Eduard Čech

О точечных изгибаниях конгруэнции прямых

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 2, 234–273

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100144

Чехословацкий математический журнал, т. 5 (80) 1955

О ТОЧЕЧНЫХ ИЗГИБАНИЯХ КОНГРУЭНЦИЙ ПРЯМЫХ

ЭДУАРД ЧЕХ (Eduard Čech), Прага.

(Поступило в редакцию 29/XII 1954 г.)

В настоящей работе исследуются все соответствия между двумя трехмерными многообразиями V_3 и V'_3, состоящими из ∞^2 прямых и обладающие касательными коллинеациями, постоянными вдоль каждой прямой.

В работе Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами V (настоящий Журнал, т. 2, 1952, стр. 167—188) мною был введен новый тип преобразований прямолинейных конгруэнций в S_3. (См. также работу L. Muracchini, *Sulle trasformazioni puntuali che sono inviluppi di omografie*, Bollettino della Unione Matematica Italiana (*3*) *8*, 1953, стр. 390—398, содержащую важные дополнения и обобщения моих результатов.) В настоящей работе я распространяю эту теорию на преобразования произвольных систем ∞^2 прямых в S_n. В качестве подготовки к дальнейшим работам по дифференциальной геометрии систем ∞^2 прямых я даю прежде всего подробное изложение элементарной дифференциальной геометрии первого порядка таких систем с полной систематикой всех возможных случаев. Ввиду подготовляемых дальнейших работ это изложение является целесообразным, хотя и не содержит ничего, что не было бы в принципе затронуто уже в классической работе К. Сегре (C. Segre), *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo т. *30*, 1910, стр. 87—121. В связи с этим не лишено интереса привести сноску на стр. 94 цитированной работы: Ci accadrà spesso nel sequito di assegnare dei teoremi solo pel caso *generale*, senza studiare le modificazioni che essi esigono in casi eccezionali. . . . Quanto all'esame delle *eccezioni*, esso sarebbe certo un complemento essenziale, che potrebbe anche portare a risultati importanti; ma convien lasciarlo come compito per l'avvenire, non volendo dare a questo scritto un'estensione eccessiva.

1. Рассмотрим в проективном пространстве S_n прежде всего линейчатую поверхность R, образованную прямой

$$p = p(t) \ . \tag{1,1}$$

На каждой прямой p возьмем две различные точки

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \tag{1,2}$$

так что

$$p = (xy)\,. \tag{1,3}$$

Кривая на поверхности R образована точкой

$$z = \alpha x + \beta y\,, \tag{1,4}$$

где

$$\alpha = \alpha(t)\,, \quad \beta = \beta(t) \tag{1,5}$$

и ни для какого t не имеет одновременно места $\alpha = \beta = 0$.

Дифференцирование по t обозначим через d.

Касательная к кривой (1,4) дана выражением $(z, \mathrm{d}z)$, где

$$\mathrm{d}z = \alpha\, \mathrm{d}x + \beta\, \mathrm{d}y + \mathrm{d}\alpha\,.\,x + \mathrm{d}\beta\,.\,y\,. \tag{1,6}$$

Предположим прежде всего, что

$$(x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \neq 0\,, \tag{1,7}$$

для чего необходимо взять $n \geqq 3$. Если взять фиксированную точку (1,4) и провести через нее все возможные кривые на поверхности R, то каждая из них будет иметь в точке (1,4) определенную касательную $(z, \mathrm{d}z)$, отличную от p, и эти касательные вместе с прямой p образуют пучок прямых с центром в точке (1,4) в плоскости

$$(x, y, \alpha\, \mathrm{d}x + \beta\, \mathrm{d}y)\,, \tag{1,8}$$

являющейся *касательной плоскостью* к поверхности R в точке (1,4). Если при данном t изменять отношение $\alpha : \beta$, то в каждой точке (1,4) получим определенную касательную плоскость (1,8); эти касательные плоскости заполнят трехмерное пространство

$$(x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y)\,, \tag{1,9}$$

являющееся касательным пространством S_3 к поверхности вдоль прямой p. Соответствие между точками (1,4) и касательными плоскостями (1,8) взаимно однозначно (проективное соответствие Chasles'a). Линейчатая поверхность R, выполняющая условие (1,7), называется косой линейчатой поверхностью.

Невозможно, чтобы для всех t имели одновременно место оба соотношения

$$(x, y, \mathrm{d}x) = (x, y, \mathrm{d}y) = 0\,, \tag{1,10}$$

ибо в таком случае прямая (1,3) была бы фиксированной, что мы, конечно, исключаем. Мы будем предполагать, что *ни* для *одного* t не выполняются оба соотношения (1,10). Итак, если для какого-либо t имеет место

$$(x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = 0\,, \tag{1,11}$$

то матрица в левой части соотношения (1,11) имеет ранг 3 и на прямой p существует вполне определенная точка (1,4), которую мы назовем *особой точкой* прямой и которая выражается аналитически при помощи уравнения

$$(x, y, \alpha\, \mathrm{d}x + \beta\, \mathrm{d}y) = 0\,. \tag{1,12}$$

Если (1,4) — особая точка, то касательная $(z, \mathrm{d}z)$ или неопределена или совпадает с прямой p, так что поверхность R не имеет в особой точке определенной касательной плоскости. Напротив, во всех обыкновенных точках прямой p поверхность R имеет в случае (1,11) одну и ту же касательную плоскость, которую мы назовем *особой плоскостью* прямой p.

Предположим теперь, что поверхность R выполняет условие (1,12) для *всех* t; такая линейчатая поверхность R называется *развертывающейся*. Не умаляя общности, можем предположить, что особой точкой является точка x, другими словами, что

$$(x, y, \mathrm{d}x) = 0\,. \tag{1,13}$$

Тогда особая плоскость определяется выражением

$$(x, y, \mathrm{d}y)\,. \tag{1,14}$$

Теперь возможны два случая. Если особая точка x фиксирована, то поверхность R называется *конической* и точка x — ее *вершиной*. Для определения конической поверхности достаточно выбрать вершину x и *направляющую кривую*, образованную точкой $y = y(t)$; касательная $(y, \mathrm{d}y)$ к этой направляющей не проходит через точку x. Особая плоскость или *касательная плоскость конической поверхности* R соединяет вершину x с касательной к направляющей кривой. Касательная плоскость конической поверхности R может иметь постоянное положение; в таком случае коническая поверхность R является *пучком прямых*.

Второй случай отличается тем, что особая точка x меняет свое положение, т. е. описывает кривую C, называемую *ребром возврата* развертывающейся поверхности R. Из (1,13) следует, что прямая p совпадает с касательной $(x, \mathrm{d}x)$ к кривой C; таким образом, поверхность R является *поверхностью касательных* к своему ребру возврата. Так как прямая p меняет свое положение, C не может быть прямой. Наоборот, если кривая C не является прямой, то поверхность ее касательных будет развертывающейся поверхностью, особые точки которой заполнят кривую C; особой плоскостью будет *соприкасающаяся плоскость*

$$(x, \mathrm{d}x, \mathrm{d}^2x) \tag{1,15}$$

кривой C в точке x.

2. Рассмотрим теперь в S_n конгруэнцию L, т. е. систему ∞^2 прямых, образованную прямой

$$p = p(u, v)\,. \tag{2,1}$$

На каждой прямой p выберем опять две различные точки

$$x = x(u, v) , \quad y = y(u, v) , \tag{2,2}$$

так что

$$p = (x, y) . \tag{2,3}$$

Если независимые переменные u, v считать равными некоторым функциям

$$u = u(t) , \quad v = v(t) \tag{2,4}$$

вспомогательного параметра t, то получим линейчатую поверхность R, содержащуюся в конгруэнции L. Обозначим дифференцирование по t через d и предположим, что ни для одного t не имеет одновременно места $\mathrm{d}u = \mathrm{d}v = 0$. В точке

$$z = \alpha x + \beta y , \tag{2,5}$$

не являющейся для поверхности R особой точкой, эта поверхность имеет касательную плоскость

$$(x, y, \alpha\, \mathrm{d}x + \beta\, \mathrm{d}y) = \\ = \left(x, y, \alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial y}{\partial u}\right) \mathrm{d}u + \left(x, y, \alpha \frac{\partial x}{\partial v} + \beta \frac{\partial y}{\partial v}\right) \mathrm{d}v . \tag{2,6}$$

О двух линейчатых поверхностях R, R' конгруэнции L, которые проходят обе через одну и ту же прямую p и для которых отношение $\mathrm{d}u : \mathrm{d}v$ имеет одно и то же значение, мы говорим, что они проходят через прямую p в одном и том же *направлении*, которое мы обозначим через $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$; множество всех таких направлений образует линейный образ ∞^1. При данной точке (2,5) прямой p положение касательной плоскости (2,6) зависит только от направления $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$; мы говорим, что (2,6) является *касательной плоскостью конгруэнции L в точке* (2,5) *и в направлении* $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$.

Если при данной прямой p, т. е. при данных u, v изменять, с одной стороны точку (2,5), т. е. отношение $\alpha : \beta$, с другой стороны направление $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$, то касательная плоскость (2,6) изменяется так, что наименьшее линейное пространство, в которое погружены все ее положения, образовано точками

$$x, \ y, \ \frac{\partial x}{\partial u}, \ \frac{\partial x}{\partial v}, \ \frac{\partial y}{\partial u}, \ \frac{\partial y}{\partial v} . \tag{2,7}$$

Это линейное пространство S_m назовем *касательным пространством конгруэнции L* вдоль прямой p; его размерность m назовем *характером* конгруэнции L. Имеет место $2 \leqq m \leqq 5$, а также, конечно, и $m \leqq n$. В литературе название конгруэнции применяется, как правило, только к тем системам ∞^2 прямых, для которых $m = 3$; случаи же $m = 4$ и $m = 5$ изучались до сих пор очень мало.

Ясно, что при определении конгруэнции нужно предполагать, что прямая (2,1) существенно зависит от *двух* параметров u, v. Исключению подлежит не только тот случай, когда прямая (2,1) сохраняет свое положение при всех изменениях u, v, но и тот случай, когда можно подобрать непостоянную функцию $f(u, v)$ так чтобы прямая p была неподвижной вследствие $\mathrm{d}f = 0$. Нетрудно убедиться в том, что в исключенном случае было бы возможным подобрать для каждой пары (u, v) направление $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$ так, чтобы было

$$(x, y, \mathrm{d}x) = (x, y, \mathrm{d}y) = 0\,. \tag{2,8}$$

Мы предполагаем, что *ни* для *одной* пары (u, v) нельзя подобрать направление $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$ так, чтобы имело место (2,8).

3. В настоящем параграфе займемся случаем, когда характер m равен 5, т. е.

$$\left(x, y, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}\right) \neq 0\,. \tag{3,1}$$

Тогда для каждой прямой p и для каждого направления $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$ будет

$$(x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \neq 0\,.$$

Это означает, что все линейчатые поверхности R, содержащиеся в конгруэнции L, являются косыми. Касательное пространство S_3 поверхности R вдоль p дано выражением

$$(x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \left(x, y, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right)\mathrm{d}u^2 +$$
$$+ \left[\left(x, y, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \left(x, y, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}\right)\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \left(x, y, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\right)\mathrm{d}v^2\,; \tag{3,2}$$

оно зависит только от направления, в котором поверхность R проходит через рассматриваемую прямую p, и мы назовем его поэтому *касательным пространством конгруэнции L в направлении* $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$. Помимо этих S_3 мы рассмотрим еще другие S_3, которые возникнут, если на нашей прямой p выбрать точку (2,5). В этой точке поверхность R имеет касательную плоскость (2,6); при изменении поверхности R, т. е. при изменении отношения $\mathrm{d}u : \mathrm{d}v$, изменяется и плоскость (2,6) так, что описывает S_3

$$\alpha^2\left(x, y, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}\right) + \alpha\beta\left[\left(x, y, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \left(x, y, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}\right)\right] +$$
$$+ \beta^2\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}\right); \tag{3,3}$$

мы говорим, что (3,3) есть *касательное* пространство S_3 *конгруэнции* L *в точке* (2,5).

Для данной прямой p геометрическое место пространств S_3 (3,2) при изменении направления $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$ совпадет с геометрическим местом пространств S_3 (3,3) при изменении точки (2,5). Это будет квадрика Q в касательном S_5 конгруэнции L вдоль p [образованном точками (2,7)]. Квадрика Q является особой и имеет одномерную вершину (прямую p). На квадрике Q лежат две системы ∞^1 S_3; во-первых, это касательные S_3 (3,2) конгруэнции L в различных направлениях ($\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$), во-вторых, касательные S_3 (3,3) конгруэнции L в различных точках z прямой p. Произвольное S_3 системы (3,2) и произвольное S_3 системы (3,3) пересекутся в касательной плоскости (2,5) конгруэнции L в точке z и в направлении ($\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$).

4. Приступим к случаю, когда характер m равен 4, т. е. когда точки (2,7) связаны в точности одним соотношением вида

$$a_1 \frac{\partial x}{\partial u} + b_1 \frac{\partial y}{\partial u} - \left(a_2 \frac{\partial x}{\partial v} + b_2 \frac{\partial y}{\partial v}\right) = a_3 x + b_3 y \,. \tag{4,1}$$

В настоящем параграфе исследуем случай

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0 \,. \tag{4,2}$$

Нетрудно убедиться в том, что (4,2) означает, что неравенство

$$(x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \neq 0$$

справедливо для всех напрявлений ($\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$) и что, следовательно, все линейчатые поверхности, принадлежащие конгруэнции L — косые.

