František Šik

Die Anwendung der Polarität auf die direkten Produktzerlegungen einer Gruppe

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 1, 61–75

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100131

Чехословацкий математический журнал, т. 5 (80) 1955

DIE ANWENDUNG DER POLARITÄT AUF DIE DIREKTEN PRODUKTZERLEGUNGEN EINER GRUPPE

FRANTIŠEK ŠIK, Brno.

(Eingelangt 28. I. 1953.)

In der vorliegenden Arbeit wird ein spezieller Typus der Polarität ([1], IV, § 5) untersucht, die die Eigenschaft hat, dass alle in ihr abgeschlossenen Mengen eine vollständige Boolesche Algebra bilden. Die Eigenschaften dieser Polarität sind auf einer Menge ohne irgendeine Operation studiert, dann sind sie auf verschiedene Typen der Gruppen übertragen und zur Untersuchung der Struktur der direkten Produktzerlegungen auf diesen Gruppen angewandt. Die Betrachtungen dieser Arbeit wurden durch die Arbeiten [4, 5] von den K-Gruppen und K-Räumen angeregt, auf denen die Polarität der betrachteten Art realisiert worden war und deren Studium wertvolle Ergebnisse gebracht hatte.

Inhalt. § 1. Auf einer Menge ist eine Relation — die Polarität — derart definiert, dass das System aller Polarmengen (Komponenten) eine vollständige Boolesche Algebra bildet. Es wird gezeigt, dass eine beliebige Boolesche Algebra auch umgekehrt durch das System der Komponenten auf einer passenden Menge repräsentiert werden kann.

§ 2. Eine Definition wird gegeben, die die Forderungen des § 1 befriedigt.

§ 3. Die Bestimmung der Komponenten auf den zyklischen Gruppen; Folgerungen.

§ 4. Die Beziehung der Komponenten zu den direkten Produktzerlegungen auf den Gruppen wird untersucht. Eine Analogie des Schmidt-Remakschen Satzes und eine hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit der Remakschen Produktzerlegung wird gefunden.

§ 5. Es wird eine Charakterisierung der Eindeutigkeit der direkten Produktzerlegung auf einer Gruppe gegeben.

Einige in den §§ 3 bis 5 enthaltene Ergebnisse sind bekannt. Ich führe sie an, um zu zeigen, wie man verschiedene Resultate durch das auf dem Satz 1,4,4 gegründete Verfahren erreichen kann. In einer weiteren Arbeit werde ich diesen Satz auf die l-Gruppen anwenden.

§ 1.

1,1. Ich verwende die Zeichen $\subset$, $\cap$, $\cup$, $\bigcap\limits_{\alpha}$, $\bigcup\limits_{\alpha}$ für die mengentheoretische Inklusion, den Durchschnitt und die Vereinigung zweier Mengen und für den

Durchschnitt und die Vereinigung eines Systems der Mengen ($A \subset B$, $A \cap B$, $A \cup B$, $\bigcap\limits_{\alpha} A_{\alpha}$, $\bigcup\limits_{\alpha} A_{\alpha}$). Weiter werde ich die Zeichen $\leqq$, $\wedge$, $\vee$, $\bigwedge\limits_{\alpha}$, $\bigvee\limits_{\alpha}$ für die Quasi- oder teilweise Ordnung, das Infimum und Supremum zweier Elemente in einem Verband und das Infimum und Supremum eines Systems der Elemente eines vollständigen Verbandes anwenden.

