziali,* Atti R. Acc. Italia Rend., (7) *2*, 251—267 (1941).

[8]) Cfr. *E. Cartan,* (L) pag. 258.

proiettiva le proprietà delle superficie dello spazio ordinario invarianti per applicabilità proiettive.

Vogliamo ancora osservare quanto segue: se gli spazi P_3, $\bar{P}_3$ coincidono in uno spazio P_3^* che ammette degli isomorfismi in sè, è chiaro che allora ogni superficie è proiettivamente applicabile sulle sue transformate negli isomorfismi in sè di P_3^*, ma possono esservi anche coppie di superficie proiettivamente applicabili non mutate l'una nell'altra da un isomorfismo di P_3^* in sè. Questo è ciò che accade nello spazio proiettivo ordinario. L'esame di quest'ultimo problema non viene affrontato nel presente lavoro.

2. Generalità sugli spazi a connessione proiettiva. In tutto ciò che segue indicheremo con lettere greche indici che assumono i valori 0, 1, 2, 3 e con lettere latine indici che debbono assumere soltanto i valori 1, 2, 3; inoltre, secondo la nota convenzione, indici ripetuti in una espressione (termine) dovranno ritenersi, salvo contraria avvertenza, indici di sommazione.

Sia dunque P_3 uno spazio a tre dimensioni a connessione proiettiva, definito come è ben noto associando ad ogni suo punto A_0 uno spazio S_3 proiettivo (tangente), individuato dal punto A_0 e da altri tre punti (analitici) A_1, A_2, A_3 che si assumeranno come vertici di un tetraedro di riferimento. Si darà poi la legge di raccordo fra lo S_3 tangente nel punto A_0 e quello relativo al punto infinitamente vicino $A_0 + dA_0$, la quale legge fissa appunto la connessione proiettiva[9]) dello spazio P_3 ed è espressa dalle formule:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta\,, \tag{2.1}$$

dove le ω_α^β sono forme di Pfaff, cioè forme differenziali lineari nei parametri che fissano i punti A_α. Si noti bene che la scrittura (2.1) è simbolica in quanto i secondi membri non sono (in generale) dei differenziali esatti; le formule (2.1) sono semplicemente lo strumento analitico che permette di costruire lo sviluppo (o immagine tangenziale) sullo spazio S_3 proiettivo tangente in un punto A_0 di P_3 di una curva di quest'ultimo spazio passante per A_0.

È chiaro che, senza cambiare la natura e la connessione dello spazio P_3, si possono muovere nello S_3 tangente in A_0 i punti A_i ossia si può effettuare un cambiamento del riferimento proiettivo nello S_3 tangente; inoltre si può anche fare un cambiamento dei parametri (coordinate) nello spazio P_3 stesso. Tali cambiamenti ovviamente alterano la matrice (ω) delle forme ω_α^β. La formula che fornisce la trasformazione più generale della matrice (ω), quando si cambino i punti A in S_3 come indicato nelle (2.2), è la seguente, e si può ricavare con semplici calcoli:

$$(\bar{\omega}) = \{(da) + (a)(\omega)\}(a^{-1}) \tag{2.2}$$

[9]) Cfr. *E. Cartan,* il lavoro citato in [6]).

dove $(\overline{\omega})$ è la matrice delle nuove forme $\overline{\omega}_\alpha^\beta$, e la trasformazione che subiscono i punti A_0, A_i è la seguente:

$$\begin{aligned}\overline{A}_0 &= A_0\\ \overline{A}_i &= a_i^\lambda A_\lambda\end{aligned} \tag{2.2'}$$

mentre (a) indica la matrice quadrata formata con le a_i^λ e con, alla prima riga, gli elementi 1, 0, 0, 0; (a^{-1}) indica la matrice inversa della (a) e $(\mathrm{d}a)$ la matrice formata coi differenziali degli elementi di (a).

In particolare subito si vede che si può sempre supporre di aver scelto le cose in modo che risulti

$$(\omega_i^i - \omega_0^0) = \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 - 3\omega_0^0 = 0 \tag{2.3}$$

e noi supporremo d'ora in poi che ciò sia stato già fatto.

Supponiamo ora di far percorrere al punto A_0 di P_3 un ciclo (chiuso) infinitesimo qualsiasi in quello spazio, un punto X ($X = A_\alpha x^\alpha$) dello spazio S_3 tangente in A_0 si troverà, a percorso avvenuto, in una nuova posizione $X + \Delta X$ ($x^\alpha + \Delta x^\alpha$) nello S_3 e le formule seguenti danno lo spostamento subito dal punto X

$$-\Delta x^\beta = \Omega_\alpha^\beta x^\alpha \tag{2.4}$$

oppure in coordinate non omogenee $\dfrac{x^i}{x^0} = X^i$

$$-\Delta X^i = \Omega_0^i + (\Omega_i^i - \Omega_0^0)\,X^i + \Omega_j^i X^j + \Omega_k^i X^k - X^i(\Omega_i^0 X^i + \Omega_j^0 X^j + \Omega_k^0 X^k) \tag{2.4'}$$

(non si sommi rispetto ad $i, j, k = 1, 2, 3$) ,

dove le Ω_α^β sono forme quadratiche esterne nelle ω_α^β le cui espressioni sono date dalle seguenti e fondamentali *formule di struttura* dello spazio P_3:

$$\Omega_\alpha^\beta = [\mathrm{d}\omega_\alpha^\beta] - [\omega_\alpha^\lambda \omega_\lambda^\beta]\,, \tag{2.5}$$

Si può anche pensare che le (2.4) definiscono una omografia infinitesima di S_3 associata al ciclo percorso da A_0 in P_3.

Fissato comunque il sistema di riferimento (cioè i punti A_i) in S_3, allora le forme ω_α^β risultano tutte combinazioni lineari delle tre forme fondamentali ω_0^i, il cui annullarsi esprime che il punto A_0 è fisso in P_3.

In base alle (2.5) potremo allora porre:

$$\begin{aligned}\Omega_\alpha^\beta &= R_{\alpha hk}^\beta[\omega_0^h\omega_0^k] \quad [\alpha \neq \beta]\,,\\ \Omega_i^i - \Omega_0^0 &= R_{ihk}^i[\omega_0^h\omega_0^k]\end{aligned} \tag{2.6}$$

(non si sommi rispetto ad i).