В силу неравенства (4,2) точки

$$a_1 x + b_1 y \,, \quad a_2 x + b_2 y$$

представляют собой две различные точки прямой p, которыми можно заменить выбранные нами первоначально точки x, y. Сделав это, мы приведем соотношение (4,1) к виду

$$\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v} = ax + by \,. \tag{4,3}$$

При изменении точек x, y это соотношение останется в силе только тогда, если вместо x, y мы введем ϱx, ϱy, где $\varrho = \varrho(u, v) \neq 0$. Это замечание справедливо, конечно, только при определенном выборе параметров u, v. Касательное S_4 конгруэнции L вдоль p имеет при условии (4,3) вид

$$\left(x, y, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}\right). \tag{4,4}$$

В силу (4,3) выражение (3,2) для касательного S_3 конгруэнции L в направлении ($\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$) имеет вид

$$\left(x, y, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right) \mathrm{d}u^2 + \left(x, y, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}\right) \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v - \left(x, y, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}\right) \mathrm{d}v^2 \tag{4,5}$$

а выражение (3,3) для касательного пространства S_3 конгруэнции L в точке (2,5) имеет вид

$$\alpha^2\left(x,\, y,\, \frac{\partial x}{\partial u},\, \frac{\partial x}{\partial v}\right) + \alpha\beta\left(x,\, y,\, \frac{\partial x}{\partial v},\, \frac{\partial y}{\partial u}\right) - \beta^2\left(x,\, y,\, \frac{\partial x}{\partial u},\, \frac{\partial y}{\partial u}\right). \tag{4,6}$$

Итак, касательное S_3 конгруэнции L в точке $\alpha x + \beta y$ совпадает с касательным S_3 конгруэнции L в направлении $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v) = (\beta, -\alpha)$. Эти S_3 тождественны с касательными S_3 особой квадрики Q в касательном S_4 (4,4), имеющей одномерную вершину в прямой p.

5. Если в случае $m = 4$ в соотношении (4,1) для всех пар (u, v) будет

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0\,,$$

то нетрудно обнаружить, что для каждой пары (u, v) имеется направление $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$, которое мы назовем *особым* и для которого

$$(x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = 0\,.$$

Можно предположить, что параметры (u, v) были подобраны так, чтобы направление $\mathrm{d}v = 0$ было особым. Обозначим через R те линейчатые поверхности, принадлежащие конгруэнции L, для которых $v = \mathrm{const}$. Поверхности R_v—развертывающиеся, и через каждую прямую (2,1) проходит одна из них. Без ограничения общности можем предположить, что для каждой прямой p точка x является особой точкой соответствующей поверхности R_v; точку x назовем *фокусом* прямой p, а особую плоскость поверхности R_v — *фокалчной плоскоссчю* прямой p. Итак, для $\mathrm{d}v = 0$ справедливо (1,13), так что соотношение (4,1) должно иметь вид

$$\frac{\partial x}{\partial u} = hx + ky\,. \tag{5,1}$$

Фокальной плоскостью является (1,14) в предположении $\mathrm{d}v = 0$; это будет, следовательно, плоскость

$$\left(x,\, y,\, \frac{\partial y}{\partial u}\right). \tag{5,2}$$

Теперь необходимо различать два случая, смотря по тому, будет ли в (5,1) $k \neq 0$ или $k = 0$. Пусть прежде всего

$$k \neq 0\,. \tag{5,3}$$

Так как (5,1) представляет единственное линейное соотношение между точками (2,7), из (5,3) следует, что

$$\left(x\, \frac{\partial x}{\partial u}\, \frac{\partial x}{\partial v}\right) \neq 0\,.$$

Но это значит, что при изменении u, v фокус x описывает поверхность, которую мы назовем *фокальной поверхностью* конгруэнции L и обозначим через F. Так как точку y можно заменить любой другой точкой прямой p, отличной от точки x, то из (5,3) следует, что соотношение (5,1) можно привести к виду

$$y = \frac{\partial x}{\partial u} \, . \tag{5,4}$$

Тот факт, что (5,4) является единственным соотношением между точками (2,7), выражается неравенством

$$\left(x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v}\right) \neq 0 \, , \tag{5,5}$$

из которого между прочим следует, что линейное пространство, в которое погружена фокальная поверхность F, не может иметь размерность ниже 4.

При $v = \text{const}$ фокус x опишет кривую C_v на поверхности F, и развертывающаяся поверхность R_v будет поверхностью касательных к кривой C_v.

Из (5,4) следует, что фокальная плоскость (5,2) является соприкасающейся плоскостью кривой C_v в точке x. Из (5,5) следует, что кривые C_v не являются прямыми, что они не являются асимптотическими линиями на поверхности F и что на поверхности F не существует сопряженных к ним кривых. Наоборот, если взять в S_n ($n \geqq 4$) поверхность F и разложить ее на ∞^1 кривых C_v так, что эти кривые не являются прямыми, не являются на F асимптотическими и что на F не существует сопряженных к ним кривых, то множество всех касательных ко всем кривым C_v будет конгруэнцией рассматриваемого типа.

Приступим к случаю, когда в (5,1) будет $k = 0$. Фокус x будет тогда для $v = \text{const}$ неподвижным и без ограничения общности можно предположить, что соотношение (5,1) примет вид

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \, . \tag{5,6}$$

Так как (5,6) является единственным соотношением между точками (2,7), то

$$\left(x, \frac{\partial x}{\partial v}, y, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}\right) \neq 0 \, . \tag{5,7}$$

В частности имеем $\left(x \dfrac{\partial x}{\partial v}\right) \neq 0$; отсюда и из (5,6) следует, что фокус x опишет кривую D, которую мы назовем директирсой конгруэнции L; кривая D может быть прямой. Для каждого v поверхность R_v является конической поверхностью, вершиной которой будет соответствующий фокус x. Таким образом, конгруэнция L состоит из ∞^1 конических поверхностей R_v, вершины которых лежат на произвольной кривой D. Из неравенства (5,7) следует, что все линейчатые поверхности, принадлежащие L, за исключением конических поверхностей R_v, являются косыми линейчатыми поверхностями. Этого условия, вообще, достаточно для того, чтобы наступил рассматриваемый случай; исключение наступает тогда, если конические поверхности R_v сводятся к пучкам прямых; в таком случае нужно еще потребовать, чтобы пучок с центром x не содержал касательной к директрисе в точке x.

Следующие замечания относятся как к конгруэнциям с фокальной поверхностью F, так и к конгруэнциям с директрисой D. Те линейчатые поверхности, которые проходят через прямую p в особом направлении $\mathrm{d}v = 0$, не имеют в фокусе x определенной касательной плоскости, так как

$$\left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0\,. \tag{5,8}$$

Напротив, все остальные линейчатые поверхности конгруэнции L, проходящие через прямую p, имеют в фокусе x общую касательную плоскость

$$\left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial v}\right). \tag{5,9}$$

Плоскость (5,9) не совпадает с фокальной плоскостью (5,2); соединением этих двух плоскостей (5,2) и (5,9) является трехмерное пространство

$$\left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial v},\ \frac{\partial y}{\partial u}\right). \tag{5,10}$$

Согласно (5,8) касательное пространство (3,2) конгруэнции L в обыкновенном (неособом) направлении ($\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$) дано выражением

$$\left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial v},\ \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right); \tag{5,11}$$

оно отличается от пространства (5,10) и проходит через плоскость (5,9). Наоборот, каждое S_3, отличное от (5,10) и проходящее через плоскость (5,9), является касательным пространством конгруэнции L в одном и только в одном обыкновенном направлении. Согласно (5,8), касательное пространство (3,3) конгруэнции L в отличной от фокуса x точке (2,5) прямой p, имеет вид

$$\left(x,\ y,\ \frac{\partial y}{\partial u},\ \alpha\frac{\partial x}{\partial v} - \beta\frac{\partial y}{\partial v}\right); \tag{5,12}$$

оно отлично от пространства (5,10) и проходит через фокальную плоскость (5,2). Наоборот, каждое S_3, отличное от (5,10) и проходящее через плоскость (5,2), является касательным пространством конгруэнции L в одной и только в одной отличной от фокуса x точке прямой p.

Обратим еще внимание на то, что в случае фокальной поверхности (5,9) является касательной плоскостью фокальной поверхности F в точке x, а в случае директрисы плоскость (5,9) соединяет прямую p с касательной к директрисе D в точке x.

6. Приступим к случаю $m = 3$, т. е. к случаю, когда касательное пространство конгруэнции L имеет размерность 3. В этом пространстве S_3 лежат точки $x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y$, так что символическое уравнение

$$(x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = 0$$

сводится к одному скалярному уравнению

$$A\,\mathrm{d}u^2 + B\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + C\,\mathrm{d}v^2 = 0\,. \tag{6,1}$$

Мы различаем три случая: у *центральной конгруэнции* (6,1) является тождеством, у *параболической конгруэнции* (6,1) не представляет тождества, однако $B^2 - 4AC = 0$, и, наконец, у *непараболической конгруэнции* будет $B^2 - 4AC \neq 0$. В настоящем параграфе мы исследуем центральные конгруэнции.

Из определения центральной конгруэнции следует, что каждая линейчатая поверхность центральной конгруэнции L является развертывающейся. В частности, развертывающимися поверхностями будут все поверхности R_v, для которых $v = \mathrm{const}$, и все поверхности, для которых $u = \mathrm{const}$. Через каждую прямую p проходит одна поверхность R_v и одна поверхность R_u; докажем прежде всего, что обе эти поверхности имеют на прямой p одну и ту же особую точку. В противном случае можно было бы предположить, что x есть особая точка поверхности R_v, а y — особая точка поверхности R_u. Но тогда было бы

$$\left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0\,, \tag{6,2}$$

$$\left(x,\ y,\ \frac{\partial y}{\partial v}\right) = 0\,, \tag{6,3}$$

откуда было бы тождественно

$$(x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial v}\,,\ \frac{\partial y}{\partial u}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

и, следовательно, по определению центральной конгруэнции,

$$\left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial v}\,,\ \frac{\partial y}{\partial u}\right) = 0\,. \tag{6,4}$$

Однако, (6,2), (6,3) и (6,4) представляют собой три независимых линейных соотношения между точками (2,7), так что характер конгруэнции L был бы, в противоречии с предположением, $m = 2$.

Из доказанного следует, что можно предположить, что x является особой точкой обеих поверхностей R_v, R_u, т. е. что

$$\left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial u}\right) = \left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0\,. \tag{6,5}$$

Отсюда следует, однако, что

$$\left(x,\ \frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0\ ,$$

т. е. что точка x или неподвижна или описывает кривую. Но если бы точка x описывала кривую C, то из (6,5) вытекало бы, что каждая прямая (xy) является касательной к кривой C, которая имела бы, следовательно, ∞^2 различных касательных, что невозможно.

Итак, точка x неподвижна, так что все прямые конгруэнции L проходят через неподвижную точку, через *центр* конгруэнции. Наоборот, каждая система ∞^2 прямых, проходящих через неподвижную точку, является центральной конгруэнцией.

7. Обратимся к параболической конгруэнции L. Ясно, что параметры u, v можно выбрать так, чтобы уравнение (6,1) свелось к виду $\mathrm{d}v^2 = 0$. Поверхности R_v, для которых $v = \mathrm{const}$, будут, следовательно, развертывающимися поверхностями, и кроме этих поверхностей конгруэнция L уже не содержит никаких других развертывающихся поверхностей.

Можно предположить, что на каждой прямой p точка x будет особой точкой поверхности R_v, так что

$$\left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0\ . \tag{7,1}$$

Но тогда будет тождественно

$$(x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = \mathrm{d}v\left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial v},\ \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right),$$

а так как правая часть должна быть пропорциональна $\mathrm{d}v^2$, то будет

$$\left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial v},\ \frac{\partial y}{\partial u}\right) = 0\ . \tag{7,2}$$

Особая точка x поверхности R_v на прямой p называется *фокусом* прямой p, а особая плоскость

$$\left(x,\ y,\ \frac{\partial y}{\partial u}\right) \tag{7,3}$$

поверхности R_v называется *фокальной плоскостью* прямой p.

Заметим, что

$$\left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial v}\right) \neq 0\ , \tag{7,4}$$

ибо в противном случае мы имели бы (6,4), что, как известно, приводит к центральной конгруэнции. Уравнение (7,1) можно записать в виде

$$\frac{\partial x}{\partial u} = hx + ky\ , \tag{7,5}$$

а уравнение (7,2) [вследствие (7,4)] в виде

$$\frac{\partial y}{\partial u} = ay + b\frac{\partial x}{\partial v} + cx\,. \tag{7,6}$$

Так как $m = 3$, то (7,5) и (7,6) являются единственными соотношениями между точками (2,7).

Так же как и в параграфе 5, необходимо различать два случая, смотря по тому, будет ли в (7,5) $k \neq 0$ или $k = 0$. Если $k \neq 0$, то, так как кроме (7,5) и (7,6) не имеется никаких других соотношений между точками (2,7), будет

$$\left(x,\ \frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial x}{\partial v}\right) \neq 0,$$

а фокус x описывает поверхность F, которая называется *фокальной поверхностью* конгруэнции L. Ввиду того, что точку y можно заменить любой другой отличной от x точкой прямой p, можно предположить, что (7,5) имеет вид

$$y = \frac{\partial x}{\partial u}\,, \tag{7,7}$$

так что (7,6) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v} + cx\,. \tag{7,8}$$

При $v = \text{const}$ фокус x описывает кривую C_v на поверхности F, а развертывающаяся поверхность R_v является поверхностью касательных к кривой C_v, так что эта кривая не является прямой; отсюда следует, что в (7,8) будет

$$b \neq 0\,. \tag{7,9}$$

Фокальная плоскость (7,3) будет, согласно (7,7), соприкасающейся плоскостью кривой C_v и будет поэтому, в силу (7,8) и (7,9), одновременно касательной плоскостью к поревхности F, так что кривые C_v будут асимптотическими линиями фокальной поверхности F. Поверхность F не является плоскостью, так как в противном случае конгруэнция L лежала бы в плоскости F и было бы $m = 2$. Обратно, если в S_n ($n \geqq 3$) дана поверхность F и на ней система ∞^1 асимптотических C_v, не являющихся прямыми, то множество всех касательных ко всем кривым C_v будет параболической конгруэнцией с фокальной поверхностью F.