1,2. Ich gebrauche die Begriffe „*Abschliessungsoperation*" und „*Polarität*", sowie sie in [1], IV, §§ 1 und 5 definiert sind. Der besseren Übersicht halber zitiere ich:

1,2,1. Definition. *Die „Abschliessungsoperation" ist eine unäre, auf dem System aller Untermengen der Menge G definierte Operation, die folgende Bedingungen befriedigt: ist $X \subset G$, $X \to \overline{X}$ in dieser Operation, dann*

$$(\mathrm{C1})\ X \subset \overline{X}\,, \quad (\mathrm{C2})\ \overline{\overline{X}} = \overline{X}\,, \quad (\mathrm{C3})\ X \subset Y \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{Y}\,.$$

Eine Menge X ist „*abgeschlossen*", wenn sie ihrer „*Abschliessung*" $\overline{X}$ gleich ist. Es gilt der Satz ([1], IV, § 1, Th. 1):

B1. *Das System Γ aller „abgeschlossenen" Mengen bildet einen vollständigen Verband, in welchem der Durchschnitt für das Infimum dient (d. h. $\bigwedge\limits_{\alpha} X_{\alpha} = \bigcap\limits_{\alpha} X_{\alpha}$, X_{α} abgeschlossen).*

1,2,2. Definition. *Es sei eine beliebige symmetrische binäre Relation δ gegeben, welche zwischen den Paaren der Elemente der Menge G definiert ist. Ist $x, y \in G$, schreiben wir $x\,\delta\,y$ (oder $y\,\delta\,x$ — die Relation ist symmetrisch), falls x und y die Relation δ befriedigen oder $x\,\bar{\delta}\,y$, wenn es nicht der Fall ist. Ist X eine beliebige Untermenge von G, bezeichnen wir mit X' die Menge aller solchen $x' \in G$, die die Relation $x\,\delta\,x'$ für alle $x \in X$ erfüllen. Man sagt, dass X' „polar" zu X in der Relation δ ist.* Weiter gilt der Satz (X'' statt $(X')'$ geschrieben) aus [1], IV, § 5, Th. 9:

B2. *Die Operation $X \to X''$ ist die Abschliessungsoperation. Die Abbildung $A \to A'$ definiert einen Dualautomorphismus in dem vollständigen Verband Γ der abgeschlossenen Mengen A in G.*

Im Verband Γ ist nach B1 $\bigwedge\limits_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcap\limits_{\alpha} A_{\alpha}$ für $A_{\alpha} \in \Gamma$. In Γ gilt weiter der Satz [1], IV, § 5 Cor:

B3. *Für beliebige abgeschlossene Mengen A_{α} in G sind die Gleichheiten*

$$(\bigwedge_{\alpha} A_{\alpha})' = \bigvee_{\alpha} A'_{\alpha}\,, \quad (\bigvee_{\alpha} A_{\alpha})' = \bigwedge_{\alpha} A'_{\alpha}$$

befriedigt. Ist δ überdies antireflexiv (d. h. entweder $x \in G \Rightarrow x\,\bar{\delta}\,x$ oder $x\,\delta\,x \Rightarrow$ $\Rightarrow x\,\delta\,y$ für alle $y \in G$), dann gilt für jede abgeschlossene Menge A

$$A \wedge A' = O\,, \quad A \vee A' = G\,,$$

wo O das kleinste Element von Γ bedeutet (also die Menge aller x von der Eigenschaft $x\ \delta\ x$). Der Verband Γ ist komplementär mit dem Komplement A' zu A.

Es ist nicht schwierig die Sätze B1, B2, B3 zu beweisen.

1,3. Wir kommen zum eigentlichen Inhalt dieses Abschnittes. Es sei G eine nichtleere, mit zwei Relationen versehene Menge und zwar:

(α) mit einer reflexiven, transitiven binären Relation $\leqq$ (*Quasiordnung*) mit einem kleinsten Element e (d. h. $e \leqq x$ für alle $x \in G$),

(β) mit einer symmetrischen, antireflexiven binären Relation δ — *Disjunktivität* ([4, 5]), die durch die folgenden Bedingungen verknüpft sind:

(a) $x \geqq y,\ x\ \delta\ y \Rightarrow e \geqq y$,

(b) $e\ \delta\ e$,

(c) $x\ \delta\ y,\ z \leqq x \Rightarrow z\ \delta\ y$,

(d) $x\ \bar{\delta}\ y \Rightarrow$ ein $z \in G$ existiert, dass z non $\leqq e,\ z \leqq x,\ z \leqq y$.

