Czechoslovak Mathematical Journal

Miloš Zlámal

Eine Bemerkung über die charakteristische Determinante einer Eigenwertaufgabe

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 2, 175–179

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100140

Чехословацкий математический журнал, т. 5 (80) 1955

EINE BEMERKUNG ÜBER DIE CHARAKTERISTISCHE DETERMINANTE EINER EIGENWERTAUFGABE

MILOŠ ZLÁMAL, Brno.

(Eingelangt 12. VII. 1954.)

Wir untersuchen die Ordnung der charakteristischen Determinante einer willkürlichen Eigenwertaufgabe bei der linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Betrachten wir die Eigenwertaufgabe

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)\, y = \lambda[b_k(x)\, y^{(k)} + \ldots + b_0(x)\, y]\ ;\ n > k\ , \quad (1)$$

$$U_\nu(y) = \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_\nu^i\, y^{(i)}(a) + \beta_\nu^i\, y^{(i)}(b)] = 0\ , \quad \nu = 1, \ldots, n\ , \quad (2)$$

wo wir ausser der üblichen Voraussetzung über die Stetigkeit der Koeffizienten $a_\nu(x)$ und $b_\nu(x)$ nichts weiteres voraussetzen, wo also besonders die Randbedingungen (2) willkürlich sind. Es seien $y_1(x, \lambda), \ldots, y_\nu(x, \lambda)$ die Lösungen von (1) mit den Anfangswerten

$$y_s^{(q)}(a) = \mathrm{e}_{s,q+1}{}^{1)} \quad (s = 1, \ldots, n,\ q = 0, \ldots, n-1)\ . \quad (3)$$

Dann ist die charakteristische Determinante

$$\Delta(\lambda) = \mathrm{Det}\ |U_r(y_s)| \quad (r, s = 1, \ldots, n)$$

eine ganze Funktion des Parameters λ und bezüglich ihrer Ordnung ϱ beweisen wir den

Satz: *Es seien $a_\nu(x)$ und $b_\nu(x)$ stetige Funktionen im Intervall $\langle a, b\rangle$ und α_ν^i, β_ν^i Polynome des Parameters λ. Dann ist die charakteristische Determinante $\Delta(\lambda)$ der Eigenwertaufgabe* (1), (2) *eine ganze Funktion der Ordnung*

$$\varrho \leq \frac{1}{n-k}\,.$$

---

[1]) e_{ij} ist das Kroneckersche Symbol, d. h. $\mathrm{e}_{ij} = 0$ für $i \neq j$, $\mathrm{e}_{ii} = 1$.

Beweis: Führen wir die Bezeichnungen $M_\nu \geqq \max_{x\in\langle a,b\rangle} |a_\nu(x)|$, $\overline{M}_\nu \geqq \max_{x\in\langle a,b\rangle} |b_\nu(x)|$ ein und betrachten die Differentialgleichung

$$z^{(n)} - M_{n-1}z^{(n-1)} - \ldots - M_{k+1}z^{(k+1)} - (M_k + |\lambda|\,\overline{M}_k)\,z^{(k)} - \ldots -$$
$$- (M_0 + |\lambda|\overline{M}_0)\,z = 0\,. \tag{4}$$

Wenn $z_s(x)$ eine durch die Anfangswerte (3) bestimmte Lösung dieser Gleichung ist, dann gilt nach einem Hilfssatz (siehe [1], S. 298 Hilfssatz 2)

$$|y_s^{(q)}(x, \lambda)| \leq z_s^{(q)}(x, |\lambda|) \quad (q = 0, \ldots, n-1)\,. \tag{5}$$

Zuerst zeigen wir, dass $y_s(x, \lambda)$ und ihre Ableitungen bis zu der $(n-1)$-ten Ordnung als ganze Funktionen des Parameters λ die Ordnung ϱ haben, welche kleiner oder gleich $\dfrac{1}{n-k}$ ist. Nach (5) genügt es zu beweisen, dass die Lösungen $z_s(x, |\lambda|)$ und ihre zugehörigen Ableitungen als ganze Funktionen in $|\lambda|$ die Ordnung $\varrho \leq \dfrac{1}{n-k}$ haben.