Остается случай, когда в (7,5) имеет место $k = 0$. Фокус x будет для $v = \text{const}$ неподвижным, но если менять v, то x не будет неподвижным (в противном случае мы получили бы центральную конгруэнцию). Итак, фокус x опишет кривую D, которую мы назовем *директрицой* конгруэнции

L; кривая D может быть и прямой. Без ограничения общности можно предположить, что соотношение (7,5) имеет вид

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0\,. \tag{7,10}$$

Фокальная плоскость не будет неопределенной [ибо при $\mathrm{d}v = 0$ не могут иметь места соотношения (2,8)], так что в (7,6) будет $b \neq 0$ и плоскость (7,3) можно записать в виде

$$\left(x,\ \frac{\partial x}{\partial v}\,,\ y\right); \tag{7,11}$$

эта плоскость содержит, следовательно, касательную $\left(x\,\frac{\partial x}{\partial v}\right)$ к кривой D в точке x и для $v = \mathrm{const}$ будет неподвижной, так как из (7,6) и (7,10) следует

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(x,\ \frac{\partial x}{\partial v}\,,\ y\right) = a\left(x,\ \frac{\partial x}{\partial v}\,,\ y\right);$$

при изменении v плоскость (7,11) не может остаться неподвижной, так как тогда было бы $m = 2$. Для каждого v поверхность R_v сводится к пучку прямых с центром x в плоскости (7,11). Обратно, возьмем произвольную кривую D (которая может быть и прямой) и каждой ее точке поставим в соответствие плоскость $\varphi(x)$, проходящую через касательную к кривой D в точке x; нужно, однако, исключить случай (возможный только для плоской кривой D) неподвижной плоскости $\varphi(x)$. Конгруэнция, составленная из ∞^1 пучков прямых с центрами x в плоскостях $\varphi(x)$ является параболической конгруэнцией с директрисой D; точки x суть фокусы, плоскости $\varphi(x)$ — фокальные плоскости.

8. Обратимся к непараболической конгруэнции L. В (6,1) в этом случае будет $B^2 - 4AC \neq 0$. Конгруэнция L называется *гиперболической*, если $B^2 - 4AC > 0$, *эллиптической*, если $B^2 - 4AC < 0$. Мы ограничимся в тексте разбором гиперболических конгруэнций. Если допустить мнимые величины, то наши результаты справедливы и для эллиптических конгруэнций; мы не будем, однако, переписывать формулы, касающиеся эллиптических конгруэнций, в действительной форме, предоставляя это читателю.

В случае гиперболической конгруэнции можно подобрать параметры u, v так, что уравнения (6,1) сведутся к виду $\mathrm{d}u\,.\,\mathrm{d}v = 0$. Это значит, однако, что

$$\left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial u}\,,\ \frac{\partial y}{\partial u}\right) = \left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial v}\,,\ \frac{\partial y}{\partial v}\right) = 0\,,$$

т. е. что линейчатые поверхности R_v, для которых $v = \mathrm{const}$, и линейчатые поверхности R_u, для которых $u = \mathrm{const}$, будут развертывающимися поверхностями; кроме поверхностей R_v и R_u конгруэнция L не содержит никаких других развертывающихся поверхностей. Через каждую прямую p проходит одна поверхность R_v и одна поверхность R_u; если бы для каждой p обе эти поверхности имели на прямой p одну и ту же особую точку, то можно было бы предположить, что это точка x. Тогда имело бы, однако, место (6,4), что теперь невозможно, так как нам известно, что (6,4) может иметь место только для центральной конгруэнции. Можно поэтому предположить, что на каждой прямой p точка x является особой точкой поверхности R_v, а точка y — особой точкой поверхности R_u. Точки x, y мы назовем *фокусами* прямой p; точка x является *первым фокусом*, точка y — *вторым фокусом*.

Имеем

$$\left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial u}\right) = \left(x,\ y,\ \frac{\partial y}{\partial v}\right) = 0\ ; \tag{8,1}$$

напротив, имеет место

$$\left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial v}\right) \neq 0 \neq \left(x,\ y,\ \frac{\partial y}{\partial u}\right), \tag{8,2}$$

так как (2,8) не справедливо ни для $\mathrm{d}u = 0$, ни для $\mathrm{d}v = 0$. Плоскость

$$\left(x,\ y,\ \frac{\partial y}{\partial u}\right) \tag{8,3}$$

является особой плоскостью поверхности R_v; плоскость

$$\left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial v}\right) \tag{8,4}$$

является особой плоскостью поверхности R_u. Плоскости (8,3) и (8,4) назовем *фокальными плоскостями* прямой p; (8,3) является *первой фокальной плоскостью*, (8,4) — *второй фокальной плоскостью;* мы будем также говорить, что (8,3) есть *фокальная плоскость*, *соответствующая фокусу* x и что (8,4) представляет *фокальную плоскость*, *соответствующую фокусу* y.

Из (8,1) следует, что можно положить

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= a_1 x + a y\ , \\ \frac{\partial y}{\partial v} &= b x + b_1 y\ . \end{aligned} \tag{8,5}$$

Согласно (8,5), будет

$$\begin{aligned} \left(x\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) &= a\left(xy\,\frac{\partial x}{\partial v}\right), \\ \left(y\,\frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial v}\right) &= b\left(xy\,\frac{\partial y}{\partial u}\right), \end{aligned} \tag{8,6}$$

так что, согласно (8,2), точка x описывает поверхность F_1 в случае $a \neq 0$, а кривую D_1 в случае $a = 0$; аналогично y описывает поверхность F_2 в случае $b \neq 0$, а кривую D_2 в случае $b = 0$. Поверхности F_1, F_2 (если они существуют) называются *фокальными поверхностями* конгруэнции L; кривые D_1, D_2 (если они существуют) называются *директрисами* конгруэнции L.

В общем имеется три типа гиперболических конгруэнций. Во-первых, рассмотрим случай $ab \neq 0$ конгруэнции L с двумя различными фокальными поверхностями F_1, F_2. Прямая p касается поверхности F_1 в фокусе x, а поверхности F_2 в фокусе y. Для $v = \text{const}$ прямая p описывает поверхность R_v, касающуюся поверхности F_1 вдоль кривой C_v и поверхности F_2 вдоль кривой Γ_v; R_v есть поверхность касательных к кривой C_v. Для $u = \text{const}$ прямая p описывает поверхность R_u, касающуюся поверхности F_1 вдоль кривой Γ_u и поверхности F_2 вдоль кривой C_u; R_u есть поверхность касательных к кривой C_u. Кривые C_v и Γ_u образуют сопряженную сеть на поверхности F_1; кривые C_u и Γ_v образуют сопряженную сеть на поверхности F_2. Из (8,5) следует

$$\begin{aligned} \left(x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) &= a^2 \left(xy \frac{\partial y}{\partial u}\right), \\ \left(y \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right) &= -b^2 \left(xy \frac{\partial x}{\partial v}\right). \end{aligned} \tag{8,7}$$

Фокальная плоскость (8,3), соответствующая фокусу x, является, согласно (8,6), касательной плоскостью поверхности F_2 в точке y и, согласно (8,7), — соприкасающейся плоскостью кривой C_v в точке x; точно так же фокальная плоскость (8,4), соответствующая фокусу y, является касательной плоскостью к поверхности F_1 в точке x и соприкасающейся плоскостью кривой C_u в точке y.

Во-вторых, рассмотрим случай $a \neq 0 = b$ конгруэнции L с фокальной поверхностью F_1 и директрисой D_2, которая может быть и прямой. (Случай $a = 0 \neq b$ отличается от данного только формально и его можно оставить в стороне.) Прямая p касается поверхности F_1 в фокусе x и пересекает кривую D_2 в точке y; прямая p не может касаться кривой D_2. При $v = \text{const}$ прямая p описывает поверхность R_v, которая проходит через кривую D_2 и касается поверхности F_1 вдоль кривой C_v; R_v есть поверхность касательных к кривой C_v. При $u = \text{const}$ прямая p описывает поверхность R_u; это коническая поверхность с вершиной y (которая лежит на кривой D_2 и для $u = \text{const}$ неподвижна), касающаяся поверхности F_1 вдоль кривой Γ_u. Кривые C_v и Γ_u образуют сопряженную сеть на поверхности F_1. Фокальная плоскость (8,3), отвечающая фокусу x, соединяет прямую p с касательной к кривой D_2 в точке y и является соприкасающейся плоскостью кривой

C_v в точке x. Фокальная плоскость (8,4), отвечающая фокусу y, *является касательной плоскостью к поверхности F_1* в точке x *и касательной плоскостью к конической поверхности R_u* вдоль прямой p.

В-третьих, рассмотрим случай $a = b = 0$ конгруэнции L с двумя директрисами D_1, D_2; одна или другая директирса (или даже обе) может быть прямой. Прямая p пересекает кривую D_1 в точке x и кривую D_2 в точке y; прямая p не касается ни одной из кривых D_1, D_2. Фокус x неподвижен для $v = \text{const.}$; фокус y неподвижен для $u = \text{const}$. При $v = \text{const.}$ прямая p описывает коническую поверхность R_v с вершиной в фокусе x, проходящую через кривую D_v. При $u = \text{const}$ прямая p описывает коническую поверхность R_u с вершиной в фокусе y, проходящую через кривую D_1. Фокальная плоскость (8,3), отвечающая фокусу x, соединяет прямую p с касательной к кривой D_2 в точке y и является касательной плоскостью к конической поверхности R_v вдоль прямой p. Фокальная плоскость (8,4), отвечающая фокусу y, соединяет прямую p с касательной к кривой D_1 в точке x и является касательной плоскостью к конической поверхности R_u вдоль прямой p.

Возвратимся к случаю $ab \neq 0$ конгруэнции L с двумя фокальными поверхностями F_1, F_2. Возьмем произвольные, но фиксированные значения u_0, v_0 параметров u, v. Прямая $p_0 = p(u_0, v_0)$ касается в точке $x_0 = x(u_0, v_0)$ кривой C_{v_0}, образованной точкой $x(u, v_0)$, зависящей от параметра u; та же прямая p_0 касается в точке $y_0 = y(u_0, v_0)$ кривой C_{u_0}, образованной точкой $y(u_0, v)$, зависящей от параметра v. Итак, на прямой p_0 можно выбрать точку $X(u)$, зависящую от параметра u и точку $Y(v)$, зависящую от параметра v, так, что для $u = u_0$ в точке x_0 будет иметь место аналитическое касание первого порядка между кривыми C_{v_0} и $\{X(u)\}$ и что для $v = v_0$ в точке y_0 будет иметь место аналитическое касание первого порядка между кривимы C_{u_0} и $\{Y(v)\}$. В окрестности значений u_0, v_0 для $u \neq u_0$, $v \neq v_0$

$$x_0, y_0, X(u), Y(v)\,, \tag{8,8}$$

являются четырьмя различными точками на прямой p_0. Ангармоническое отношение точек (8,8) обозначим через $d(u, v)$. Легко обнаружить, что $d(u, v)$ равняется степенному ряду

$$d(u, v) = a_0 b_0 (u - u_0)(v - v_0) + \ldots\,,$$

где $a_0 = a(u_0, v_0)$, $b_0 = b(u_0, v_0)$ и где отброшены члены по крайней мере третьего порядка относительно $u - u_0$, $v - v_0$. Отсюда следует (мы пишем снова u, v вместо u_0, v_0), что *квадратическая дифференциальная форма*

$$ab\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{8,9}$$

является *проективным инвариантом конгруэнции L с двумя различными фокальными поверхностями*. Форму (8,9) мы назовем *формой Лапласа-Дарбу* конгруэнции L.

Замечание 1. Изложенное геометрическое истолкование дифференциальной формы (8,9) было дано А. Террачини в 1927 г. [A. Terracini, *Un' osservazione sugli invarianti di un'equazione di Laplace*, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana 6*, 1927, стр. 57—60.] Мне представлялось целесообразным перевести интуитивные выражения бесконечно-малых, которыми пользуется Террачини, на современный математический язык, применяемый теперь в подавляющем большинстве математических наук, хотя перевод этот тривиален и несомненно длиннее, чем оригинал, использующий терминологию бесконечно малых.