1,3,1. Bemerkung. Die Mengen $X, Y \subset G$ erfüllen die Relation δ (dann sagen wir, dass X, Y *disjunktiv sind* und schreiben $X\ \delta\ Y$), wenn $x\ \delta\ y$ für jedes $x \in X,\ y \in Y$. Die Menge aller mit der Menge X disjunktiven Elemente $x' \in G$ bezeichne ich X' und benenne *das disjunktive Komplement der Menge* X (X' ist also in δ polar zu X).

1,3,2. Wir beweisen vorläufig zwei die Relationen $\leqq$ und δ betreffenden Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Die Menge O aller $x \in G$, für die $x\ \delta\ x$, hat G für das disjunktive Komplement und dient selbst der ganzen Menge G als disjunktives Komplement (d. h. $O' = G,\ G' = O$).*

Hilfssatz 2. *Die Menge O ist das System aller kleinsten Elemente in G (d. h. $x \in O \Leftrightarrow x \leqq e$).*

Beweis des Hilfssatzes 1. Die Antireflexivität gibt: $x \in O \Rightarrow x\ \delta\ G$ und daher einerseits $O' = G$ und anderseits (mit Hilfe der Symmetrie) $O \subset G'$. Umgekehrt $y\ \delta\ G \Rightarrow y\ \delta\ y \Rightarrow y \in O$ und endlich $G' \subset O$.

Beweis des Hilfssatzes 2. Die Eigenschaft (a) schliesst O in die Menge aller kleinsten Elemente in G ein ($x\ \delta\ x,\ x \leqq x \Rightarrow x \leqq e$), die Eigenschaft (b) mit der Antireflexivität und (c) umgekehrt ($e\ \delta\ e \Rightarrow e\ \delta\ y;\ y \leqq e,\ e\ \delta\ y \Rightarrow y\ \delta\ y$).

Man kann also in der Bedingung (d) anstatt z non $\leqq e$ die Relation $z\ \bar{\in}\ O$ schreiben.

1,3,3. Ziehen wir nun einen Schluss aus den zitierten Sätzen B1, B2, B3.

Die Operation $X \to X''$ auf dem System aller Untermengen X in G, welche sich zu einer symmetrischen, antireflexiven Relation δ in G (ohne weitere Forderungen) bezieht, definiert nach B2 *auf G eine Abschliessungsoperation. Die Menge Γ aller abgeschlossenen Mengen A ist der vollständige Verband und die Abbildung $A \to A'$ bildet sie dual automorph ab.* Der Satz B3 bestätigt, dass *Γ der vollstän-*

dige komplementäre Verband mit dem kleinsten Element O, mit dem grössten G und mit dem Komplement A' zu $A \in \Gamma$ ist.

1,4. Wenn ich die Eigenschaften der Relation δ um die weiteren (a) bis (d) erweitere, so kann ich eine stärkere Behauptung aussprechen, die ich auch sofort formuliere, sobald ich den folgenden, für die Applikationen zweckmässigen Begriff eingeführt habe.

1,4,1. Definition. *Das disjunktive Komplement X' der Menge $X \subset G$ nenne ich (mit X disjunktive) Komponente.*

1,4,2. Hilfssatz. *Der Durchschnitt eines beliebigen Systems der Komponenten ist eine Komponente.*

Beweis. Es sei $\{A_\alpha\}$ das gegebene System der Komponenten, welche zu den Mengen X_α disjunktiv sind, d. h. $A_\alpha = X'_\alpha$. Wählen wir $x \in \bigcap\limits_\alpha X'_\alpha$; dann $x\delta \bigcup\limits_\alpha X_\alpha$; ist $y \bar{\in} \bigcap\limits_\alpha X'_\alpha$, dann existiert ein solcher Index α_0, dass $y \bar{\in} X'_{\alpha_0}$, also $y \bar{\delta} X_{\alpha_0}$; daher $y \bar{\delta} \bigcup\limits_\alpha X'_\alpha$. $\bigcap\limits_\alpha X_\alpha$ ist also die zu $\bigcup\limits_\alpha X_\alpha$ disjunktive Komponente.