Le $R_{\alpha ij}^\beta$ (antisimmetriche rispetto agli indici i, j) sono le componenti del *tensore completo* di curvatura e torsione dello spazio P_3; le R_{0hk}^i sono le componenti *del tensore di torsione. Infine valgono le formule seguenti*, note come identità *del Bianchi, che dànno i differenziali esterni delle forme:*

$$[\mathrm{d}\Omega_\alpha^\beta] = [\omega_\alpha^\lambda \Omega_\lambda^\beta] - [\Omega_\alpha^\nu \omega_\nu^\beta]\,. \tag{2.7}$$

Ricordiamo che se per uno spazio P_3 si annulla il tensore di torsione R^i_{0hk}, cioè se valgono le $\Omega^i_0 = 0$, lo spazio si dice privo di torsione e se poi sono soddisfatte le condizioni

$$\Omega^i_0 = 0\,, \quad \Omega^i_i - \Omega^0_0 = 0\,, \quad R^h_{ijh} = 0\,, \tag{2.8}$$

lo spazio P_3 si dice, col Cartan, a *connessione proiettiva normale.*

Le equazioni differenziali delle *autoparallele* in uno spazio P_3 qualsiasi, cioè delle curve la cui immagine tangenziale è una retta, sono le seguenti:

$$\omega^1_0 : \omega^2_0 : \omega^3_0 = (\mathrm{d}\omega^1_0 - \omega^1_0\omega^0_0 + \omega^i_0\omega^1_i) : (\mathrm{d}\omega^2_0 - \omega^2_0\omega^0_0 + \omega^i_0\omega^2_i) : (\mathrm{d}\omega^3_0 - \omega^3_0\omega^0_0 + \omega^i_0\omega^3_i) \tag{2.9}$$

Vogliamo ora fare la seguente osservazione di cui ci serviremo nel seguito. Considerato un elemento differenziale del secondo ordine E_2 di una curva C di P_3 uscente dal punto A_0, la giacitura principale del Bompiani relativa allo E_2 considerato ed allo E_2 di autoparallela ad esso tangente coincide con il piano osculatore all'immagine tangenziale dello E_2 considerato nello S_3 tangente a P_3 in A_0.

Infatti è ben noto che,[10]) per ogni spazio P_3, si può instaurare una corrispondenza topologica fra l'intorno di un punto A_0 di P_3 e l'intorno di A_0 nello S_3 tangente a P_3 in A_0, corrispondenza nella quale allo E_2 di centro A_0 di una curva di P_3 per quel punto corrisponde lo E_2 della immagine tangenziale della predetta curva in S_3. Poichè, d'altra parte, la giacitura principale relativa ad un E_2 di S_3 e ad un E_2 di retta a quello tangente, è il piano osculatore dello E_2 considerato, segue quanto si è affermato.

3. L'applicabilità proiettiva di due superficie immerse in spazi P_3. Consideriamo uno spazio P_3 a connessione proiettiva, definito dalle formule (2.1), per cui valga inoltre la (2.3); consideriamo poi un'altro spazio $\overline{P}_3$ a connessione proiettiva, che può eventualmente essere sovrapposto allo spazio P_3. Per lo spazio $\overline{P}_3$ indicheremo con τ^β_α le espressioni analoghe alle ω^β_α relative a P_3, con Θ^β_α le espressioni analoghe alle Ω^β_α, gli altri enti di $\overline{P}_3$ saranno indicati con le stesse lettere che quelli analoghi di P_3, ma soprasegnate. Non supporremo per il momento che le τ^β_α soddisfino alla condizione $(\tau^i_i - \tau^0_0) = 0$, analoga alla (2.3).

Consideriamo una superficie Σ di P_3 ed una $\overline{\Sigma}$ di $\overline{P}_3$, ed una corrispondenza $\varkappa$ fra Σ e $\overline{\Sigma}$ in cui si corrispondano i punti A_0, $\overline{A}_0$. Possiamo intanto supporre di aver scelto i riferimenti negli spazi S_3, $\overline{S}_3$ tangenti a P_3, $\overline{P}_3$ in A_0, $\overline{A}_0$ in modo tale che i piani $A_0A_1A_2$, $\overline{A}_0\overline{A}_1\overline{A}_2$ siano rispettivamente tangenti a Σ a $\overline{\Sigma}$ in A_0, $\overline{A}_0$. Si avrà dunque sulle superficie Σ, $\overline{\Sigma}$ rispettivamente $\omega^3_0 = 0$, $\tau^3_0 = 0$.

Supponiamo ora che la corrispondenza $\varkappa$ fra Σ, $\overline{\Sigma}$ sia una applicabilità proiettiva del Bompiani cioè, possiamo dire, una corrispondenza tale che le giaciture principale relative agli E_2 di Σ uscenti da A_0 ed agli E_2 di autoparallela

[10]) Cfr. *E. Cartan,* (L) pag. 186.

di P_3 a quelli tangenti e le giaciture principali analoghe, relative agli E_2 di $\bar{\Sigma}$ corrispondenti dei primi in $\varkappa$, si corrispondono in una proiettività π. In virtú dell'osservazione con cui termina in n. 2, si vede facilmente che se, e solo se, $\varkappa$ è una applicabilità proiettiva nel senso predetto, esisterà una omografia $\mathbf{\Omega}$ fra gli spazi S_3, $\bar{S}_3$ che muta A_0 in $\bar{A}_0$ e che realizza un contatto geometrico del secondo ordine fra le immagini tangenziali di ogni coppia di elementi E_2, $\bar{E}_2$ di Σ, $\bar{\Sigma}$ uscenti da A_0, $\bar{A}_0$ e corrispondenti in $\varkappa$. Si vede subito anzi che delle omografie $\mathbf{\Omega}$ nelle condizioni precedenti ne esisteranno ∞^3. Infatti consideriamo le immagini tangenziali in S_3 degli E_2 di centro A_0 della superficie Σ; è ben noto[7]) che quelle immagini tangenziali appartengono sempre ad una calotta superficiale (olonoma) del secondo ordine σ_2^2 di S_3. Analogamente accade per gli elementi in P_3 corrispondenti ai primi in $\varkappa$. Basterà dunque ricordare note proposizioni sulla corrispondenza fra i piani osculatori a curve omologhe uscenti da punti omologhi di due superficie in corrispondenza puntuale nello spazio proiettivo ordinario.[11]) Osserviamo anche che le omografie $\mathbf{\Omega}$ sono *omografie tangenti*[12]) alla corrispondenza $\varkappa$ fra le due superficie Σ, $\bar{\Sigma}$ cioè quelle omografie contengono l'intorno (analitico) del primo ordine della corrispondenza $\varkappa$.