Замечание 2. В классической теории линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} = A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v} + Cz \tag{8,10}$$

выражения

$$h = C + AB - \frac{\partial A}{\partial u}, \tag{8,11}$$

$$k = C + AB - \frac{\partial B}{\partial v} \tag{8,12}$$

называются *инвариантами Лапласа-Дарбу*; (8,11) является *первым*, а (8,12) *вторым* инвариантом Лапласа-Дарбу уравнения (8,10). Выражения (8,11) и (8,12) инвариантны относительно преобразований вида

$$z_1 = \varrho(u, v) \, . \, z\,, \tag{8,13}$$

не являются, однако, инвариантными относительно преобразований вида

$$u_1 = \varphi(u)\,, \quad v_1 = \psi(v)\,. \tag{8,14}$$

Напротив, дифференциальные формы

$$h\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\,, \quad k\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \tag{8,15}$$

инвариантны относительно обеих преобразований (8,13) и (8,14). Вошло в традицию связывать выражения (8,11) и (8,12) или дифференциальные формы (8,15) с сопряженной сетью $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ на поверхности, образованной точкой $z = z(u, v)$. По моему мнению, уже давно пора отказаться от этой терминологии и связывать форму $h\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$ и ее коэффициент h с конгруэнцией, образованной прямой $\left(z\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)$, а форму $k\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$ с конгруэнцией, образованной прямой $\left(z\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)$. [См. Фубини-Чех (Fubini-Čech), *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*, Париж 1931, стр. 148—150.] Если $ab \neq 0$, то из (8,5) следует, во-первых,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \left(\frac{\partial \log a}{\partial v} + b_1\right)\frac{\partial x}{\partial u} + a_1\frac{\partial x}{\partial v} + \left(ab - a_1 b_1 + \frac{\partial a_1}{\partial v} - a_1\frac{\partial \log a}{\partial v}\right)x\,, \tag{8,16}$$

во-вторых,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = b_1 \frac{\partial y}{\partial u} + \left(\frac{\partial \log b}{\partial u} + a_1\right) \frac{\partial y}{\partial v} + \left(ab - a_1 b_1 + \frac{\partial b_1}{\partial u} - b_1 \frac{\partial \log b}{\partial u}\right) y\,. \qquad (8,17)$$

Сравнение (8,10) и (8,16) приводит нас к подстановке

$$A = \frac{\partial \log a}{\partial v} + b_1\,, \quad B = a_1\,, \quad C = ab - a_1 b_1 + \frac{\partial a_1}{\partial v} - a_1 \frac{\partial \log a}{\partial v}\,,$$

которая, согласно (8,12), дает $k\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = ab\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$; сравнение (8,10) и (8,17) приводит к подстановке

$$A = b_1\,, \quad B = \frac{\partial \log b}{\partial u} + a_1\,, \quad C = ab - a_1 b_1 + \frac{\partial b_1}{\partial u} - b_1 \frac{\partial \log b}{\partial u}\,,$$

которая, согласно (8,11), дает $h\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = ab\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$.

9. Остается разобрать случай, когда характер конгруэнции L $m = 2$. Этот случай наверное наступит тогда, когда все прямые конгруэнции L лежат в неподвижной плоскости. Докажем, что только в этом случае $m = 2$. При данных u, v все точки (2,7) лежат по предположению в плоскости $\varrho = \varrho(u, v)$. Нужно доказать, что плоскость ϱ не зависит от u, v. Заметим прежде всего, что все лучи конгруэнции L не могут проходить через неподвижную точку, ибо этот случай центральной конгруэнции, в котором обязательно $m = 3$. Из предположения $m = 2$ следует, что все линейчатые поверхности, входящие в конгруэнцию L, будут развертывающиеся поверхности. В частности, развертывающимися будут все поверхности $v = \mathrm{const}$ и все поверхности $u = \mathrm{const}$. Невозможно, чтобы для каждой пары u, v особая точка поверхности $v = \mathrm{const}$ совпадала с особой точкой поверхности $u = \mathrm{const}$, ибо в параграфе 6 [см. (6,4)] мы убедились, что это приводит к центральной конгруэнции. Итак, мы можем предположить, что для каждой пары u, v точка x будет особой точкой поверхности $v = \mathrm{const}$, а y — особой точкой поверхности $u = \mathrm{const}$, так что

$$\left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial u}\right) = \left(x,\ y,\ \frac{\partial y}{\partial v}\right) = 0\,. \qquad (9,1)$$

Так как (2,8) не может иметь места ни для $\mathrm{d}v = 0$, ни для $\mathrm{d}u = 0$, получим

$$\left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial v}\right) \neq 0 \neq \left(x,\ y,\ \frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

и, следовательно,

$$\varrho = \alpha \left(x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

$$\varrho = \beta \left(x,\ y,\ \frac{\partial y}{\partial v}\right), \qquad (9,2)$$

так как все точки (2,7) лежат в плоскости ϱ. Согласно (9,1), будет

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a_1 x + a y \,, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = b x + b_1 y \,,$$

так что и точки $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v}$, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial u \, \partial v}$ лежат в плоскости ϱ. Но отсюда следует, согласно (9,2), что плоскость ϱ неподвижна.

10. Под *преобразованием линейчатой поверхности* R мы разумеем правило $\boldsymbol{\varphi}$, относящее каждой прямой p поверхности R определенную прямую p'; образы p' всех прямых p образуют линейчатую поверхность R'. Аналитически преобразование $\boldsymbol{\varphi}$ задается тем, что обе прямые p, p' выражаются в виде функций одного и того же параметра t:

$$p = p(t) \,, \quad p' = p'(t) \,. \tag{10,1}$$

Предположим, что соответствие $\boldsymbol{\varphi}$ между p, p' является (хотя бы локально) взаимно-однозначным. Пусть поверхность R лежит в проективном пространстве S_n, поверхность R' в проективном пространстве S'_ν. Если $n \neq \nu$, то подберем r так, что бы было $r \geqq n$, $r \geqq \nu$, и погрузим S_n в пространство S_r, S'_ν — в пространство S'_r той же размерности r. Мы говорим, что $\boldsymbol{\varphi}$ является *точечным изгибанием линейчатой поверхности* R, если соответствие $\boldsymbol{\varphi}$ между ∞^1 прямых на поверхностях R, R' можно расширить на соответствие $\boldsymbol{\varphi}^*$ между ∞^2 точек поверхностей R, R' так, что для каждого t существует коллинейное соотношение

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(t) \tag{10,2}$$

между пространствами S_r, S_r обладающее тем свойством, что, если C — произвольная кривая на поверхности R, и если она пересекает прямую p, отвечающую рассматриваемому значению параметра t, в точке z, то преобразованные кривые $\boldsymbol{\varphi}^* C$, $\boldsymbol{H} C$ претерпевают в точке $\boldsymbol{\varphi}^* z = \boldsymbol{H} z$ аналитическое касание первого порядка. Ясно, что для каждого t соответствие $\boldsymbol{\varphi}^*$ определяет *проективное соответствие*

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}(t) \tag{10,3}$$

между точками z прямой p и точками $\boldsymbol{\varphi}^* z = \boldsymbol{\pi} z$ прямой $p' = \boldsymbol{\varphi} p$. На прямой $p(t)$ можно подобрать точки

$$x = x(t) \,, \quad y = y(t)$$

и на прямой p' точки

$$x' = x'(t) \,, \quad y' = y'(t)$$

так, что

$$x' = \boldsymbol{\pi} x \,, \quad y' = \boldsymbol{\pi} x \,. \tag{10,4}$$

Если это так, то нетрудно доказать, что преобразование $\boldsymbol{\varphi}^*$, которое получается соединением всех ∞^1 проективных соответствий (10,3), обладает требуемым свойством тогда и только тогда, если при подходящем $\vartheta = \vartheta(t)$ для каждого t уравнения

$$\mathbf{K}x = x' , \quad \mathbf{K}y = y' , \tag{10,5}$$
$$\mathbf{K}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}x' + \vartheta x , \quad \mathbf{K}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}y' + \vartheta y$$

определяют коллинейное отображение касательного пространства поверхности R вдоль прямой $p(t)$, данного точками

$$x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y \ , \tag{10,6}$$

на касательное пространство поверхности R' вдоль соответствующей прямой $p'(t)$, данное точками

$$x', y', \mathrm{d}x', \mathrm{d}y'. \tag{10,7}$$

Коллинейное соответствие (10,2) является тогда совершенно произвольным расширением коллинейного соответствия (10,5), которое мы назовем *касательной коллинеацией* рассматриваемого точечного изгибания.

Если поверхность R — косая, то и R' должна быть косая. Каждое преобразование $\boldsymbol{\varphi}$ косой линейчатой поверхности R в косую же поверхность R' является точечным изгибанием. При данном t проективное соответствие $\boldsymbol{\pi}$ произвольно, следовательно, при каждом t оно зависит от трех произвольных параметров. При выбранных проективных соответствиях $\boldsymbol{\pi}$ коллинеация $\mathbf{K}$ зависит при каждом t еще от одного произвольного параметра.

Преобразование $\boldsymbol{\varphi}$ развертывающейся поверхности R в развертывающуюся же поверхность R' является проективным изгибанием тогда и только тогда, если обе поверхности R, R' представляют собой или поверхности касательных или (обе же) конические поверхности. Если это условие выполнено, то при данном t проективное соответствие $\boldsymbol{\pi}$ подчиняется тому условию, что переводит особую точку прямой p в особую же точку прямой p', следовательно, зависит при каждом t от двух произвольных параметров. При выбранных проективных соответствиях $\boldsymbol{\pi}$ коллинеации $\mathbf{K}$ определяются однозначно.

11. Под *преобразованием конгруэнции* L мы разумеем правило $\mathbf{T}$, которое каждой прямой p конгруэнции L относит определенную прямую p'; образы p' всех прямых p образуют конгруэнцию L'. Аналитически преобразование $\mathbf{T}$ задается тем, что обе прямые p, p' выражаются в виде функций двух параметров u, v, общих для обеих прямых:

$$p = p(u, v) \ , \quad p' = p'(u, v) \ . \tag{11,1}$$

Мы предполагаем, что соответствие $\mathbf{T}$ между p, p' является (хотя бы локально) взаимно однозначным.

Если бы характер m конгруэнции L равнялся 2, то вся L была бы частью неподвижной плоскости и через точку произвольно выбранную на любом луче конгруэнции L, проходило бы бесконечное число прямых конгруэнции. Этот случай мы исключаем, так что характер m конгруэнции L

будет $\geqq 3$; то же предположение мы сделаем и относительно конгруэнции L'. Множество V_3 всех точек на всех лучах конгруэнции L, равно как и множество V_3' всех точек на всех лучах конгруэнции L', является, следовательно, трехмерным многообразием. Через каждую точку многообразия V_3 проходит (хотя бы локально) только один луч конгруэнции L и, аналогично, через точку многообразия V_3' проходит только один луч конгруэнции L'.

Пусть конгруэнция L (а значит и многообразие V_3) лежит в проективном пространстве S_n и пусть L' (а значит и V_3') лежит в проективном пространстве S_ν'. Если $n \neq \nu$, подберем r так, что бы было $r \geqq n$, $r \geqq \nu$ и погрузим S_n в пространство S_r, S_ν' в пространство S_r' той же размерности r. Мы скажем, что $\mathbf{T}$ является *точечным изгибанием конгруэнции* L, если соответствие $\mathbf{T}$ между ∞^2 лучей конгруэнций L, L' можно расширить на соответствие $\mathbf{T}^*$ между ∞^3 точек многообразий V_3, V_3' так, что для любых u, v существует коллинейное соответствие

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(u, v) \tag{11,2}$$

между пространствами S_r, S_r' с тем свойством, что если C — произвольная кривая на многообразии V и если она пересекает прямую p, отвечающую рассматриваемым значениям u, v, в точке z, то преобразованные кривые $\mathbf{T}^*C$, $\mathbf{H}C$ претерпевают в точке $\mathbf{T}^*z = \mathbf{H}z$ аналитическое касание первого порядка. Ясно, что для каждой пары u, v соответствие $\mathbf{T}^*$ определяет *проективное соответствие*

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}(u, v) \tag{11,3}$$

между точками z прямой p и точками $\mathbf{T}^*z = \boldsymbol{\pi}z$ прямой $p' = \mathbf{T}p$. Мы скажем, что проективные соответствия (11,3) *осуществляют* точечное изгибание. На прямой $p(u, v)$ можно выбрать точки

$$x = x(u, v)\ , \quad y = y(u, v),$$

а на прямой p' точки

$$x' = x'(u, v)\ , \quad y' = y'(u, v)$$

так, что

$$x' = \boldsymbol{\pi}x\ , \quad y' = \boldsymbol{\pi}y\ . \tag{11,4}$$

Если это так, то преобразование $\mathbf{T}^*$, которое получается соединением всех ∞^2 проективных соответствий (11,3), обладает требуемым свойством тогда и только тогда, если при подходящих $c_1 = c_1(u, v)$, $c_2 = c_2(u, v)$ для любых u, v уравнения

$$\begin{aligned}
&\mathbf{K}x = x'\ , && \mathbf{K}y = y'\ ,\\
&\mathbf{K}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial u} + c_1x'\ , && \mathbf{K}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial u} + c_1y'\ ,\\
&\mathbf{K}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x'}{\partial v} + c_2x'\ , && \mathbf{K}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y'}{\partial v} + c_2y'
\end{aligned} \tag{11,5}$$

определяют коллинейное отображение касательного пространства конгруэнции L вдоль прямой $p(u, v)$, данного точками

$$x,\ y,\ \frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial x}{\partial v},\ \frac{\partial y}{\partial v}, \tag{11,6}$$

на касательное пространство конгруэнции L' вдоль соответствующей прямой $p'(u, v)$, данное точками

$$x',\ y',\ \frac{\partial x'}{\partial u},\ \frac{\partial y'}{\partial u},\ \frac{\partial x'}{\partial v},\ \frac{\partial y'}{\partial v}. \tag{11,7}$$

Коллинейное соответствие (11,2) является тогда совершенно произвольным расширением коллинейного соответствия (11,5), которое мы назовем *касательной коллинеацией* рассматриваемого точечного изгибания.

Рассмотрим теперь один за другим отдельные типы найденных в предыдущих параграфах конгруэнций.