Die vorhergehende Behauptung berechtigt zu folgender

1,4,3. Definition. *Die kleinste die Menge X umfassende Komponente bezeichnen wir $\overline{X}$. Man sagt, dass die Komponente $\overline{X}$ durch die Menge X erzeugt ist.*

1,4,4 Hauptsatz. *Das System aller Komponenten in G bildet eine vollständige Boolesche Algebra; ihre teilweise Ordnung ist durch die mengentheoretische Inklusion gegeben; für ein beliebiges System der Komponenten $\{A_\alpha\}$ gilt $\bigwedge\limits_\alpha A_\alpha = \bigcap\limits_\alpha A_\alpha$, $\bigvee\limits_\alpha A_\alpha = \overline{\bigcup\limits_\alpha A_\alpha}$ und das Komplement (im Sinne der Booleschen Algebra) der Komponente A ist A'.*

Zuerst beweisen wir, dass das System aller Komponenten dasselbe wie das System aller (in Bezug auf die Abschliessungsoperation $X \to X''$) abgeschlossenen Mengen in G ist. Den Beweis setzen wir aus einigen — auch selbständig nützlichen — Hilfsbehauptungen zusammen.

1,4,5. (1) $X \subset Y \subset G \Rightarrow X' \supset Y' \Rightarrow X'' \subset Y''$,
(2) $X \subset X''$,
(3) $X' = X'''$.

Beweis. (1) ist klar. (2): $x \in X \Rightarrow x \,\delta\, X' \Rightarrow x \in X'' \Rightarrow X \subset X''$. (3): Verwenden wir (2) auf die Menge X', so bekommen wir $X' \subset X'''$. Benützen wir (1) auf $X \subset X''$, bekommen wir $X' \supset X'''$. Daher (3).

Die Eigenschaften (1), (2), (3) bestätigen, dass die Operation $X \to X''$ eine Abschliessungsoperation im Sinne der Definition 1,2,1 ist. Die letzte Behauptung (3) reiht die Komponenten unter die abgeschlossenen Mengen ein, wie der folgende Satz bezeugt.

1,4,6. Hilfssatz. *Für die beliebige Komponente A ist $A = A''$.*

Beweis. In 1,4,5 (3) setze $X' = A$.

Um umgekehrt zu beweisen, dass jede abgeschlossene Menge eine Komponente sein muss, beweisen wir den

1,4,7. Hilfssatz. *Es gilt:* $(\overline{X})' = X' = \overline{X}'$.

Beweis. Aus $X'' \supset X$ und aus der Definition der Komponente $\overline{X}$ folgt $X'' \supset \overline{X}$. Daher nach 1,4,5 (1) und (3): $X' = X''' \subset (\overline{X})'$. Nach (1) $X \subset \overline{X} \Rightarrow$ $\Rightarrow X' \supset (\overline{X})'$, also $X' = (\overline{X})'$. Die zweite Gleichheit folgt daraus, dass X' Komponente ist.

1,4,8. Hilfssatz. *Es ist* $\overline{X} = X''$.

Beweis. $\overline{X}$ ist eine Komponente; also nach 1,4,6 ist $\overline{X} = (\overline{X})''$ und nach 1,4,7 ist $\overline{X} = (\overline{X})'' = [(\overline{X})']' = (X')' = X''$.