Ciò posto ritorniamo alla considerazione delle due superficie Σ, $\bar{\Sigma}$ di P_3, $\bar{P}_3$ nei punti A_0, $\bar{A}_0$. Fissati i punti A_i di S_3 in modo che valgano le (2.3) e sia $\omega_0^3 = 0$ sulla superficie Σ, si fisseranno i punti $\bar{A}_i$ in $\bar{S}_3$ in modo che essi risultino corrispondenti dei punti A_i in una delle omografie $\mathbf{\Omega}$ cui dà luogo fra S_3, $\bar{S}_3$ la supposta applicabilità $\varkappa$ esistente fra Σ, $\bar{\Sigma}$. In tali ipotesi, oltre ad avere sulla $\bar{\Sigma}$ $\tau_0^3 = 0$ come già in principio abbiamo supposto, si avranno anche le relazioni:

$$\omega_0^1 = \tau_0^1 , \quad \omega_0^2 = \tau_0^2 , \tag{3.1}$$

dato che, come si è fatto osservare prima, $\mathbf{\Omega}$ è tangente alla corrispondenza $\varkappa$. Del resto ciò risulterà ora nel determinare le relazioni analitiche esprimenti che Σ e $\bar{\Sigma}$ sono proiettivamente applicabili. Infatti consideriamo una curva C su Σ in P_3 uscente dal punto A_0; lungo C gli elementi della matrice (ω_α^β) sono funzioni di un parametro t che si può supporre nullo in A, porremo dunque lungo C

$$\omega_\alpha^\beta = p_\alpha^\beta \, . \, \mathrm{d}t \, .$$

Costruiamo ora l'immagine tangenziale $A_0(t)$ in S_3 della curva C; per tale immagine si ha

$$\frac{\mathrm{d}A_0}{\mathrm{d}t} = p_0^0 A_0 + p_0^1 A_1 + p_0^2 A_2 \, ,$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 A_0}{\mathrm{d}t^2} = (\ldots)\, A_0 &+ (\mathrm{d}p_0^1 + p_0^0 p_0^1 + p_0^1 p_1^1 + p_0^2 p_2^1)\, A_1 + \\ &+ (\mathrm{d}p_0^2 + p_0^0 p_0^2 + p_0^1 p_1^2 + p_0^2 p_2^2)\, A_2 + (p_0^1 p_1^3 + p_0^2 p_2^3)\, A_3 \, , \end{aligned} \tag{3.2}$$

11) *G. Fubini-E. Čech, Introduction à la géometrie projective différentielle des surfaces*, Paris, Gauthier-Villars, 1931.

12) *E. Cartan, Sur la déformation projective des surfaces*, Ann. Ec. Norm. Sup. Paris, (*3*) *37*, 259—356 (1920), pag. 268.

dove il coefficiente di A_0 nella espressione di $\frac{d^2A_0}{dt^2}$ non interessa. Formule del tutto analoghe (salvo a soprasegnare le lettere ed a sostituire alle p_α^β le t_α^β con $\tau_\alpha^\beta = t_\alpha^\beta\,dt$) si hanno in P_3 per la curva $\bar{C}$ su $\bar{\Sigma}$ corrispondente di C nella applicabilità $\varkappa$. Esprimiamo che l'omografia Ω in cui ai punti $\bar{A}_\alpha$ di $\bar{S}_3$ corrispondono i punti A_α di S_3 realizza un contatto geometrico del secondo ordine fra le immagini tangenziali di C in S_3 e di $\bar{C}$ in $\bar{S}_3$. Avremo le condizioni

$$\begin{aligned} p_0^1 &= t_0^1\,, \quad p_0^2 = t_0^2\,,\\ p_0^1p_1^3 + p_0^2p_2^3 &= t_0^1t_1^3 + t_0^2t_2^3\,,\\ p_0^2\{dp_0^1 + p_0^0p_0^1 + p_0^1p_1^1 + p_0^2p_2^1) - (dt_0^1 + t_0^0t_0^1 + t_0^1t_1^1 + t_0^2t_2^1\} &= \\ = p_0^1\{(dp_0^2 + p_0^0p_0^2 + p_0^1p_1^2 + p_0^2p_2^2) - (dt_0^2 + t_0^0t_0^2 + t_0^1t_1^2 + t_0^2t_2^2)\}\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

e poichè il contatto geometrico predetto viene realizzato da Ω fra due curve C, $\bar{C}$ qualsiasi (corrispondenti in $\varkappa$), le relazioni (3.3) portano a concludere che deve essere, per qualsiasi ω_0^i,

$$\begin{aligned} \omega_0^1 &= \tau_0^1\,, \quad \omega_0^2 = \tau_0^2\,,\\ \omega_0^1\omega_1^3 + \omega_0^2\omega_2^3 &= \tau_0^1\tau_1^3 + \tau_0^2\tau_2^3\,,\\ \omega_0^2\{(d\omega_0^1 + \omega_0^0\omega_0^1 + \omega_0^1\omega_1^1 + \omega_0^2\omega_2^1) - (d\tau_0^1 + \tau_0^0\tau_0^1 + \tau_0^1\tau_1^1 + \tau_0^2\tau_2^1)\} &= \\ = \omega_0^1\{(d\omega_0^2 + \omega_0^0\omega_0^2 + \omega_0^1\omega_1^2 + \omega_0^2\omega_2^2) - (d\tau_0^2 + \tau_0^0\tau_0^2 + \tau_0^1\tau_1^2 + \tau_0^2\tau_2^2)\}\,. \end{aligned} \tag{3.3'}$$

Ora metteremo le condizioni (3.3') in una forma più espressiva e semplice. Anzitutto possiamo differenziare esternamente le $\omega_0^3 = 0$, $\tau_0^3 = 0$ che per ipotesi valgono rispettivamente su Σ e $\bar{\Sigma}$. Le (2.6) forniscono attualmente

$$[\omega_0^1\omega_1^3] + [\omega_0^2\omega_2^3] + R_{012}^3[\omega_0^1\omega_0^2] = 0\,;$$

se ne deduce, tenendo conto che sulla superficie Σ le forme ω_0^1, ω_0^2 sono indipendenti,

$$\omega_0^1\omega_1^3 + \omega_0^2\omega_2^3 = a(\omega_0^1)^2 + 2b\omega_0^1\omega_0^2 + c(\omega_0^2)^2\,; \tag{3.4}$$

analogamente si conclude a partire dalla $\tau_0^3 = 0$. Pertanto la relazione nella seconda riga delle (3.3') insieme con quelle della prima riga permettono di concludere che deve essere

$$\begin{aligned} \tau_1^3 - \omega_1^3 &= \tfrac{1}{2}(R_{012}^3 - \bar{R}_{012}^3)\,\omega_0^2\,,\\ \tau_2^3 - \omega_2^3 &= \tfrac{1}{2}(R_{012}^3 - \bar{R}_{012}^3)\,\omega_0^1\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Notiamo incidentalmente che (3.4) dà la forma quadratica in ω_0^1, ω_0^2 che fornisce le asintotiche di Σ;[13]) la seconda relazione delle (3.3') esprime che la corrispondenza $\varkappa$ fra Σ, $\bar{\Sigma}$ è asintotica.