12. Если характер конгруэнции L равен 5, то точки (11,6) являются линейно независимыми. Для существования коллинеации (11,5) необходимо, чтобы и точки (11,7) были линейно независимы, т. е. характер конгруэнции L' также должен равняться 5. При соблюдении этого условия любое преобразование $\boldsymbol{T}$ между L и L' будет точечным изгибанием. При данных u, v проективное соответствие не подчиняется никакому условию, а поэтому зависит для любых u, v от трех параметров. При выбранных проективных соответствиях $\boldsymbol{\pi}$ коллинеация $\boldsymbol{K}$ зависит при любых u, v от двух дополнительных параметров.

13. Пусть характер конгруэнции L равен 4 и пусть все линейчатые поверхности конгруэнции L — косые. Тогда можно [см. (4,3)] подобрать точки x, y так, что

$$\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v} = ax + by\,; \tag{13,1}$$

(13,1) является единственным соотношением, связывающим точки (11,6). Для существования коллинеации $\boldsymbol{K}$ необходимо, чтобы и точки (11,7) были связаны одним (и только одним) линейным соотношением, причем это соотношение должно иметь вид

$$\frac{\partial x'}{\partial u} - \frac{\partial y'}{\partial v} = a'x' + b'y'. \tag{13,2}$$

Отсюда следует, что характер конгруэнции L' также равен 4 и что все линейчатые поверхности из L' — косые. При соблюдении этого условия любое преобразование $\boldsymbol{T}$ между L и L' будет точечным изгибанием; проективные соответствия $\boldsymbol{\pi}$ и коллинеация $\boldsymbol{K}$ определяются однозначно. Если имеет место (13,1) и (13,2), то $\boldsymbol{\pi}$ должно иметь вид (11,4), а $\boldsymbol{K}$ должно иметь вид

$$\mathbf{K}x = x', \qquad \mathbf{K}y = y',$$

$$\mathbf{K}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial u} - (a' - a)\,x', \quad \mathbf{K}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial u} - (a' - a)\,y',$$

$$\mathbf{K}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x'}{\partial v} + (b' - b)\,x', \quad \mathbf{K}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y'}{\partial v} + (b' - b)\,y'.$$

14. Пусть характер конгруэнции L равен 4 и пусть L имеет фокальную поверхность F. Тогда можно [см. (5,4)] подобрать точки x, y так, что

$$y = \frac{\partial x}{\partial u}; \tag{14,1}$$

фокальная поверхность есть геометрическое место точек x, и (14,1) представляет единственное соотношение между точками (11,6). Для существования коллинеации $\mathbf{K}$ необходимо, чтобы и точки (11,7) были связаны одним (и только одним) линейным соотношением, причем это соотношение должно иметь вид

$$y' = \frac{\partial x'}{\partial u} + ax'. \tag{14,2}$$

Отсюда следует, что характер конгруэнции L' также равен 4 и что эта конгруэнция имеет фокальную поверхность F'. При соблюдении этого условия преобразование $\mathbf{T}$ между L и L' будет точечным изгибанием тогда и только тогда, если развертывающимся поверхностям конгруэнции L при $\mathbf{T}$ соответствуют развертывающиеся же поверхности конгруэнции L'. Параметры u, v мы можем подобрать так, что для $v = \text{const}$ получим в конгруэнции L развертывающиеся поверхности R_v, касающиеся фокальной поверхности F вдоль кривых C_v, а в конгруэнции L' — развертывающиеся поверхности R'_v, касающиеся фокальной поверхности F' вдоль кривых C'_v. Далее можно предположить, что точка x является фокусом на прямой p, и что точка x' является фокусом на прямой p'. Проективное соответствие $\boldsymbol{\pi}$ подчиняется не только условию, что $\boldsymbol{\pi}x = x'$, но также дополнительному условию, которое можно выразить так, что проективное соответствие $\boldsymbol{\pi}$ можно расширить на коллинейное отображение $S_r \to S'_r$, осуществляющее аналитическое касание первого порядка между кривыми C_v и C'_v. Вследствие этого проективное соответствие $\boldsymbol{\pi}$ зависит при данных u, v только от одного параметра. Можно предположить, что имеет место соотношение (14,1) и что проективное соответствие $\boldsymbol{\pi}$ дано уравнениями (11,4). Если это так, то необходимо имеет место соотношение вида (14,2) и при данных u, v коллинеация $\mathbf{K}$ зависит от одного дополнительного параметра c и имеет вид

$$\mathbf{K}x = x', \quad \mathbf{K}y = y', \quad \mathbf{K}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial u} + ay',$$

$$\mathbf{K}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x'}{\partial v} + cx', \quad \mathbf{K}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y'}{\partial v} + cy'.$$

15. Пусть характер конгруэнции L равен 4 и пусть L имеет директрису D. Тогда можно [см. (5,6)] подобрать точку x так, что

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \; ; \tag{15,1}$$

директриса D есть геометрическое место точек x и (15,1) представляет единственное соотношение между точками (11,6). Для существования коллинеации $\mathbf{K}$ необходимо, чтобы и точки (11,7) были связаны одним (и только одним) соотношением, причем это соотношение должно иметь вид

$$\frac{\partial x'}{\partial u} + ax' = 0 \, .$$

Отсюда следует, что характер конгруэнции L' также равен 4 и что эта конгруэнция имеет директрису D'. При соблюдении этого условия преобразование $\mathbf{T}$ между L и L' будет точечным изгибанием тогда и только тогда, если коническим поверхностям конгруэнции L соответствуют конические же поверхности конгруэнции L'. Параметры u, v можно подобрать так, что для $v = \text{const}$ получим в конгруэнции L конусы R_v, а в конгруэнции L' — конусы R'_v. Далее можно предположить, что директриса D является геометрическим местом точек x и что директриса D' является геометрическим местом точек x'. Множители однородных координат точек x, x' можно выбрать так, что

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \, , \quad \frac{\partial x'}{\partial u} = 0 \, . \tag{15,2}$$

Проективное соответствие $\boldsymbol{\pi}$ подчиняется тому условию, что точка x (вершина конуса R_v) переходит в точлу x' (вершину конуса R'_v); при данных u, v соответствие $\boldsymbol{\pi}$ зависит еще от двух параметров. Если проективные соотношения $\boldsymbol{\pi}$ выбраны, то при данных u, v коллинеация $\mathbf{K}$ зависит еще от одного параметра. Если имеет место (11,4) и (15,2), то $\mathbf{K}$ имеет вид (с произвольным c)

$$\mathbf{K}x = x' \, , \quad \mathbf{K}y = y' \, , \quad \mathbf{K}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial u} \, ,$$

$$\mathbf{K}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x'}{\partial v} + cx' \, , \quad \mathbf{K}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y'}{\partial v} + cy' \, .$$

16. Пусть L — центральная конгруэнция, так что характер $m = 3$. Можно предположить, что x есть центр конгруэнции L и что

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial v} = 0 \; ; \tag{16,1}$$

кроме (16,1) нет никаких других соотношений между точками (11,6). Для существования коллинеации $\mathbf{K}$ точки (11,7) должны быть связаны в точности двумя линейными соотношениями и эти соотношения должны иметь вид

$$\frac{\partial x'}{\partial u} + ax' = \frac{\partial x'}{\partial v} + bx' = 0 .$$

Отсюда следует, что и L' будет центральной конгруэнцией. Если это так, то произвольное преобразование между L и L' является точечным изгибанием. Можно предположить, что имеет место (16,1) и

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial v} = 0 , \tag{16,2}$$

так что x есть центр конгруэнции L, а x' — центр конгруэнции L'. Проективное соотношение $\boldsymbol{\pi}$ подчиняется только тому условию, что переводит центр x в центр x', так что при данных u, v соответствие $\boldsymbol{\pi}$ зависит от двух параметров. При данных $\boldsymbol{\pi}$ однозначно определяются и $\mathbf{K}$. Если имеет место (11,4), (16,1) и (16,2), получаем

$$\mathbf{K}x = x' , \quad \mathbf{K}y = y' , \quad \mathbf{K}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial u} , \quad \mathbf{K}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y'}{\partial v} .$$

17. Пусть L — параболическая конгруэнция с фокальной поверхностью F; следовательно, L есть множество касательных к системе ∞^1 кривых на F, которые не являются прямыми и представляют асимптотические линии на F. Если $L \to L'$ является точечным изгибанием, то и L' будет параболической конгруэнцией; следовательно, L' есть множество касательных к системе ∞^1 кривых на фокальной поверхности F', которые не являются прямыми и представляют асимптотические линии на F'. Точечное изгибание определяет соответствие $F \to F'$, в котором упомянутые асимптотические линии отвечают одни другим. Наоборот, пусть дана в пространстве S_r поверхность F, образованная точкой $x(u, v)$, а в пространстве S'_r поверхность F', образованная точкой $x'(u, v)$; параметры u, v определяют преобразование $\boldsymbol{\varphi}$ между F и F', в котором отвечают одни другим кривые C_v и C'_v, определенные соотношением $v = \text{const}$; пусть C_v — асимптотические на F, C'_v – асимптотические на F' и ни C_v, ни C'_v не являются прямыми. Преобразованием $\boldsymbol{\varphi}$ определяется преобразование $\mathbf{T}$ между параболической конгруэнцией L касательных к кривым C_v (ее фокальной поверхностью является F) и параболической конгруынцией L' касательных к кривым C'_v (ее фокальной поверхностью является F'). Преобразование $\mathbf{T}$ будет точечным изгибанием тогда и только тогда, если $\boldsymbol{\varphi}$ является (в смысле, который будет пояснен) *проективным полуизгибанием*. Во всяком случае для любых данных u, v существуют коллинеации $\mathbf{H} = \mathbf{H}(u, v)$ между S_r и S'_r, которые для рассматриваемых u, v осуществляют аналитическое касание первого порядка между поверхностями F и F'; такие коллинеации мы назовем *касательными коллинеациями* преобразования $\boldsymbol{\varphi}$. Коллинеация

$\mathbf{H}$ между S_r и S'_r будет в этом смысле касательной коллинеацией тогда и только тогда, если существуют такие $\alpha = \alpha(u, v)$, $\beta = \beta(u, v)$, что

$$\mathbf{H}x = x' , \quad \mathbf{H}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial u} + \alpha x' , \quad \mathbf{H}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x'}{\partial v} + \beta x' . \tag{17,1}$$

Касательную коллинеацию $\mathbf{H}$ мы назовем *слабо полусоприкасающейся*, если для рассматриваемых u, v она осуществляет геометрическое касание второго порядка между кривыми C_v, C'_v, и *сильно полусоприкасающейся*, если для рассматриваемых u, v она осуществляет аналитическое касание второго порядка между кривыми C_v, C'_v. Если для некоторых u, v одна из касательных коллинеаций $\mathbf{H}(u, v)$ является слабо полусоприкасающейся, то и все $\mathbf{H}(u, v)$ будут слабо полусоприкасающимися; если это имеет место для любых u, v, то мы говорим, что преобразование $\boldsymbol{\varphi}$ является проективным полуизгибанием. Если это так, то вопрос о том, будет ли $\mathbf{H}$ сильно полусоприкасающейся коллинеацией или нет, решается только в зависимости от коэффициента α в (17,1); для произвольных u, v можно определить α одним и только одним способом так, чтобы $\mathbf{H}$ была сильно полусоприкасающейся. Если $\boldsymbol{\varphi}$ — проективное полуизгибание, то соответствующее преобразование $\mathbf{T}$ между конгруэнциями L, L' будет точечным изгибанием. Проективные соответствия $\boldsymbol{\pi}$ и коллинеации $\mathbf{K}$ определяются однозначно; проективные соответствия $\boldsymbol{\pi}$ обладают тем характерным свойством, что их можно расширить на сильно полусоприкасающиеся $\mathbf{H}$.

Аналитически дело выглядит так. Пусть F — поверхность, образованная точкой $x(u, v)$ так, что кривые $v = \text{const}$ — асимптотические и не являются прямыми. Тогда мы имеем в точности одно уравнение вида

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v} + cx , \tag{17,2}$$

где

$$a = a(u, v) , \quad b = b(u, v) , \quad c = c(u, v) ,$$

причэм обязательно будет

$$b \neq 0 . \tag{17,3}$$

Если вместо $x(u, v)$ подставить $\varrho(u, v) . x(u, v)$, где $\varrho(u, v) \neq 0$ есть скаляр, то коэффициент b останется без изменения. Если вместо параметров u, v ввести новые параметры u_1, v_1 при помощи уравнений

$$u_1 = f(u, v) , \quad v_1 = g(v) , \tag{17,4}$$

где должно быть

$$\frac{\partial f}{\partial u} \neq 0 \neq g'(v) ,$$

то почлуим вместо (17,2) уравнение

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} = a_1\frac{\partial x}{\partial u_1} + b_1\frac{\partial x}{\partial v_1} + c_1 x , \tag{17,5}$$

где

$$b_1 \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 = bg'(v) . \qquad (17,6)$$

Мы скажем, что F *ориентирована положительно*, если $b > 0$, что она *ориентирована отрицательно*, если $b < 0$. Из (17,6) ясно, что это понятие ориентации зависит только от расположения асимптотических линий $v = \text{const}$.