Ist also X abgeschlossen, dann $X = X'' = \overline{X}$, so dass X Komponente ist. Die Eigenschaft „Komponente sein“ und „abgeschlossen sein“ sind äquivalent. Die Definition der abgeschlossenen Menge als der Menge X' ist für die Applikationen bequemer als die ursprüngliche, wir werden sie also weiter anwenden. Benütze ich nun den Satz 1,3,3, so ist der Satz 1,4,4 bis auf die Distributivität bewiesen. Durch Anwendung des Satzes 1,3,3 könnte ich einige einfache Deduktionen vermeiden. Wegen der Vollständigkeit führe ich den ganzen Beweis des Satzes 1,4,4 selbständig durch.

Die Kommutativität der Operationen $\wedge$ und $\vee$ ist klar. Die Assoziativität der Operation $\wedge$ ist auch klar, für $\vee$ beweisen wir sie, wie folgt: $\overline{\overline{X \cup Y} \cup Z} \supset$ $\supset \overline{X \cup Y \cup Z}$ für drei beliebige $X, Y, Z \subset G$, weil $\overline{X \cup Y} \supset X \cup Y$. Anderseits $\overline{X \cup Y \cup Z} \supset \overline{X \cup Y}$, $\overline{X \cup Y \cup Z} \supset Z$ gibt $\overline{X \cup Y \cup Z} \supset \overline{\overline{X \cup Y} \cup Z}$. Zusammen mit dem vorigen Resultat: $\overline{\overline{X \cup Y} \cup Z} = \overline{X \cup Y \cup Z}$. Analog $\overline{X \cup Y \cup Z} = \overline{X \cup \overline{Y \cup Z}}$ und daher das gesuchte Assoziativitätsgesetz. Die Vollständigkeit der Algebra ist klar: $\inf_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha A_\alpha$, $\sup_\alpha A_\alpha = \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}$. Das kleinste und das grösste Element ist O und G (siehe 1,3,2 (1)).

1,4,9. Hilfssatz. *Das Komplement der Komponente A ist ihr disjunktives Komplement A'.*

Beweis. O liegt in der beliebigen Komponente A; daher $O \subset A \wedge A' =$ $= A \cap A' = \{$das System aller Elemente $a \in A$, für die $a \,\delta\, a\} \subset O$. Also $A \wedge A' = O$. Weiter $a \in (A \cup A')' \Rightarrow a \,\delta\, A$, $a \,\delta\, A'$ und dann $a \in A \wedge A' = O$. Also $O \supset (A \cup A')'$. Daher $G = O' \subset (A \cup A')'' = \overline{A \cup A'} = A \vee A'$, w. z. b. w.

Ich bemerke, dass die Eigenschaften (a) bis (d) aus 1,3 bisher keineswegs benützt wurden (ausser dem bisher nicht angewandten Hilfssatz 2 aus 1,3,2). Zum Beweis der übrigbleibenden Behauptungen im Hauptsatz 1,4,4 können wir nicht ohne sie ausreichen.

Die Eigenschaft (c) bestätigt unmittelbar den

1,4,10. Hilfssatz. *Die Komponente hat die Eigesnchaft der Normalität, d. h. ist A eine Komponente, $x \in A$, $z \leqq x$, dann $z \in A$.*

Beweis. Es existiert eine solche Menge X, dass $X' = A$. Ist $x \in A = X'$, so $x \, \delta \, X$. Ist $z \leqq x$, dann folgt aus (c) $z \, \delta \, X$, d. h. $z \in X' = A$.

Den Beweis der Distributivität der Operationen $\wedge$ und $\vee$ beginnen wir mit der

1,4,11. Definition. *Ein System $\{A_\alpha\}$ der Komponenten heisst vollständig in der Komponente B, wenn $B \supset \bigcup_\alpha A_\alpha$ und wenn $x \in B$, $x \, \delta \bigcup_\alpha A_\alpha \Rightarrow x \in O$* (s. [4]).

Eine gleichwertige Definition der Vollständigkeit ist in dem folgenden Satz gegeben.