Betrachten wir die charakteristische Gleichung von (4)

$$\alpha^n - \ldots - M_{k+1}\alpha^{k+1} - (M_k + |\lambda|\overline{M}_k)\,\alpha^k - \ldots - (M_0 + |\lambda|\overline{M}_0) = 0\,. \tag{6}$$

Der absolute Betrag der Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von (6) ist nicht grösser als die einzige positive Wurzel dieser Gleichung. Nach dem Cauchyschen Kriterium ist diese positive Wurzel kleiner oder gleich

$$\max\{(nM_{n-1})^{1}, \ldots, (nM_{k+1})^{\frac{1}{n-k-1}}, [n(M_k + |\lambda|\overline{M}_k)]^{\frac{1}{n-k}}, \ldots, [n(M_0 + |\lambda|\overline{M}_0)]^{\frac{1}{n}}\}\,.$$

Für genügend grosse $|\lambda|$ ist dieses Maximum gleich

$$[n(M_k + |\lambda|\overline{M}_k)]^{\frac{1}{n-k}} \leq c_1|\lambda|^{\frac{1}{n-k}}\,,$$

wo c_1 eine hinreichend grosse positive Konstante ist, sodass

$$|\alpha_j| \leq c_1|\lambda|^{\frac{1}{n-k}} \quad (j = 1, \ldots, n)\,.$$

Die Diskriminante der charakteristischen Gleichung (6) ist ein Polynom in $|\lambda|$. Deshalb ist sie für hinreichend grosse $|\lambda|$ von Null verschiedenen,[2]) sodass alle Wurzeln von (6) einfach sind. Das Fundamentalsystem besteht also aus den Lösungen der Form

$$u_j(x, \lambda) = \mathrm{e}^{\alpha_j(x-a)} \quad (j = 1, \ldots, n)\,.$$

---

[2]) Es ist freilich notwendig zu zeigen, dass sie nicht identisch gleich Null, dass sie z. B. für $\lambda = 1$ verschieden von Null ist. Dies folgt aber daraus, dass wir die Konstanten M_ν und $\overline{M}_\nu$ mit grosser Willkürlichkeit wählen können, denn M_ν und $\overline{M}_\nu$ brauchen nur die Ungleichungen $\overline{M}_\nu \geq \max|a_\nu(x)|$, $\overline{M}_\nu \geq \max|b_\nu(x)|$ zu erfüllen.

Die Lösungen $z_s(x, \lambda)$ sind lineare Kombinationen von $u_j(x, \lambda)$. Die Koeffizienten c_{ij} diser Kombinationen sind Brüche, in deren Nenner die Wronskische Determinante steht und dessen Zähler ein Polynom in $u_1(a, \lambda)$, $u_1'(a, \lambda)$, ..., $u_n(a, \lambda)$, ..., $u_n^{(n-1)}(a, \lambda)$, d. h. ein Polynom in $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ist. Es gilt offenbar

$$W(a, \lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

sodass $W^2(a, \lambda)$ gleich der Diskriminante von (6), also ein Polynom in $|\lambda|$ ist und $\frac{1}{W(a, \lambda)} \to 0$ für $|\lambda| \to \infty$. Daraus ist zu ersehen, dass die Koeffizienten c_{ij} im absoluten Betrage kleiner als $|\lambda|^p$ sind, wo p ein hinreichend grosser Exponent ist. Und weil $|u_j^{(q)}(x, \lambda)| \leqq e^{c|\lambda|^{\frac{1}{n-k}}}$, sind wirklich $z_s(x, |\lambda|)$ und ihre Ableitungen der Ordnung, welche kleiner oder gleich $\frac{1}{n-k}$ ist.