Наряду с поверхностью F рассмотрим еще поверхность F', образованную точкой $x'(u', v')$ так, что кривые $v' = \text{const}$ — асимптотические и не являются прямыми. Вместо (17,2) мы тогда получим уравнение

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial u'^2} = a' \frac{\partial x'}{\partial u'} + b' \frac{\partial x'}{\partial v'} + c'x' . \qquad (17,7)$$

Соответствие $u = u'$, $v = v'$ между поверхностями F, F' будет проективным полуизгибанием тогда и только тогда, если

$$b(u, v) = b'(u, v) . \qquad (17,8)$$

В таком случае множители однородных координат точек $x(u, v)$ и $x'(u, v)$ можно подобрать так, что будет и

$$a(u, v) = a'(u, v) . \qquad (17,9)$$

Если имеет место (17,8) и (17,9), то проективное соответствие $\boldsymbol{\pi}$ дано уравнениями

$$\boldsymbol{\pi} x = x' , \quad \boldsymbol{\pi} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial u} ,$$

а коллинеация $\mathbf{K}$ дана уравнениями

$$\mathbf{K} x = x' , \quad \mathbf{K} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial u} ,$$

$$\mathbf{K} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x'}{\partial v} + \frac{c' - c}{b} x' , \quad \mathbf{K} \frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} = \frac{\partial^2 x'}{\partial u \, \partial v} + \frac{c' - c}{b} \frac{\partial x'}{\partial u} .$$

Если же (17,8) не имеет места, то возникает вопрос, возможно ли определить функцию $\varphi(u, v)$ так, чтобы соответствие

$$u' = \varphi(u, v) , \quad v' = v \qquad (17,10)$$

между поверхностями F и F' было проективным полуизгибанием. Для этого необходимо и достаточно, чтобы было $bb' > 0$, т. е. чтобы ориентация F, определенная параметром v, и ориентация F', определенная параметром v', были или обе положительны или обе отрицательны. При соблюдении этого условия (17,10) будет проективным полуизгибанием тогда и только тогда, если

$$b' \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 = b .$$

Понятие проективного полуизгибания поверхностей (в трехмерном пространстве) было введено автором в 1928 г. (см. напр. Fubini-Čech, *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*, Париж 1931, стр. 194), а его связь с точечным изгибанием параболической конгруэнции (также в трехмерном пространстве) была найдена автором в 1952 г. (см. настоящий Журнал т. *2*, 1952, стр. 182—184).

Справедливость следующей теоремы ясна интуитивно из геометрического определения проективного полуизгибания. Пусть дано преобразование φ между поверхностями F, F', в котором асимптотическим C_v отвечают асимптотические же C'_v. Чтобы узнать, является ли φ проективным полуизгибанием, спроектируем F из произвольного центра на произвольную плоскость ϱ и аналогично, спроектируем F' из произвольного центра на произвольную плоскость ϱ'; таким образом получится преобразование $\bar{\varphi}$ между плоскостями ϱ, ϱ'. Преобразование $\bar{\varphi}$ будет проективным полуизгибанием тогда и только тогда, если проекции асимптотических C_v, C'_v будут характеристическими кривыми (см. Фубини-Чех, цит. соч., стр. 158) преобразования $\bar{\varphi}$.

18. Параболическая конгруэнция L с директрисой D переходит при точечном изгибании в параболическую же конгруэнцию L' с директрисой D'. Конгруэнция L состоит из ∞^1 пучков прямых $\Sigma(v)$, центры которых $x(v)$ заполняют кривую D; в пучок $\Sigma(v)$ входит касательная $\left(x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}\right)$ к кривой D в точке x. Аналогично, конгруэнция L' состоит из ∞^1 пучков прямых $\Sigma'(v)$, центры которых $x'(v)$ заполняют кривую D'; в пучок $\Sigma'(v)$ входит касательная $\left(x'\dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}v}\right)$ к кривой D' в точке x'. Для получения точечного изгибания $\boldsymbol{T}$ самого общего вида между L и L', можно исходить из произвольного соответствия $x(v) \rightarrow x'(v)$ между кривыми D, D'. Тогда при $\boldsymbol{T}$ прямым пучка $\Sigma(v)$ отвечают прямые пучка $\Sigma'(v)$ так, что $\Sigma(v) \rightarrow \Sigma'(v)$ представляет проективное соответствие между этими пучками, при котором касательная $\left(x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}\right)$ переходит в касательную $\left(x'\dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}v}\right)$. При данной паре $p(u, v)$, $p'(u, v)$ отвечающих друг другу прямых обеих конгруэнций L, L' в проективном соответствии $\pi(u, v)$ точке $x(v)$ отвечает точка $x'(v)$; однако, проективное соответствие $\pi(u, v)$ подчиняется еще одному условию, так что при данных u, v соответствие $\pi(u, v)$ зависит только от одного параметра. Для того, чтобы описать упомянутое условие как можно нагляднее, предположим, что при данном v пучки $\Sigma(v)$, $\Sigma'(v)$ занимают такое положение, что принадлежащие к ним касательные $\left(x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}\right)$, $\left(x'\dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}v}\right)$ лежат в бесконечности; тогда условие для проективных соответствий $\boldsymbol{\pi}(u, v)$ можно выразить следующим простым образом: каждое из этих проективных соответствий является сдвигом (зависящим не только от v, но и от u). При данных $\boldsymbol{\pi}$ коллинеации $\mathbf{K}$ определяются однозначно.

Аналитически рассматриваемые точечные изгибания можно описать так: Возьмем переменные точки $x(v)$, $x'(v)$, $z(v)$, $z'(v)$ так, чтобы

$$\left(x\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}\,z\right) \neq 0 \neq \left(x'\,\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}v}\,z'\right) ;$$

далее возьмем скалярную функцию $f(u, v)$ и положим

$$y = z + u\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}\,, \quad y' = z' + u\,\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}v} + f\,.\,x'\,,$$

$$p = (xy)\,, \quad p' = (x'y')\,,$$

$$\boldsymbol{\pi}x = x'\,, \quad \boldsymbol{\pi}y = y'\,,$$

$$\mathbf{K}x = x'\,, \quad \mathbf{K}y = y'\,, \quad \mathbf{K}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}v} + \frac{\partial f}{\partial u}\,x'\,,$$

$$\mathbf{K}\,\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y'}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial u}\,y'\,.$$

19. Остается исследовать точечные изгибания непараболических конгруэнций. Мы ограничимся в тексте гиперболическими конгруэнциями; если допустить мнимые элементы, то все соотношения имеют место и для эллиптических конгруэнций. Мы предоставляем читателю переписать результаты, касающиеся эллиптической конгруэнции, в действительной *форме*.

Пусть, прежде всего, L — конгруэнция с двумя директрисами D_1, D_2. При точечном изгибании L переходит в конгруэнцию L' с двумя директрисами D_1', D_2'. Преобразование $\mathbf{T}$ между L, L' будет точечным изгибанием тогда и только тогда, если каждый конус из L перейдет в конус же из L'. Можно подобрать обозначения так, чтобы конусы с вершинами на D_1 перешли в конусы с вершинами на D_1', а конусы с вершинами на D_2 перешли в конусы с вершинами на D_2'. Проективные соответствия $\boldsymbol{\pi}$ подчиняются только тому условию, что пересечения прямой p с директрисами D_1, D_2 (фокусы прямой p) переходят в пересечения прямой p' с директрисами D_1', D_2' (фокусы прямой p'); при данных u, v соответствие $\boldsymbol{\pi}$ зависит от одного параметра. При выбранных $\boldsymbol{\pi}$ коллинеации $\mathbf{K}$ определяются однозначно.

Аналитически дело обстоит так. Параметры u, v выберем так, чтобы для $v = \mathrm{const}$ получить конусы с вершинами на D_1, D_1', для $u = \mathrm{const}$ — конус с вершинами на D_2, D_2'. Пусть x, y, x', y' — фокусы (x на D_1, y на

D_2, x' на D'_1, y' на D'_2). Тогда при подходящем выборе множителей однородных координат фокусов будет

$$\boldsymbol{\pi} x = x' , \qquad \boldsymbol{\pi} y = y' ,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a_1 x , \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = b_1 y ,$$

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = a'_1 x' , \qquad \frac{\partial y'}{\partial v} = b'_1 y' ,$$

$$\mathbf{K} x = x' , \quad \mathbf{K} y = y' , \quad \mathbf{K} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x'}{\partial v} + (b_1 - b'_1)\, x' ,$$

$$\mathbf{K} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial u} + (a_1 - a'_1)\, y' .$$

20. Пусть далее L — конгруэнция с фокальной поверхностью F_1 и директрисой D_2. При точечном изгибании L переходит в конгруэнцию L' с фокальной поверхностью F'_1 и директрисой D'_2. Конгруэнция имеет две системы развертывающихся поверхностей; с одной стороны, это поверхности касательных к определенным кривым C_v на фокальной поверхности F_1, с другой — конусы с вершинами на директрисе D_2. Аналогично, L' имеет две системы развертывающихся поверхностей; с одной стороны, это поверхность касательных к определенным кривым C'_v на фокальной поверхности F'_1, с другой — конусы с вершинами на директрисе D'_2. Преобразование $\mathbf{T}$ между L, L' будет точечным изгибанием тогда и только тогда, если каждая поверхность касательных из L переходит в поверхность касательных из L' и каждый конус из L переходит в конус из L'. При соблюдении этого условия проективные соответствия $\boldsymbol{\pi}$ и коллинеации $\mathbf{K}$ определяются однозначно. Проективное соответствие $\boldsymbol{\pi}(u, v)$ переводит точку касания x прямой $p(u, v)$ с поверхностью F_1 в точку касания x' прямой $p'(u, v)$ с поверхностью F'_1, а точку пересечения y прямой $p(u, v)$ с кривой D_2 в точку пересечения y' прямой $p'(u, v)$ с кривой D'_2. Этого еще не достаточно для определения $\boldsymbol{\pi}(u, v)$; но $\boldsymbol{\pi}(u, v)$ обладает тем добавочным свойством, что допускает расширение на коллинеацию между S_r и S'_r, которая для рассматриваемых значений u, v осуществляет аналитическое касание первого порядка между кривыми C_v, C'_v.

Аналитически рассматриваемые точечные изгибания можно описать так. Пусть $x(u, v)$, $y(u, v)$ — фокусы прямой $p(u, v)$ (x на поверхности F_1, y на кривой D_2); пусть $x'(u, v)$, $y'(u, v)$ — фокусы прямой $p'(u, v)$ (x' на поверхности F'_1, y' на кривой D'_2). Параметры u, v выбраны так, что $v = \text{const}$ на поверхностях касательных, $u = \text{const}$ на конусах. Множители однородных координат можно подобрать так, чтобы $\boldsymbol{\pi} x = x'$, $\boldsymbol{\pi} y = y'$. Тогда справедливо уравнение (с одним и тем же a на обеих местах):

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a_1 x + ay\,, \quad \frac{\partial x'}{\partial u} = a_1' x' + ay'\,, \quad (a \neq 0)$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = b_1 y\,, \quad \frac{\partial x'}{\partial v} = b_1' y'\,,$$

и имеет место

$$\mathbf{K} x = x'\,, \quad \mathbf{K} y = y'\,, \quad \mathbf{K} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x'}{\partial v} + (b_1 - b_1')\, x'\,,$$

$$\mathbf{K} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial u} + (a_1 - a_1')\, y'\,.$$

21. Пусть, наконец, L — конгруэнция с двумя фокальными поверхностями F_1, F_2. При точечном изгибании L переходит в конгруэнцию L' с двумя фокальными поверхностями F_1', F_2'. Преобразование $\boldsymbol{T}$ между L и L', определенное равенством параметров u, v, будет точечным изгибанием тогда и только тогда, если обе конгруэнции имеют одну и ту же дифференциальную форму Лапласа-Дарбу от параметров u, v (откуда следует, что развертывающиеся поверхности конгруэнции L переходят в развертывающиеся же поверхности конгруэнции L'). Итак, в отличие от всех предыдущих типов у рассматриваемого типа нельзя произвольно выбрать обе конгруэнции L, L', а только одну из них. Пусть

$$f\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \tag{21,1}$$

есть общая форма Лапласа-Дарбу двух конгруэнций L, L'. Выберем такие обозначения, чтобы для $v = \mathrm{const}$ получить в конгруэнции L поверхности касательных к кривым C_v на поверхности F_1 а в конгруэнции L' — поверхности касательных к кривым C_v' на поверхности F_1', далее, чтобы для $u = \mathrm{const}$ получить в конгруэнции L поверхности касательных к кривым C_u на поверхности F_2, а в конгруэнции L' — поверхности касательных к кривым C_u' на поверхности F_2'. Проективные соответствия $\boldsymbol{\pi}$ и коллинеации $\boldsymbol{T}$ определяются однозначно. Проективное соответствие $\boldsymbol{\pi}(u, v)$ переводит точку касания x прямой $p(u, v)$ с поверхностью F_1 в точку касания x' прямой $p'(u, v)$ с поверхностью F_1', а точку касания y прямой $p(u, v)$ с поверхностью F_2 в точку касания y' прямой $p'(u, v)$ с поверхностью F_2'. Этого еще не достаточно для определения $\boldsymbol{\pi}(u, v)$; однако, $\boldsymbol{\pi}(u, v)$ обладает еще тем свойством, что допускает расширение на коллинеацию между S_r и S_r', которая для рассматриваемых значений u, v осуществляет как аналитическое касание первого порядка между кривыми C_v и C_v', так и аналитическое касание первого порядка между кривыми C_u и C_u'. Проективное соответствие $\boldsymbol{\pi}(u, v)$ с этим свойством существует в силу того, что обе конгруэнции L, L' имеют одну и ту же форму Лапласа-Дарбу (21,1).