Possiamo ora differenziare esternamente le due relazioni

$$\omega_0^1 = \tau_0^1\,, \quad \omega_0^2 = \tau_0^2;$$

---

[13]) Cfr. l'annotazione [8]).

se ne ricavano conseguenze che, tenuto conto delle (3.3′), portano alle

$$\begin{aligned} \tau_1^1 - \tau_0^0 - (\omega_1^1 - \omega_0^0) &= \tfrac{1}{2}(R_{012}^1 - \overline{R}_{012}^1)\,\omega_0^2 + 2\lambda_1\omega_0^1 + \lambda_2\omega_0^2\,, \\ \tau_2^1 - \omega_2^1 &= -\tfrac{1}{2}(R_{012}^1 - \overline{R}_{012}^1)\,\omega_0^1 + \lambda_2\omega_0^1\,, \\ \tau_1^2 - \omega_1^2 &= \tfrac{1}{2}(R_{012}^2 - \overline{R}_{012}^2)\,\omega_0^2 + \lambda_1\omega_0^2\,, \\ \tau_2^2 - \tau_0^0 - (\omega_2^2 - \omega_0^0) &= -\tfrac{1}{2}(R_{012}^2 - \overline{R}_{012}^2)\,\omega_0^1 + \lambda_1\omega_0^1 + 2\lambda_2\omega_0^2\,, \end{aligned} \tag{3.6}$$

dove λ_1, λ_2 sono quantità opportune. Si vede così che oltre alla omografia $\mathbf{\Omega}$, tutte le ∞^3 omografie $\mathbf{\Omega}^*$ che mutano i punti A_α nei punti $\overline{A}_\alpha^*$ dati da

$$\overline{A}_0^* = \overline{A}_0\,, \quad \overline{A}_i^* = \overline{A}_i + m_i\overline{A}_0\,, \tag{3.7}$$

le m_i essendo quantità arbirarie, realizzano il contatto geometrico del secondo ordine fra le immagini tangenziali delle curve tracciate sulle due superficie $\Sigma, \overline{\Sigma}$ come l'omografie $\mathbf{\Omega}$.

Riassumendo, le condizioni perchè la corrispondenza $\varkappa$ fra le due superficie $\Sigma, \overline{\Sigma}$ sia una applicabilità proiettiva si possono scrivere:

$$\begin{gathered} \omega_0^1 = \tau_0^1\,, \quad \omega_0^2 = \tau_0^2\,, \quad \omega_0^3 = \tau_0^3 = 0\,, \\ \tau_1^3 = \omega_1^3 + h\omega_0^2\,, \quad \tau_2^3 = \omega_2^3 - h\omega_0^1\,, \\ \tau_2^1 = \omega_2^1 - k\omega_0^1 + \lambda_2\omega_0^1\,, \quad \tau_1^2 = \omega_1^2 + l\omega_0^2 + \lambda_1\omega_0^2\,, \\ \tau_1^1 - \tau_0^0 = \omega_1^1 - \omega_0^0 + k\omega_0^2 + 2\lambda_1\omega_0^1 + \lambda_2\omega_0^2\,, \\ \tau_2^2 - \tau_0^0 = \omega_2^2 - \omega_0^0 - l\omega_0^1 + \lambda_1\omega_0^1 + 2\lambda_2\omega_0^2\,, \end{gathered} \tag{3.8}$$

avendo posto

$$h = \tfrac{1}{2}(R_{012}^3 - \overline{R}_{012}^3)\,, \quad k = \tfrac{1}{2}(R_{012}^1 - \overline{R}_{012}^1)\,, \quad l = \tfrac{1}{2}(R_{012}^2 - \overline{R}_{012}^2)\,.$$

Le equazioni (3.8) costituiscono il sistema di equazioni di Pfaff che fornisce le coppie di superficie proiettivamente applicabili. Prima di studiarlo vogliamo fare alcune osservazioni. Supporremo d'ora in poi che le superficie $\Sigma, \overline{\Sigma}$ non siano a punti parabolici, sicchè le forme ω_1^3, ω_2^3 risultino indipendenti. Allora potremo supporre di aver preso il riferimento in S_3 in modo tale che A_0A_1, A_0A_2 siano le tangenti asintotiche di Σ in A_0; inoltre rinunciando a soddisfare la (2.3) che attualmente è inutile, A_1 ed A_2 si possono scegliere su quelle rette in modo che la (3.4) diventi

$$\omega_0^1\omega_1^3 + \omega_0^2\omega_2^3 = 2\omega_0^1\omega_0^2\,.$$

È noto che dopo di ciò si possono considerare[14]) due forme cubiche Φ_0, Ψ_0 in ω_0^1, ω_0^2, ciascuna delle quali generalizza la forma delle tangenti di Darboux di una superficie dello spazio ordinario e che quelle due forme coincidono solo se lo spazio P_3 è privo di torsione. Le forme Φ_0, Ψ_0 sono costituite dai due termini in $(\omega_0^1)^3$ e $(\omega_0^2)^3$ nelle espressioni

$$\begin{aligned} \Phi &= (\omega_0^1)^2\,\omega_1^2 + (\omega_0^2)^2\,\omega_2^1\,, \\ \Psi &= \omega_0^1\omega_1^2\omega_2^3 + \omega_0^2\omega_2^3\omega_3^1\,; \end{aligned} \tag{3.9}$$

[14]) Cfr. *E. Cartan,* (L) pag. 275.

chiameremo le Φ_0, Ψ_0 prima e seconda forma di Darboux della superficie Σ. Ebbene le (3.8) mostrano che: in una applicabilità proiettiva $\varkappa$ fra due superficie Σ, $\overline{\Sigma}$ di due spazi P_3, $\overline{P}_3$ si corrispondono le asintotiche e le prime curve di Darboux; ma in generale non si corrispondono le seconde curve di Darboux. Si osserverà anche che l'applicabilità proiettiva non conserva, in generale, le proiettività, generalmente non involutorie, delle tangenti coniugate sulle superficie Σ, $\overline{\Sigma}$. Quella proiettività è data su Σ notoriamente, indicando con m il rapporto $\dfrac{\omega_0^1}{\omega_0^2}$, dalla

$$(2 + R_{012}^3)\, m' + (2 - R_{012}^3)\, m = 0\,. \tag{3.10}$$

Si può vedere facilmente che se le proiettività delle tangenti coniugate vengono conservate, altrettanto accade delle seconde linee di Darboux e viceversa.