Die Elemente der Determinante $\Delta(\lambda)$ sind gleichfalls ganze Funktionen der Ordnung kleiner oder gleich $\frac{1}{n-k}$, weil die Koeffizienten α_ν^i, β_ν^i Polynome in λ sind. Also auch die Ordnung der Determinante $\Delta(\lambda)$ is kleiner oder gleich $\frac{1}{n-k}$.

Korollar 1: *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes. Wenn*

$$n > k + 1\,, \tag{7}$$

dann entweder hat die Eigenwertaufgabe (1), (2) *unendlich viele Eigenwerte oder ist die charakteristische Determinante ein Polynom.*

Beweis: Die Eigenwerte sind gerade alle Nullstellen der charakteristischen Determinante. Nach dem Satz gilt

$$\varrho \leq \frac{1}{n-k} < 1$$

mit Rücksicht auf (7), wo ϱ die Ordnung von $\Delta(\lambda)$ ist. Wenn unsere Eigenwertaufgabe nicht unendlich viele Eigenwerte hat, muss $\varrho = 0$, denn andererseits wäre ϱ keine ganze Zahl und dann müsste $\Delta(\lambda)$ als eine ganze Funktion einer nichtganzzahligen Ordnung unendlich viele Nullstellen haben. Die einzige Funktion der nullten Ordnung, welche endlich viele Nullstellen besitzt, ist aber das Polynom.

Korollar 2: *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes und es bilden die Eigenwerte der Eigenwertaufgabe* (1), (2) *eine unendliche Folge*

$$0 \leq |\lambda_0| \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots$$

Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{|\lambda_\nu|} = o\left(\frac{1}{\nu^{\frac{n-k}{1+\varepsilon}}}\right).$$

Beweis: Für jedes $\varepsilon > 0$ konvergiert die Reihe $\sum \frac{1}{|\lambda_\nu|^{\frac{1}{n-k}+\varepsilon}}$, d. h. auch die Reihe $\sum \frac{1}{|\lambda_\nu|^{\frac{1+\varepsilon}{n-k}}}$. Die Glieder dieser Reihe bilden eine monotone Folge. Deshalb

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu}{|\lambda_\gamma|^{\frac{1+\varepsilon}{n-k}}} = 0\,,$$

also auch

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu^{\frac{n-k}{1+\varepsilon}}}{|\lambda_\nu|} = 0\,.$$

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *O. Perron:* Über die Entwickelbarkeit der Integrale von Differentialgleichungen nach Potenzen eines Parameters und der Anfangswerte (Math. Annalen B. *113*, 1937, S. 292—303).

Резюме.

ЗАМЕЧАНИЕ О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ КРАЕВОЙ ПРОБЛЕМЫ

МИЛОШ ЗЛАМАЛ (Miloš Zlámal), Брно.

(Поступило в редакцию 12/VII 1954 г.)

Рассмотрим общую краевую проблему

$$y^n + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)\,y = \lambda[b_k(x)\,y^{(k)} + \ldots + b_0(x)\,y]\,,\; n > k\,, \quad (1)$$

$$U_\nu(y) = \sum_{i=0}^{n-1}[\alpha_\nu^i y^{(i)}(a) + \beta_\nu^i y^{(i)}(b)] = 0\,, \quad \nu = 1, \ldots, n\,. \quad (2)$$

Характеристический определитель этой проблемы является целой функцией; относительно ее порядка ϱ мы доказываем следующую

теорему: *Пусть* $a_\nu(x)$, $b_\nu(x)$ — *непрерывные функции в интервале* $\langle a, b\rangle$ *и* α_ν^i, β_ν^i — *полиномы от* λ. *Тогда характеристический определитель краевой проблемы (1), (2) будет целой функцией порядка*

$$\varrho \leq \frac{1}{n-k}.$$

Из этой теоремы следует, что в случае $n > k + 1$ или краевая проблема (1), (2) имеет бесконечное количество собственных значений или характеристический определитель является полиномом. Далее из нее вытекает асимптотическая формула

$$\lambda_\nu = o\left(\frac{1}{\nu^{\frac{n-k}{1+\varepsilon}}}\right),$$

где ε — сколь угодно малое положительное число.