Аналитически рассматриваемые точечные изгибания можно описать следующим образом. Параметры u, v подберем так, чтобы для $v = \mathrm{const}$ получить развертывающиеся поверхности с ребрами возврата на поверхностях F_1, F'_1, а для $u = \text{const}$ — развертывающиеся поверхности с ребрами возврата на поверхностях F_2, F'_2. Далее, пусть $x(u, v)$, $y(u, v)$ — фокусы прямой $p(u, v)$ (x на поверхности F_1, y на поверхности F_2), $x'(u, v)$, $y'(u, v)$ — фокусы прямой $p'(u, v)$ (x' на поверхности F'_1, y' на поверхности F'_2). Множители однородных координат можно выбрать так, чтоби $\boldsymbol{\pi} x = x'$, $\boldsymbol{\pi} y = y'$. Тогда имеет место уравнение (с одним и тем же a на обеих местах и с одним и тем же b на обеих местах):

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a_1 x + a y \,, \quad \frac{\partial x'}{\partial u} = a'_1 x' + a y' \,, \quad (a \neq 0) \,;$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = b x + b_1 y \,, \quad \frac{\partial y'}{\partial v} = b x' + b'_1 y' \,, \quad (b \neq 0) \,.$$

Форма (21,1) равна $ab \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$, и имеет место

$$\mathbf{K} x = x' \,, \quad \mathbf{K} y = y' \,, \quad \mathbf{K} \frac{\partial x}{\partial v} + (b_1 - b'_1) \, x' \,,$$

$$\mathbf{K} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial u} + (a_1 - a'_1) \, y' \,.$$

Résumé

DÉFORMATION PONCTUELLE DES CONGRUENCES DE DROITES

EDUARD ČECH, Praha.

(Reçu le 29 décembre 1954.)

Soient V_m, V'_m deux variétés à un nombre quelconque m de dimensions en correspondance biunivoque, engendrées par les points

$$x = x(u_1, u_2, \ldots, u_m) \,, \quad x' = x'(u_1, u_2, \ldots, u_m) \,.$$

Pour chaque $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, choisissons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ arbitrairement et considérons la transformation homographique

$$\mathbf{K} x = x' \,, \quad \mathbf{K} \frac{\partial x}{\partial u_i} = \frac{\partial x'}{\partial u_i} + \alpha_i x' \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

entre les espaces tangents resp. à V_m en x et à V'_m en x'. Nous appellerons $\mathbf{K}$ l'*homographie tangente*; pour chaque u, il y a ∞^m homographies tangentes. Si $V_m \subset S_r$, $V'_m \subset S'_r$, $\mathbf{K}$ possède la propriété charactéristique qu'elle se puisse étendre à une transformation homographique entre les deux espaces projectifs S_r et S'_r qui réalise le contact analytique du premier ordre entre V_m et V'_m en u.

Le mot *congruence* désigne dans ce Mémoire une famille ∞^2 de droites d'un espace projectif S_r qui n'est pas contenue dans un plan fixe. Si la congruence L est engendrée par la droite

$$p = p(u, v) = (xy), \; x = x(u, v), \; y = y(u, v) \, ,$$

nous considérons pour chaque (u, v) l'espace linéaire $\tau(u, v)$ déterminé par les points

$$x, \; y, \; \frac{\partial x}{\partial u}, \; \frac{\partial x}{\partial v}, \; \frac{\partial y}{\partial u}, \; \frac{\partial y}{\partial v},$$

que nous appellerons *espace tangent à L le long de la droite $p(u, v)$*. La dimension m de $\tau(u, v)$ sera appelée le *caractère* de la congruence L; on a $3 \leqq m \leqq 5$. Le lieu de tous les points $\lambda x + \mu y$ situés sur les droites de L est une variété à trois dimensions $V_3(L)$; l'espace $\tau(u, v)$ est le plus petit espace linéaire contenant les espaces tangents à $V_3(L)$ dans tous les points de la droite $p(u, v)$.

Outre L, considérons une autre congruence L' engendrée par la droite

$$p' = p'(u, v) = (x'y') \, , \; x' = x'(u, v), \; y' = y'(u, v) \, ;$$

soient $\tau'(u, v)$ les espaces tangents à L' le long de ses droites. Les paramètres u, v définissent une correspondance droite $\rightarrow$ droite entre L et L'; soit $\boldsymbol{T}$ cette correspondance. Le problème qui nous occupe est de décider s'il est possible d'étendre $\boldsymbol{T}$ à une correspondance *ponctuelle* $\boldsymbol{T}^*$ entre $V_3(L)$ et $V_3(L')$ de manière qu'il existe pour chaque (u, v) une homographie $\boldsymbol{K}(u, v)$ entre $\tau(u, v)$ et $\tau'(u, v)$ telle que, pour chaque point z de la droite $p(u, v)$, la partie de $\boldsymbol{K}(u, v)$ concernant l'espace tangent à $V_3(L)$ au point z soit une homographie tangente à la correspondance $\boldsymbol{T}^*$ relative au point z considéré. Il est évident qu'une telle extension n'est possible que moyennant des *projectivités* $\boldsymbol{\pi}(u, v)$ entre les points de $p(u, v)$ et ceux de $p'(u, v)$. Si l'extension est possible, nous dirons que $\boldsymbol{T}$ est une *déformation ponctuelle* de L en L' et que les projectivités $\boldsymbol{\pi}(u, v)$ *réalisent* la déformation; l'homographie $\boldsymbol{K}(u, v)$ entre $\tau(u, v)$ et $\tau'(u, v)$ sera appelée *homographie tangente* à la déformation.

Pour résoudre le problème en vue, on doit partager les congruences en dix types différents; la déformation n'est possible que si les deux congruences L et L' appartiennent au même type. Pour chaque type, à l'exception du dernier, les deux congruences appartenant au type (mais pas toujours la correspondance $\boldsymbol{T}$) peuvent être prises arbitrairement.

Dans le cas particulier où $V_3(L)$ et $V_3(L')$ se réduisent à l'espace linéaire à trois dimensions, le problème avait été déjà considéré par l'auteur au Mémoire *Проективнаа дифференциальнаа геометриа соответствий между двумя пространствами* V (ce Journal, t. *2*, 1952, pp. 167—188); voir aussi L. Muracchini, *Sulle transformazioni puntuali che sono inviluppi di omografie*, Bollettino della Unione Matematica Italiana (*3*) *8*, 1953, pp. 390—398.

Nous allons passer en revue successivement les 10 types de congruences.

1. Caractère $m = 5$. La correspondance $\boldsymbol{T}$ entre L et L' est tout-à-fait arbitraire, de même les projectivités $\pi(u, v)$ réalisant la déformation, de manière que, pour (u, v) donné, π dépend de 3 paramètres. Le choix de π étant fait, l'homographie tangente $\boldsymbol{K}$ dépend encore pour chaque (u, v) de deux paramètres. En s'arrangeant de façon que $\pi x = x'$, $\pi y = y'$, on a

$$\boldsymbol{K}x = x' \,, \quad \boldsymbol{K}y = y' \,,$$

$$\boldsymbol{K}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial u} + c_1 x' \,, \quad \boldsymbol{K}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial u} + c_1 y' \,,$$

$$\boldsymbol{K}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x'}{\partial v} + c_2 x', \quad \boldsymbol{K}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y'}{\partial v} + c_2 y' \,,$$

où c_1 et c_2 sont arbitraires.

2. Caractère $m = 4$, les congruences L et L' ne contiennent aucune surface développable. La correspondance $\boldsymbol{T}$ entre L et L' est arbitraire, mais, $\boldsymbol{T}$ étant choisie, les projectivités $\pi\ (u, v)$ réalisant la déformation, ainsi que les homographies tangentes $\boldsymbol{K}\ (u, v)$, sont déterminées sans ambiguité. On peut s'arranger de façon que $\pi x = x'$, $\pi y = y'$ et qu'on ait des relations de la forme

$$\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v} = ax + by \,, \quad \frac{\partial x'}{\partial u} - \frac{\partial y'}{\partial v} = a'x' + b'y' \,;$$

alors

$$\boldsymbol{K}x = x', \quad \boldsymbol{K}y = y',$$

$$\boldsymbol{K}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial u} + (a - a')\, x' \,, \quad \boldsymbol{K}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial u} + (a - a')\, y' \,,$$

$$\boldsymbol{K}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x'}{\partial v} - (b - b')\, x' \,, \quad \boldsymbol{K}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y'}{\partial v} - (b - b')\, y' \,.$$

3. Caractère $m = 4$. Il existe une surface (focale) F (F') recouverte par une famille ∞^1 de courbes C (C') telle que L (L') est l'assemblage des tangentes aux courbes C (C'); le point de contact de la droite $p(u, v)$ [$p'(u, v)$] avec la courbe C (C') correspondante est appelé le *foyer* de la droite p (p'). La congruence L (L') contient donc une famille ∞^1 de surfaces développables, les tangentes à chaque C (C') formant une telle développable. La correspondance $\boldsymbol{T}$ est soumise à la condition de porter surfaces développables en surfaces développables. Cette condition supposée remplie, chaque projectivité π porte le foyer de la droite correspondante p au foyer de p'; en outre, π doit être telle qu'on puisse l'étendre dans une homographie des espaces ambiants qui réalise un contact analytique du premier ordre entre C et C'; il en résulte que pour chaque (u, v) la projectivité $\pi(u, v)$ ne dépend que d'une seul paramètre. Le choix des π étant fait, l'homographie $\boldsymbol{K}(u, v)$ dépend encore d'un paramètre arbitraire. On peut s'arranger de façon que $v =$ const. soient les développables, qu'on ait $\pi x = x'$, $\pi y = y'$, x (x') étant le foyer, et qu'on ait des relations de la forme

$$y = \frac{\partial x}{\partial u}\,, \quad y' = \frac{\partial x'}{\partial u} + ax'\,;$$

alors

$$\mathsf{K}x = x'\,, \quad \mathsf{K}y = y'\,, \quad \mathsf{K}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial u} + ay'\,,$$

$$\mathsf{K}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} + cx'\,, \quad \mathsf{K}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y'}{\partial v} + cy'\,,$$

c étant arbitraire.

4. Caractère $m = 4$. Toutes les droites de L (L') rencontrent une courbe (directrice) D (D') qui peut être une droite; le point de rencontre de la droite $p(u, v)$ $[p'(u, v)]$ avec la courbe D (D') est appelé le *foyer* de p (p'). La congruence L (L') contient donc une famille ∞^1 de cônes dont les sommets forment la courbe D (D'). La correspondance T est soumise à la condition de porter cônes en cônes. Cette condition supposée remplie, chaque projectivité π porte le foyer de la droite correspondante p au foyer de p'; π dépend donc pour chaque (u, v) de deux paramètres. Le choix des π étant fait, l'homographie $\mathsf{K}(u, v)$ dépend encore d'un paramètre arbitraire. On peut s'arranger de façon que $v =$ const. soient les développables, qu'on ait $\pi x = x'$, $\pi y = y'$, x (x') étant le foyer, et qu'on ait des relations de la forme

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0\,, \quad \frac{\partial x'}{\partial u} = 0\,;$$

alors

$$\mathsf{K}x = x'\,, \quad \mathsf{K}y = y'\,, \quad \mathsf{K}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial u}\,,$$

$$\mathsf{K}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x'}{\partial v} + cx'\,, \quad \mathsf{K}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y'}{\partial v} + cy'\,,$$

c étant arbitraire.

5. Caractère $m = 3$. Toutes les droites de L (L') passent par un point fixe appelé *centre* de la congruence L (L'). La correspondance T est tout-à-fait arbitraire; π est soumise à la condition de porter centre en centre de sorte que pour chaque (u, v) π dépend de deux paramètres. Le choix des π étant fait, les homographies K sont déterminées sans ambiguïté. On peut s'arranger de façon que $\pi x = x'$, $\pi y = y'$ et qu'on ait des relations

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial v} = 0\,, \quad \frac{\partial x'}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial v} = 0\,,$$

de manière que x (x') est le centre de L (L'); alors

$$\mathsf{K}x = x'\,, \quad \mathsf{K}y = y'\,, \quad \mathsf{K}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial u}\,, \quad \mathsf{K}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y'}{\partial v}\,.$$

6. Caractère $m = 3$. Il existe une surface (focale) F (F') possédant une famille ∞^1 d'asymptotiques (non droites) C (C') telle que L (L') est l'assemblage des tangentes aux courbes C (C'); le point de contact de la droite $p(u, v)$ avec la courbe C (C') correspondante est appelé le *foyer* de p (p'). La congruence L (L') contient donc une famille ∞^1 de surfaces développables, les tangentes à chaque C (C') formant une telle développable. La correspondance $\boldsymbol{T}$ est soumise à la condition de porter surfaces développables en surfaces développables, mais cette condition n'est nullement suffisante. Chaque correspondance $\boldsymbol{T}$ satisfaisant à la condition expliquée est associée de manière biunivoque à une correspondance $\boldsymbol{\varphi}$ entre F et F' qui porte les asymptotiques C en asymptotiques C'. Or $\boldsymbol{\varphi}$ étant une correspondance entre F et F' satisfaisant à cette condition, considérons pour (u, v) donné une homographie $\boldsymbol{H}(u, v)$ tangente à $\boldsymbol{\varphi}$ pour les valeurs considérées de u, v. L'homographie $\boldsymbol{H}$ dépend, pour (u, v) donné, de deux paramètres; or si une $\boldsymbol{H}$ satisfait à la condition qu'elle se puisse étendre dans une homographie des espaces ambiants qui réalise, au moment correspondant (u, v), un contact *géométrique* du second ordre entre les asymptotiques C, C', alors le même a lieu pour chaque $\boldsymbol{H}$ correspondante aux valeurs considérée's de u, v. Si ceci a lieu pour *chaque* (u, v), on dit que $\boldsymbol{\varphi}$ est une *demidéformation projective* de F en F'. Or condition nécessaire et suffisante pour que la correspondance $\boldsymbol{T}$ entre L et L' soit une déformation ponctuelle de L et L' est précisément que la correspondance associée $\boldsymbol{\varphi}$ de F en F' soit une demidéformation projective. Si cette condition est remplie, alors pour chaque (u, v) la projectivité $\boldsymbol{\pi}(u, v)$ réalisant la déformation est soumise à la condition qu'elle se puisse étendre à une homographie des espaces ambiants qui réalise, pour (u, v) donné, un contact *analytique* du second ordre entre les asymptotiques C, C'; les $\boldsymbol{\pi}(u, v)$ sont déterminées sans ambiguïté par cette condition; aussi, les homographies tangentes $\boldsymbol{K}(u, v)$ sont déterminées sans ambiguïté. En supposant que les foyers soient $x = x(u, v)$, $x' = x'(u, v)$, $v =$ const. donnant les développables, on a des équations de la forme