4. L'applicabilità proiettiva delle superficie negli spazi a connessione proiettiva normale. Per studiare il sistema (3.8) di equazioni di Pfaff mostreremo dapprima come ci si possa ricondurre sempre al caso di spazi privi di torsione o in particolare a connessione proiettiva normale, nei quali il sistema (3.8) è più semplice. Osserviamo infatti che: se fra due spazi P_3, P_3^* a connessione proiettiva qualsiasi intercede una corrispondenza $\boldsymbol{K}$ tale che si corrispondano le autoparallele, allora per ogni coppia di punti corrispondenti A_0, A_0^* esistono omografie fra gli spazi S_3, S_3^* tangenti in A_0, A_0^* che realizzano un contatto geometrico del secondo ordine fra le immagini tangenziali delle curve uscenti da A_0, A_0^* e corrispondenti in $\boldsymbol{K}$. Infatti scegliamo i punti A_i^* nello spazio S_3 che corrispondano ai punti A_i dello spazio S_3 in una omografia $\boldsymbol{\Omega}$ di quelle menzionate prima, la quale risulterà ovviamente tangente a $\boldsymbol{K}$. Allora si vede subito che valgono le relazioni

$$\omega_0^i = \tau_0^i\,, \tag{4.1}$$

adoperando la lettera ω per lo spazio P_3 e la lettera τ per P_3^*. Da queste si ricavano, per differenziazione esterna, le relazioni

$$\begin{gathered}[\{\tau_i^i - \tau_0^0 - \omega_i^i + \omega_0^0\}\omega_0^i] + [(\tau_j^i - \omega_j^i)\,\omega_0^j] + \\ + [(\tau_k^i - \omega_k^i)\,\omega_0^k] + \Omega_0^i - \Theta_0^i = 0 \\ (\text{non si sommi rispetto ad } i, j, k = 1, 2, 3)\,.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Esistono quindi tre forme quadratiche $\Phi^{(i)}$ nelle ω_0^i tali che

$$\begin{gathered}\tau_i^i - \tau_0^0 - \omega_i^i + \omega_0^0 = \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial\omega_0^i} + h_{0ji}^i\omega_0^j + h_{0ki}^i\omega_0^k\,, \\ \tau_j^i - \omega_j^i = \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial\omega_0^j} + h_{0ij}^i\omega_0^i + h_{0kj}^i\omega_0^k \\ (\text{non si sommi rispetto ad } i, j, k = 1, 2, 3)\,,\end{gathered} \tag{4.3}$$

avendo posto

$$h^i_{0lm} = \tfrac{1}{2}(R^{i*}_{0lm} - R^i_{0lm}) \,. \tag{4.4}$$

Se ora si considerano le equazioni delle autoparallele in P_3 date dalle (2.8) e le analoghe per P_3^*, si vede subito che le autoparallele dei due spazi si corrispondono se e solo se le equazioni

$$\omega_0^1 : \omega_0^2 : \omega_0^3 = \Phi^{(1)} : \Phi^{(2)} : \Phi^{(3)} \tag{4.5}$$

sono soddisfatte per ogni ω_0^i, cioè si abbia

$$\Phi^{(i)} = \omega_0^i \Lambda \tag{4.6}$$

dove $\Lambda = \lambda\omega_0^1 + \mu\omega_0^2 + \nu\omega_0^3$ è una forma lineare nelle ω_0^i. Ma se le (4.6) sono soddisfatte, l'omografia $\mathbf{\Omega}$ in cui si corrispondono i punti A_α, A_α^* realizza un contatto geometrico del secondo ordine fra le immagini tangenziali delle curve uscenti da A_α, A_α^* degli spazi P_3, P_3^* e corrispondenti in $\mathbf{K}$. Ciò risulta senza nessuna difficoltà con un procedimento identico a quello adoperato in principio del n. 3 per una questione analoga.

La osservazione fatta permette di ricondurre l'esame del problema dell'applicabilità proiettiva delle superficie al caso di spazi privi di torsione o in particolare a spazi a connessione proiettiva normale. Infatti consideriamo due spazi a connessione proiettiva qualsiasi P_3^* e $\bar{P}_3^*$ ed in essi due superficie Σ^*, $\bar{\Sigma}^*$; è ben noto che al sistema delle autoparallele di P_3^* (o $\bar{P}_3^*$) si può associare uno spazio a connessione proiettiva normale P_3 (o $\bar{P}_3$) avendosi quindi ovviamente fra i due spazi P_3^* e P_3 (o $\bar{P}_3^*$ e $\bar{P}_3$) una corrispondenza che conserva le autoparallele. Alla superficie Σ^* (o $\bar{\Sigma}^*$) corrisponderà così una superficie Σ (o $\bar{\Sigma}$) e quelle due superficie risultano proiettivamente applicabili. In tale modo ad ogni coppia di superficie Σ, $\bar{\Sigma}$ di P_3, $\bar{P}_3$ proiettivamente applicabili corrisponderà una coppia di superficie Σ^*, $\bar{\Sigma}^*$ nelle stesse condizioni e viceversa.

Scriviamo dunque il sistema (3.8) per il caso di due spazi a connessione droiettiva normale. Attualmente si hanno le relazioni, per lo spazio P_3,

$$(\Omega_i^i - \Omega_0^0) = 0 \,, \quad \Omega_0^i = 0 \,, \quad R^h_{ijh} = 0 \tag{4.7}$$

e le analoghe per lo spazio $\bar{P}_3$.