1,4,12. Hilfssatz. *Das System der Komponenten $\{A_\alpha\}$ ist vollständig in der Komponente B dann und nur dann, wenn $B = \bigvee_\alpha A_\alpha$.*

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend: Wählen wir $x \in \bigvee_\alpha A_\alpha$, $x \, \delta \bigcup_\alpha A_\alpha$. Also $x \in (\overline{\bigcup_\alpha A_\alpha})'$ (nach 1,4,7). Dann $x \in \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} = \bigvee_\alpha A_\alpha \Rightarrow x \in \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} \cap (\overline{\bigcup_\alpha A_\alpha})' \subset \subset O$.

Notwendigkeit: Bezeichnen wir $\bigvee_\alpha A_\alpha = P$. Dann $B \supset P$. Ist $B \neq P$, dann existieren nach der Voraussetzung solche Elemente $b \in B$, $p' \in P'$, dass $b \, \bar{\delta} \, p'$, während im entgegengesetzten Fall $B \subset P$ wäre. Aus der Eigenschaft (d) im 1,3 folgt die Existenz eines solchen Elementes $z \bar{\in} O$, dass $b \geqq z$, $p' \geqq z$. Die Normalität gibt: $z \in B$, $z \in P'$. Daher $z \, \delta \, P$ und auch $z \, \delta \bigcup_\alpha A_\alpha$; da noch $z \bar{\in} O$, folgt aus der Vollständigkeit des Systems $\{A_\alpha\}$ in B, dass $z \bar{\in} B$. Diser Widerspruch beweist den Hilfssatz.

1,4,13. Hilfssatz. *Es seien A, B, C Komponenten; das System $A \wedge B$, $A \wedge C$ ist vollständig in $A \wedge (B \vee C)$, also $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) = A \wedge (B \vee C)$.*

Beweis. Es ist $A \wedge (B \vee C) \supset A \wedge B$, $A \wedge C$. Wählen wir ein beliebiges Element $x \in A \wedge (B \vee C)$, $x \bar{\in} O$. Nach 1,4,12 ist das System B, C vollständig in $B \vee C$. Aus der Vollständigkeit folgt, dass wenigstens in einer der Komponenten B, C, z. B. in B, ein solches Element b existiert, dass $x \, \bar{\delta} \, b$; also existiert ein solches $q \bar{\in} O$, dass $x \geqq q$, $b \geqq q$. Aus der Normalität folgt $q \in A \wedge (B \vee C)$, $q \in B$ und also $q \in A \wedge B$. Es gilt auch $x \, \bar{\delta} \, q$, weil $x \, \delta \, q$, $x \leqq q$ nach (a) $q \in O$ verlangen würde. Wir haben $x \bar{\in} O$, $x \in A \wedge (B \vee C)$ und daher $x \, \bar{\delta} \, [(A \wedge B) \cup \cup (A \wedge C)]$, denn $x \, \bar{\delta} \, q$. Also ist das System $A \wedge B$, $A \wedge C$ vollständig in $A \wedge (B \vee C)$. Die Gleichung $(A \wedge B) \vee (A \vee C) = A \wedge (B \vee C)$ folgt unmittelbar aus 1,4,12.

Die Distributivität ist nun durch den Satz 1,4,13 garantiert und der Hauptsatz vollständig bewiesen.

Die Umkehrung des Satzes 1,4,4 gibt der folgende

1,5. Satz. *Jede vollständige Boolesche Algebra kann man als Menge aller Komponenten auf einer passend gewählten Menge repräsentieren.*