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = a\,\frac{\partial x}{\partial u} + b\,\frac{\partial x}{\partial v} + cx\,,$$

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial u^2} = a'\,\frac{\partial x'}{\partial u} + b\,\frac{\partial x'}{\partial v} + c'x\,,$$

où l'égalité des coefficients de $\dfrac{\partial x}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial x'}{\partial v}$ exprime précisément que $\boldsymbol{\varphi}$ soit une demidéformation projective. On peut alors choisir les facteurs arbitraires des coordonnées homogènes de $x(u, v)$ et $x'(u, v)$ de manière à avoir encore

$$a'(u, v) = a(u, v)\;.$$

S'il en est ainsi, les projectivités $\boldsymbol{\pi}(u, v)$ sont données par

$$\boldsymbol{\pi} x = x'\,,\quad \boldsymbol{\pi}\,\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial u}$$

et les homographies $\boldsymbol{K}(u, v)$ par

$$\boldsymbol{K}x = x' , \quad \boldsymbol{K}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial u} ,$$

$$\boldsymbol{K}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x'}{\partial v} + \frac{c' - c}{b} x' , \quad \boldsymbol{K}\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 x'}{\partial u\, \partial v} + \frac{c' - c}{b} \frac{\partial u'}{\partial u} .$$

7. Caractère $m = 3$. Il existe une courbe (directrice) D (D'), qui peut être une droite, telle que la congruence L (L') se compose de ∞^1 faisceaux de droites $\Sigma(x)$ $[\Sigma(x')]$ dont les sommets x (x') décrivent la courbe D (D'), la tangente à D (D') en x (x') faisant partie de $\Sigma(x)$ $[\Sigma(x')]$. Pour qu'une correspondance $\boldsymbol{T}$ entre L et L' soit une déformation ponctuelle, il faut d'abord qu'elle porte chaque faisceau $\Sigma(x)$ dans un faisceau $\Sigma(x')$ de sorte que $\boldsymbol{T}$ détermine une correspondance, d'ailleurs arbitraire, entre D et D'. En outre, il faut que chaque faisceau $\Sigma(x)$ soit porté dans le faisceau correspondant d'une manière projective faisant correspondre la tangente à D en x à la tangente à D' en x'. Ceci étant, dans la projectivité $\pi(u, v)$ entre les points de la droite $p(u, v)$ appartenant au faisceau $\Sigma(x)$ et ceux de la droite $p'(u, v)$ appartenant au faisceau $\Sigma(x')$ le point x doit correspondre à x'; en outre, π doit satisfaire à une condition ultérieure de sorte que $\pi(u, v)$, pour (u, v) donné, ne dépend que d'un paramètre. Pour exprimer la condition annoncée d'une manière intuitive, supposons que, pour x et x' donnés, les deux points x et x' soient situés à l'infini; alors chaque projectivité $\pi(u, v)$ correspondant à une droite quelconque $p(u, v)$ du faisceau $\Sigma(x)$ est une translation (qui dépend non seulement de x, mais encore de la droite considérée p). Les projectivités $\pi(u, v)$ étant choisies, les homographies tangentes $\boldsymbol{K}(u, v)$ sont déterminées sans ambiguïté.

Analytiquement on peut décrire les déformations envisagées comme suit. Choisissons les points variables $x(v)$, $x'(v)$, $z(v)$, $z'(v)$ de manière que

$$\left(x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} z\right) \neq 0 \neq \left(x' \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}v} z'\right) ;$$

choisissons ensuite une fonction scalaire $f(u, v)$ et posons

$$y = z + u \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} , \quad y' = z' + u \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}v} + f \,.\, x' ,$$

$$p = (xy) , \quad p' = (x'y') ,$$

$$\pi x = x' , \quad \pi y = y' ;$$

alors

$$\boldsymbol{K}x = x' , \quad \boldsymbol{K}y = y' ,$$

$$\boldsymbol{K}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}v} + \frac{\partial f}{\partial u} \,.\, x' , \quad \boldsymbol{K}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y'}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial u} \,.\, y' .$$

8. Caractère $m = 3$. Il existe deux courbes (directrices) D_1, D_2 (D_1', D_2') réelles ou imaginaires conjuguées (qui peuvent être des droites) telles que L (L')

est l'assemblage des droites qui rencontrent D_1 et D_2 (D'_1 et D'_2). Les points d'intersection d'une droite p (p') appartenant à L (L') avec D_1, D_2 (D'_1, D'_2) sont dits *foyers* de p (p'). La congruence L (L') contient donc deux familles ∞^1 de cônes (réels ou imaginaires conjugués) dont les sommets décrivent resp. D_1 et D_2 (D'_1 et D'_2). La correspondance $\mathbf{T}$ entre L et L' est une déformation ponctuelle si et seulement si elle porte tous les cônes de L en cônes de L'. Quant à la projectivité $\pi(u, v)$ réalisant la déformation, elle est soumise à la condition de porter les foyers de $p(u, v)$ aux foyers de $p'(u, v)$; pour chaque (u, v), il y a donc deux familles continues à un paramètre de projectivités $\pi(u, v)$. Si les projectivités $\pi(u, v)$ sont choisies, les homographies tangentes $\mathbf{K}(u, v)$ sont déterminées sans ambiguïté.

Analytiquement, on peut s'arranger de façon que $\pi x = x'$, $\pi y = y'$, les points x, y étant foyers de p et x', y' ceux de p'. Les paramètres u, v soient choisis de façon que les points x, x' soient fixes pour $v =$ const., les points y, y' pour $u =$ = const. On a alors des relations de la forme

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a_1 x \,, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = b_1 y \,,$$

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = a'_1 x' \,, \quad \frac{\partial y'}{\partial v} = b'_1 y'$$

et les homographies $\mathbf{K}$ sont données par

$$\mathbf{K}x = x' \,, \quad \mathbf{K}y = y' \,,$$

$$\mathbf{K}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x'}{\partial v} + (b_1 - b'_1)\, x' \,, \quad \mathbf{K}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial u} + (a_1 - a'_1)\, y' \,.$$

9. Caractère $m = 3$. Il existe une surface (focale) F (F') et une courbe (directrice) D (D') telles que L (L') se compose de droites qui touchent F (F') et qui rencontrent D (D'). La surface F (F') est non-développable; la courbe D (D') peut être droite. La surface F (F') est recouverte par une famille ∞^1 de courbes C (C') telle que les tangentes à chaque C (C') forment une développable contenue dans L (L'). Il y a une autre famille ∞^1 de développables contenues dans L (L'); ce sont des cônes aux sommets situés sur D (D'). Le point de contact de la droite p (p') avec la surface F (F') et le point d'intersection de p (p') avec la courbe D (D') sont les deux foyers de p (p'). La correspondance $\mathbf{T}$ entre L et L' est une déformation ponctuelle si et seulement si elle porte chaque developpable de L dans une développable *de la même sorte* de L'. La projectivité $\pi(u, v)$ porte chaque foyer de $p(u, v)$ dans le foyer de la même sorte de $p'(u, v)$. Mais $\pi(u, v)$ est soumise encore à la condition qu'elle se puisse étendre à une homographie entre les espaces ambiants qui réalise, pour (u, v) donné, un contact analytique du premier ordre entre les courbes C, C' correspondantes (définies plus haut). Il s'ensuit que les projectivités $\pi(u, v)$ sont univoquement déterminées. Les homographies tangentes $\mathbf{K}(u, v)$ sont elles aussi déterminées sans ambiguïté.

Analytiquement, on peut s'arranger de façon que $\pi x = x'$, $\pi y = y'$, où x, y, x', y' sont les foyers (x sur F, y sur D, x' sur F', y' sur D'). Les paramètres u, v soient choisis de façon que $u =$ const. pour les cônes, $v =$ const. pour les autres développables. On a alors des relations de la forme (avec le même $a \neq 0$ deux fois)

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a_1 x + ay , \quad \frac{\partial x'}{\partial u} = a_1' x' + ay' ,$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = b_1 y , \quad \frac{\partial y'}{\partial v} = b_1' y'$$

et les homographies $\mathbf{K}$ sont données par

$$\mathbf{K} x = x' , \quad \mathbf{K} y = y' ,$$

$$\mathbf{K} \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x'}{\partial v} + (b_1 - b_1') x' , \quad \mathbf{K} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial u} + (a_1 - a_1') y' .$$

10. Caractère $m = 3$. La congruence L (L') se compose de tangentes communes à deux surfaces (focales) réelles ou imaginaires conjuguées F_1 et F_2 (F_1' et F_2'); les points de contact de la droite p (p') avec F_1 et F_2 (F_1' et F_2') sont dits *foyers* de p (p'). Chacune des deux surfaces focales F_1 et F_2 (F_1' et F_2') est recouverte par une famille ∞^1 de courbes, soit C_1 sur F_1, C_2 sur F_2 (C_1' sur F_1', C_2' sur F_2') telle que les tangentes à chaque C_1 (C_1') et à chaque C_2 (C_2') forment une développable contenue dans L (L'); appelons développables de première sorte celles qui sont formées par les tangentes aux C_1 (C_1') et développables de seconde sorte celles formées par les tangentes aux C_2 (C_2'). Condition nécessaire pour qu'une correspondance $\mathbf{T}$ entre L et L' soit une déformation ponctuelle est que $\mathbf{T}$ porte chaque développable de L dans une développable de L'; on peut choisir les notations de telle manière que deux développables correspondantes l'une à l'autre soient toujours de la même sorte. Cette condition nécessaire n'est nullement suffisante; il faut encore que la condition (*) énoncée plus bas soit réalisable, ce qui n'est pas possible si les deux congruences L et L' du type envisagé ont été choisies par hazard. La projectivité $\pi(u, v)$ doit porter le foyer de p situé sur F_1 au foyer de p' situé sur F_1' et le foyer de p situé sur F_2 au foyer de p' situé sur F_2'; en outre $\pi(u, v)$ doit satisfaire à la condition (*) qui dit que $\pi(u, v)$ peut être étendue à une homographie entre les espaces ambiants qui réalise, pour (u, v) donné, un contact analytique entre C_1 et C_1' et, en même temps, un contact analytique entre C_2, C_2'. Les courbes C_1 et C_2 (C_1' et C_2') dont on parle ici sont naturellement celles qui passent par les foyers de la droite p (p') appartenant à la valeur considérée de (u, v). Si la condition (*) est réalisable, les projectivités $\pi(u, v)$, ainsi que les homographies tangentes $\mathbf{K}(u, v)$, sont univoquement déterminées.

Analytiquement, si la déformation existe, on peut s'arranger de façon qu'on ait $\boldsymbol{\pi} x = x'$, $\boldsymbol{\pi} y = y'$ et que les relations suivantes aient lieu [avec les mêmes quantités $a \neq 0$ et $b \neq 0$ dans (1) et dans (2)]:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a_1 x + a y\,, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = b x + b_1 y\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = a_1' x' + a y'\,, \quad \frac{\partial y'}{\partial v} = b x' + b_1' y'\,; \tag{2}$$

x, y, x', y' sont les foyers, $u =$ const. et $v =$ const. sont les développables ($v =$ const. donnant les courbes C_1 et C_1', $u =$ const. les courbes C_2 et C_2'). Les homographies tangentes $\mathbf{K}$ sont données par

$$\mathbf{K} x = x'\,, \quad \mathbf{K} y = y'\,,$$

$$\mathbf{K}\,\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x'}{\partial v} + (b_1 - b_1')\,x'\,, \quad \mathbf{K}\,\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial u} + (a_1 - a_1')\,y'\,.$$

Condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la déformation ponctuelle est que les deux congruences L et L' aient la même *forme différentielle quadratique de Laplace-Darboux* (pour le cas $L \subset S_3$, $L' \subset S_3'$ v. Muracchini, loc. cit.). Si $x(u, v)$ et $y(u, v)$ sont les foyers, $x(u, v)$ décrivant pour $v =$ const. les courbes C_1' sur F_1 et $y(u, v)$ décrivant pour $u =$ const. les courbes C_2 sur F_2, on a les équations (1) et la forme de Laplace-Darboux est $ab\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$. Elle est égale [A. Terracini, *Un'osservazione sugli invarianti di un'equazione di Laplace*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana *6*, 1927, pp. 57—60] à la partie principale du rapport anharmonique des quatre points

$$x(u, v),\ y(u, v),\ x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathrm{d}u,\ y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v$$

situés sur la droite $p(u, v)$. En éliminant y ou x des équations (1), on obtient des équations de la forme

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = A_1\,\frac{\partial x}{\partial u} + B_1\,\frac{\partial x}{\partial v} + C_1 x\,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} = A_2\,\frac{\partial y}{\partial u} + B_2\,\frac{\partial y}{\partial v} + C_2 y\,. \tag{4}$$

La forme de Laplace-Darboux est égale à

$$\left(C_1 + A_1 B_1 - \frac{\partial B_1}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \left(C_2 + A_2 B_2 - \frac{\partial A_2}{\partial u}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Le coefficient de $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ dans la forme de Laplace-Darboux est donc égal au premier invariant de l'équation de Laplace (4) et au second invariant de l'équation de Laplace (3).