Ricordiamo che si può sempre sottrarre dalla diagonale principale della matrice (ω) una forma di Pfaff arbitraria, pertanto si può sempre supporre che sia $\tau_0^0 = \omega_0^0 = 0$. Le equazioni (3.8) diventano, avendo fatto una conveniente scelta della omografia $\mathbf{\Omega}$ in base alle (3.7),

$$\begin{gathered}
\tau_0^0 - \omega_0^0 = 0 \,, \\
\omega_0^3 = 0 \,, \quad \tau_0^3 - \omega_0^3 = 0 \,, \quad \tau_0^1 - \omega_0^1 = 0 \,, \quad \tau_0^2 - \omega_0^2 = 0 \,, \\
\tau_1^3 - \omega_1^3 = 0 \,, \quad \tau_2^3 - \omega_2^3 = 0 \,, \\
\tau_1^1 - \omega_1^1 = 0 \,, \quad \tau_2^1 - \omega_2^1 = 0 \,, \\
\tau_1^2 - \omega_1^2 = 0 \,, \quad \tau_2^2 - \omega_2^2 = 0 \,.
\end{gathered} \tag{4.8}$$

La differenziazione esterna delle equazioni (4.8) conduce alle seguenti condizioni di integrabilità.[15])

$$\begin{aligned}
&[\omega_0^1\omega_1^3] + [\omega_0^2\omega_2^3] = 0\,,\\
&[(\tau_1^0 - \omega_1^0)\,\omega_0^1] + [(\tau_2^0 - \omega_2^0)\,\omega_0^2] = 0\,,\\
&[(\tau_3^3 - \omega_3^3)\,\omega_1^3] + \alpha_1^3[\omega_1^3\omega_2^3] = 0\,,\\
&[(\tau_3^3 - \omega_3^3)\,\omega_2^3] + \alpha_2^3[\omega_1^3\omega_2^3] = 0\,,\\
&[(\tau_1^0 - \omega_1^0)\,\omega_0^1] + [\omega_1^3(\tau_3^1 - \omega_3^1)] + h_{112}^1[\omega_0^1\omega_0^2] = 0\,,\\
&[(\tau_2^0 - \omega_2^0)\,\omega_0^1] + [\omega_2^3(\tau_3^1 - \omega_3^1)] + h_{212}^1[\omega_0^1\omega_0^2] = 0\,,\\
&[(\tau_1^0 - \omega_1^0)\,\omega_0^2] + [\omega_1^3(\tau_3^2 - \omega_3^2)] + h_{112}^2[\omega_0^1\omega_0^2] = 0\,,\\
&[(\tau_2^0 - \omega_2^0)\,\omega_0^2] + [\omega_2^3(\tau_3^2 - \omega_3^2)] + h_{212}^2[\omega_0^1\omega_0^2] = 0\,.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Consideriamo un elemento lineare integrale del sistema (4.8) dato dalle

$$\begin{aligned}
&\omega_0^1 : \omega_0^2 : \omega_1^3 : \omega_2^3 : \tau_1^0 - \omega_1^0 : \tau_2^0 - \omega_2^0 : \tau_3^1 - \omega_3^1 : \tau_3^2 - \omega_3^2 : \tau_3^3 - \omega_3^3 =\\
&= 1 : 0 \;: b_1^3 : b_2^3 :\; a_1^0 \;: a_2^0 \;: a_3^1 \;: a_3^2 \;: a_3^3\,;
\end{aligned} \tag{4.10}$$

si osservi che tale elemento non è particolare perchè $\omega_0^2 = 0$ è una direzione tangente qualsiasi in A_0, $\bar{A}_0$ alle superficie $\Sigma, \bar{\Sigma}$.

Le equazioni (4.9) mostrano che gli elementi lineari integrali in involuzione[16]) con l'elemento (4.10) sono dati dalle equazioni

$$\begin{aligned}
&\omega_1^3 = b_1^3\omega_0^1 + b_2^3\omega_0^2\,,\\
&\tau_1^0 - \omega_1^0 = a_1^0\omega_0^1 + a_2^0\omega_0^2\,,\\
&\tau_1^0 - \omega_1^0 - b_1^3(\tau_3^1 - \omega_3^1) = a_1^0\omega_0^1 - a_3^1\omega_1^3 + h_{112}^1\omega_0^2\,,\\
&\tau_2^0 - \omega_2^0 - b_2^3(\tau_3^1 - \omega_3^1) = a_1^0\omega_0^1 - a_3^1\omega_2^3 + h_{112}^1\omega_0^2\,,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
&- b_1^3(\tau_3^2 - \omega_3^2) = a_1^0\omega_0^2 - a_3^2\omega_1^3 + h_{112}^2\omega_0^2\,,\\
&- b_2^3(\tau_3^2 - \omega_3^2) = a_2^0\omega_0^2 - a_3^2\omega_2^3 + h_{212}^2\omega_0^2\,,\\
&b_1^3(\tau_3^3 - \omega_3^3) = a_3^3\omega_1^3 - \alpha_1^3 b_2^3\omega_1^3 + \alpha_1^3 b_1^3\omega_2^3\,,\\
&b_2^3(\tau_3^3 - \omega_3^3) = a_3^3\omega_2^3 - \alpha_2^3 b_2^3\omega_1^3 + \alpha_2^3 b_1^3\omega_2^3\,,
\end{aligned} \tag{4.11'}$$

dalle quali si ricava la relazione

$$(a_3^3 - \alpha_1^3 b_2^3 + \alpha_2^3 b_1^3)\,.\,(b_2^3\omega_1^3 - b_1^3\omega_2^3) = 0\,. \tag{4.12}$$

Il sistema (4.8) non è dunque in involuzione ed occorre prolungarlo aggiungendo l'equazione

$$\tau_3^3 - \omega_3^3 = \alpha_1^3\omega_2^3 - \alpha_2^3\omega_1^3\,, \tag{4.13}$$

---

[15]) Supponiamo che le superficie Σ, Σ siano a punti non parabolici, cioè che le due forme ω_1^3, ω_2^3 siano indipendenti. In virtù della seconda delle (4.9) si ha allora che il prodotto esterno $[\omega_1^3\omega_2^3]$ e il prodotto esterno $[\omega_0^1\omega_0^2]$ differiscono soltanto per un fattore scalare.

[16]) Si vedano: *E. Cartan, Les systèmes differentiels extérieurs et leurs applications géométriques,* Paris, Hermann, 1945; *E. Cartan, Sur la structure des groupes infinis de transformations,* Ann. Ec. Norm. Sup. Paris, (3) *21*, 153—206 (1904).

dalla quale per differenziazione esterna si ricava la nuova condizione di integrabilità

$$\begin{aligned}&[\{d\alpha_1^3 - \tau_3^2 + \omega_3^2 + \alpha_1^3(\omega_2^2 - \omega_3^3) - a_2^3\omega_1^2\}\,\omega_2^3] + \\ &+ [\{- d\alpha_2^3 - \tau_3^1 + \omega_3^1 + \alpha_1^3\omega_2^1 - \alpha_2^3(\omega_1^1 - \omega_3^3)\}\,\omega_1^3] + \\ &+ h_{312}^3[\omega_0^1\omega_0^2] = 0\end{aligned} \tag{4.14}$$

che si può anche scrivere

$$[A_1\omega_1^3] + [A_2\omega_2^3] + h_{312}^3[\omega_0^1\omega_0^2] = 0 \tag{4.15}$$

dove A_1 e A_2 sono evidentemente due nuove forme di Pfaff. Un elemento lineare integrale del sistema (4.8) e (4.13) è ora dato dalle (4.10) cui si aggiungono le altre[17])

$$\ldots : A_1 : A_2 = \ldots : l_1 : l_2\,, \tag{4.16}$$

e gli elementi integrali con quello in involuzione sono dati dalle (4.11) e dalla[18])

$$A_1b_1^3 + A_2b_2^3 = l_1\omega_1^3 + l_2\omega_2^3 + h_{312}^3\omega_0^2\,. \tag{4.17}$$

Si conclude che, se $b_1^3a_3^2 \neq 0$, vi sono ∞^2 elementi integrali in involuzione con l'elemento generico considerato. Il sistema di equazioni di Pfaff (4.8) e (4.13) è dunque in involuzione e la sua soluzione generale dipende da una funzione arbitraria di due variabili. Si può dunque concludere che: le coppie di superficie proiettivamente applicabili, di due spazi generici P_3, $\overline{P}_3$ a connessione proiettiva normale, dipendono da una funzione arbitraria di due variabili. Ciò rende plausibile l'induzione che per ogni superficie, a punti non parabolici, di P_3 ve ne sia almeno una in $\overline{P}_3$ proiettivamente applicabile alla prima. Ciò risulterà dimostrato nel successivo n. 5 nel caso che lo spazio P_3 sia uno spazio proiettivo ordinario.

5. Applicabilità proiettiva di una superficie di uno spazio P_3 a connessione proiettiva su una superficie dello spazio proiettivo ordinario. Prima di esaminare il caso in cui lo spazio P_3 sia proiettivo ordinario, vogliamo mostrare come si possa particolarizzare il riferimento proiettivo nello spazio $\overline{S}_3$ tangente allo spazio $\overline{P}_3$ in un punto $\overline{A}_0$ di una superficie Σ, immersa in quello spazio. Supponiamo intanto che valgano già la

$$\tau_0^0 = 0\,, \quad \tau_0^3 = 0 \tag{5.1}$$

sulla superficie $\overline{\Sigma}$.

Anzitutto si possono prendere le rette A_0A_1, A_0A_2 coincidenti con le tangenti asintotiche in P a Σ e poi scegliere convenientemente i punti A_1, A_2 su quelle rette sì che risulti

$$\tau_1^3 = \tau_0^2\,, \quad \tau_2^3 = \tau_0^1\,; \tag{5.2}$$

[17]) Naturalmente dalla (4.10) si escluderanno ora i termini $\tau_3^3 - \omega_3^3$ e a_3^3.

[18]) Relazione che si ottiene dalla (4.15).

da queste, per differenziazione, è facile constatare (con i soliti procedimenti[19]) che si può far sì che risulti inoltre[20])

$$\tau_1^2 = \tau_0^1 , \quad \tau_2^1 = \tau_0^2 \tag{5.3}$$

ed allora si ha anche

$$\tau_1^1 + \tau_2^2 - \tau_3^3 = - R^3_{112}\tau_0^1 + R^3_{212}\tau_0^2 ; \tag{5.4}$$

a questo punto le forme τ_1^1, τ_2^2 risultano combinazioni lineari di τ_0^1, τ_0^2 e si avrà

$$\begin{aligned} \tau_2^2 - 2\tau_1^1 &= c_0\tau_0^1 + c_1\tau_0^2 , \\ \tau_1^1 - 2\tau_2^2 &= c_3\tau_0^1 + c_4\tau_0^2 , \end{aligned} \tag{5.5}$$

come del resto risulta dalla differenziazione esterna delle (5.3); le quantità c_0, c_1, c_3, c_4 sono funzioni dei due parametri dai quali dipende il punto $\overline{A}_0$ su $\overline{\Sigma}$ e in generale non sono legate da nessuna relazione.

Ciò premesso consideriamo nello spazio P_3, che ora supponiamo essere uno spazio proiettivo ordinario S_3, la famiglia di riferimenti proiettivi definiti dalle equazioni

$$\begin{aligned} &\omega_0^3 = 0 , \quad \omega_0^1 = \tau_0^1 , \quad \omega_0^2 = \tau_0^2 , \\ &\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0 , \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_3^3 = 0 , \\ &\omega_1^3 = \omega_0^2 , \quad \omega_2^3 = \omega_0^1 , \quad \omega_1^2 = \omega_0^1 , \quad \omega_2^1 = \omega_0^2 , \\ &\omega_2^2 + \omega_0^0 - 2\omega_1^1 = c_0\omega_0^1 + c_1\omega_0^2 , \\ &\omega_1^1 + \omega_0^0 - 2\omega_2^2 = c_3\omega_0^1 + c_4\omega_0^2 , \\ &\omega_3^2 - \omega_1^0 = c_1\omega_0^1 + u\omega_0^2 , \\ &\omega_3^1 - \omega_0^2 = u\omega_0^1 + c_3\omega_0^2 , \end{aligned} \tag{5.6}$$

dove u è una funzione incognita. Mostreremo ora che si può determinare la u e ciò che rimane arbitrario delle forme ω_i^j in modo tale che la famiglia considerata risulti una famiglia di riferimenti semi-normali[21]) attaccati ai punti di una superficie Σ di S_3, sulla quale sarà proiettivamente applicabile la superficie $\overline{\Sigma}$ di $\overline{P}_3$ considerata in principio e ciò risulta dal confronto delle (5.5) con le (5.6).

Differenziando esternamente le equazioni

$$\begin{aligned} \omega_2^2 - \omega_0^0 - 2\omega_1^1 &= c_0\omega_0^1 + c_1\omega_0^2 , \\ \omega_1^1 + \omega_0^0 - 2\omega_2^2 &= c_3\omega_0^1 + c_4\omega_0^2 , \\ \omega_3^2 - \omega_1^0 &= c_1\omega_0^1 + u\omega_0^2 , \\ \omega_3^1 - \omega_2^0 &= u\omega_0^1 + c_3\omega_0^2 \end{aligned} \tag{5.7}$$

[19]) Adoperati per esempio nel lavoro citato in [12]) per lo spazio proiettivo ordinario ma ancora validi.

[20]) Nell'ipotesi, che facciamo una volta per tutte, che la superficie $\overline{\Sigma}$ non sia luogo di ∞^1 curve autoparallele di $\overline{P}_3$. Il caso escluso si petrebbe trattare in modo analogo a quello qui seguito per il caso generale.

[21]) Si veda l'op. cit. in [19]) a pag. 230.

si ricavano le equazioni quadratiche esterne

$$
\begin{aligned}
&4[\omega_1^0\omega_0^1] - 2[\omega_2^0\omega_0^2] + \\
&+ \left\{- c_{02} - \frac{c_0}{3}(2c_1 + c_4) + c_{11} + c_1 \frac{2c_3 + c_0}{3} + 3 - 3u\right\}[\omega_0^1\omega_0^2] = 0 \, , \\
&- 2[\omega_1^0\omega_0^1] + 4[\omega_2^0\omega_0^2] + \\
&+ \left\{- c_{32} - \frac{c_3}{3}(2c_1 + c_4) + c_{41} + c_4 \frac{2c_3 + c_0}{3} + 3u - 3\right\}[\omega_0^1\omega_0^2] = 0 \, , \\
&- 2[\omega_2^0\omega_0^1] + [\{\mathrm{d}u - 2\omega_3^0\}\, \omega_0^2] + \\
&+ \left\{- c_{12} - c_1 \frac{4c_1 + 2c_4}{c_3} + (c_0 + c_3)\, u + c_3\right\}[\omega_0^1\omega_0^2] = 0 \, , \\
&[\{\mathrm{d}u - 2\omega_3^0\}\, \omega_0^1] - 2[\omega_0^1\omega_0^2] + \\
&\left\{- c_{31} + c_3 \frac{2c_0 + 4c_3}{3} - (c_1 + c_4)\, u - c_1\right\}[\omega_0^1\omega_0^2] = 0 \, ,
\end{aligned}
\tag{5,8}
$$

dove

$$\mathrm{d}c_i = c_{i1}\omega_0^1 + c_{i2}\omega_0^2 \quad (i = 0, 1, 2, 3) \, .$$

Se si pone

$$
\begin{aligned}
\omega_1^0 &= \lambda\omega_0^1 + \mu\omega_0^2 \\
\omega_2^0 &= \nu\omega_0^1 + \varrho\omega_0^2 \\
2\omega_3^0 - \mathrm{d}u &= \alpha\omega_0^1 + \beta\omega_0^2
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

le (5.8) dànno le relazioni

$$
\begin{aligned}
- 4\mu - 2\nu + A &= 0 \\
2\mu + 4\nu + B &= 0 \\
2\varrho - \alpha + C &= 0 \\
\beta - 2\lambda + D &= 0
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

avendo indicato con A, B, C, D rispettivamente le espressioni a coefficiente di $[\omega_0^1\omega_0^2]$ nella prima, seconda, terza e quarta delle (5.8). Risulta dunque

$$
\begin{aligned}
\mu &= - \tfrac{1}{2}u + \ldots \, , \\
\nu &= - \tfrac{1}{2}u + \ldots
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

scrivendo soltanto il termine che contieme la u. La differenziazione esterna delle (5.9) fornisce le seguenti equazioni quadratiche esterne

$$
\begin{aligned}
&[\mathrm{d}\lambda\, \omega_0^1] + L \, . \, [\omega_0^1\omega_0^2] = 0 \, , \\
&[\mathrm{d}\varrho\, \omega_0^2] + M \, . \, [\omega_0^1\omega_0^2] = 0 \, , \\
&[\mathrm{d}\varrho\, \omega_0^1] + [\mathrm{d}\lambda\, \omega_0^2] + 2N[\omega_0^1\omega_0^2] = 0 \, ,
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

dove le espressioni L, M, N sono, per quanto riguarda i termini contenenti la u, che solo interessano,

$$
\begin{aligned}
L &= \tfrac{1}{3}(2c_3 + c_0)\, u + \ldots \, , \\
M &= - \tfrac{1}{3}(2c_4 + c_1)\, u + \ldots \, , \\
2N &= \tfrac{1}{6}(c_3c_4 - c_1c_0)\, u + \tfrac{1}{2}(c_{02} + c_{32} + c_{11} + c_{41})\, u + \ldots
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

Dalle (5.12) si ricavano le relazioni

$$
\begin{aligned}
d\lambda &= (w - N)\,\omega_0^1 + L\omega_0^2 \\
d\varrho &= -\,M\omega_0^1 + (w + N)\,\omega_0^2
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

dove w è una nuova funzione incognita, e da queste ultime, per differenziazione esterna, si ricavano le

$$
\begin{aligned}
&[dw\,\omega_0^1] + [dL\,\omega_0^2] - [dN\,\omega_0^1] + K[\omega_0^1\omega_0^2] = 0\,, \\
&[dw\,\omega_0^2] + [dN\,\omega_0^2] - [dM\,\omega_0^1] + H[\omega_0^1\omega_0^2] = 0\,.
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

Queste equazioni, tenuto conto delle (5.13), contengono due espressioni di Pfaff nuove e cioè du, dw; esse mostrano che il sistema formato dalle equazioni (5.6), (5.9), (5.14) è in involuzione e che la sua soluzione dipende da due funzioni arbitrarie di una variable. Pertanto vi è una superficie in S_3 cui sono attaccati i riferimenti semi-normali determinati dalle equazioni scritte sopra. La superficie Σ è determinata in generale a meno di omografie e l'arbitrarietà della soluzione dipende soltanto dal fatto che la famiglia di riferimenti ottenuta, essendo di riferimenti semi-normali, contiene in sè una certa arbitrarietà relativamente ad una stessa superficie.

Резюме

О ПРОЕКТИВНОМ ИЗГИБАНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ

ЛУИДЖИ МУРАКИНИ (Luigi Muracchini), Болоня.

(Поступило в редакцию 1/III 1955 г.)

Классическое понятие Фубини проективного изгибания поверхностей в трехмерном проективном S_3 было в 1950 г. обобщено Э. Бомпиани на случай поверхностей в кривых трехмерных пространствах P_3 проективной связности. В настоящей работе такие обобщенные проективные изгибания исследуются методом внешних форм Э. Картана. Доказывается, что если даны два произвольных трехмерных пространства P_3 и $\overline{P}_3$ проективной связности, то семейство проективно наложимых пар поверхностей Σ в P_3 и $\overline{\Sigma}$ в $\overline{P}_3$ зависит од одной произвольной функции двух переменных. Далее доказано, что всякая поверхность Σ без параболических точек в произвольном P_3 проективной связности проективно наложима на некоторую поверхность линейного пространства S_3. Ввиду этого, можно обобщить на случай кривых пространств P_3 все те понятия из классической теории поверхностей, которые инвариантны при проективном изгибании.