Beweis. Bekanntlich ([4], XIII, Th. 2,19) ist jede vollständige Boolesche Algebra isomorph der Basis einer gewissen K-Gruppe mit Einselement. Nun ist aber die Basis einer solchen K-Gruppe isomorph mit der Menge aller Komponenten der K-Gruppe (siehe [5], Seite 44). Dabei sind die Komponenten der K-Gruppe so definiert, dass sie die charakteristische Eigenschaft der Komponenten in unserem Sinne besitzen. Man definiert nämlich in einer K-Gruppe G: zwei Elemente $x, y \in G$ heissen disjunktiv, falls $|x| \wedge |y| = 0$, wo 0 das Nullelement der K-Gruppe ist. Dann lautet die genannte charakteristische Eigenschaft, wie folgt (siehe [5], Seite 43): Ist $E \subset G$, dann bildet die Menge aller Elemente der K-Gruppe G, die disjunktiv zu E sind, eine Komponente der K-Gruppe. Umgekehrt, jede Komponente der K-Gruppe G ist eine Menge von Elementen von G, die disjunktiv zu einer gewissen Untermenge von G sind. Nun fahren wir folgendermassen fort: Auf der oben erwähnten K-Gruppe führen wir eine Quasiordnung durch die Relation $\prec$ ein: $x \prec y \Leftrightarrow |x| \leqq |y|$. Dabei bedeutet die Relation $\leqq$ die Halbordnung der K-Gruppe G. Das kleinste Element in G in der Quasiordnung $\prec$ ist das Nullelement 0 der K-Gruppe. Wir nennen zwei Elemente x, $y \in G$ disjunktiv in der Relation δ dann und nur dann, wenn $|x| \wedge |y| = 0$. Die Relation δ ist offenbar symmetrisch und antireflexiv. Die Bedingungen (a) bis (c) sind offenbar erfüllt, der Beweis der Bedingung (d) folgt: $x \bar{\delta} y$ bedeutet $|x| \wedge |y| \neq 0$. Das gesuchte Element z ist z. B. $z = |x| \wedge \wedge |y|$. Das system aller Komponenten auf G nach der Definition 1,4,1 in Bezug auf die Relation δ ist identisch mit dem System aller Komponenten, so wie sie in der K-Gruppe definiert sind. Damit ist der Beweis erbracht.

§ 2.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe; $a, x, \ldots$ ihre Elemente, e ihr Einheitselement.[1])

Auf der Menge $\mathfrak{G}$ führen wir folgenderweise eine Quasiordnung ein:

(*) $$x \leqq y \text{ dann und nur dann, wenn } (x) \subset (y)\,,$$

wo (x) den kleinsten Normalteiler in $\mathfrak{G}$ bedeutet, der x umfasst. Durch die Relation (*) ist offenbar eine Quasiordnung definiert, e ist in ihr das kleinste Element, so dass $\mathfrak{G}$ die Eigenschaft (α) hat.

Die Disjunktivität. Zwei Elemente $x, y \in \mathfrak{G}$ nennt man disjunktiv, $x \, \delta \, y$, wenn

(**) $$z \in \mathfrak{G},\ z \leqq x,\ z \leqq y \Rightarrow z = e\,.$$

---

[1]) Die gerade aus dem Element e bestehende Untergruppe werde ich wieder nur e bezeichnen.

Es ist klar, das die Relation (**) symmetrisch und antireflexiv ist und dass die Relationen (*) und (**) die Eigenschaften (a) bis (d) erfüllen.

Aus der Definition (*) folgt leicht der folgende

2,1. Hilfssatz. *Ist $x \delta y$, dann $(x) \delta (y)$.*

Beweis. Es sei $x \delta y$. Dann $(x) \cap (y) = e$; also gilt für die beliebigen $a \in (x)$, $b \in (y)$: $(a) \cap (b) \subset (x) \cap (y) = e$, d. h. $a \delta b$.

2,2. Bemerkung. Eine andere nützliche Quasiordnung und Disjunktivität mit den verlangten Eigenschaften werden in § 5 gegeben werden.

§ 3.

Wir bestimmen die Komponenten auf den zyklischen Gruppen.

Auf der unendlichen zyklischen Gruppe gibt es offenbar nur triviale Komponenten.

Lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf die endliche (additiv geschriebene) zyklische Gruppe (a) der Ordnung N. Wenn man die Disjunktivität in (a) nach dem § 2 einführt, so umfasst jede Komponente in (a) mit jedem Element $na \in (a)$ zugleich die ganze Untergruppe (na). Man beweist leicht, dass die Elemente ma, $na \in (a)$ dann und nur dann disjunktiv sind, wenn $[m, n] = 0$ (mod N).

Hilfssatz. $n_i a \delta ra$, $i = 1, 2, \ldots, m \Rightarrow (n_1, \ldots, n_m) a \delta ra$.

Beweis. Nach der Voraussetzung gilt $[n_i, r] = 0$ (mod N) für $i = 1, 2, \ldots, m$, also $([n_1, r], \ldots, [n_m, r]) \equiv 0$ (mod N). In dem distributiven[2]) Verband aller natürlichen Zahlen (in dem $m \vee n$ gleich $[m, n]$ und $m \wedge n$ gleich (m, n) ist) gilt:

$$([n_1, r], \ldots, [n_m, r]) = [(n_1, \ldots, n_m), r]; \text{ also } (n_1, \ldots, n_m)\, a \,\delta\, ra\,.$$

Es sei R ein Teil von (a). In dem Systeme $\{n_i a\}_{i=1}^{s}$ aller solchen Elemente, für die $n_i a \delta R$ gilt, existiert ein solches $n_{i_0} a$ mit der Eigenschaft $n_{i_0} \mid n_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. Gemäss dem Hilfssatz ist nämlich $(n_1, \ldots, n_s)\, a \,\delta\, ra$ für jedes $ra \in R$; also $(n_1, \ldots, n_s) = n_{i_0} \in \{n_i\}_{i=1}^{s}$, $n_{i_0} \mid n_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. Daraus folgt nun sofort, dass die zu der Menge R disjunktive Komponente die Untergruppe $(n_{i_0} a)$ von (a) ist.

Satz. *Es sei $N = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$ (p_i verschiedene Primzahlen) die Ordnung der Gruppe (a). Die Komponenten in (a) sind genau die Untergruppen von (a), welche durch die Elemente $p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \ldots p_{i_k}^{\alpha_{i_k}} a$ erzeugt sind. Alle Komponenten in (a) bilden eine Boolesche Algebra, in der das Supremum die Summe der zugehörigen Untergrup-*

[2]) Die Distributivität dieses Verbandes folgt daraus, dass $(m, r) = (m, s)$, $[m, r] = [m, s] \Rightarrow (m, r)[m, r] = (m, s)[m, r] \Rightarrow mr = ms \Rightarrow r = s$.

pen und das Infimum ihr Durchschnitt ist. Die komplementären Komponenten haben Ordnungen, deren Produkt N ist.[3])

Beweis. Nach dem vorhergehenden ist die zu der Menge $(p_1^{\beta_1} \dots p_n^{\beta_n} a)$ (wo $\beta_{i_1} < \alpha_{i_1} \dots, \beta_{i_k} < \alpha_{i_k}$ und für die übrigbleibenden i $\beta_i = \alpha_i$) disjunktive Komponente die Untergruppe $(p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots p_{i_k}^{\alpha_{i_k}} a)$ von (a). Die Behauptung von den komplementären Komponenten ist offenbar. Endlich ist die Summe zweier Komponenten die kleinste diese Komponenten umfassende Untergruppe und da sie offenbar auch eine Komponente ist, so ist ihr Supremum. Der Rest der Behauptung folgt aus 1,4,4.

Eine unmittelbare Folgerung des Satzes ist der folgende Satz von der direkten Produktzerlegung der zyklischen Gruppe.

Korollar. *Die zyklische Gruppe, deren Ordnung Produkt je zweier unteilbarer Zahlen $n_1, n_2, \dots, n_m$ ist, kann man genau auf eine Weise in die direkte Summe der Untergruppen von den Ordnungen $n_1, n_2, \dots, n_m$ zerlegen* ([9], III, § 4, Satz 16).

§ 4.

In diesem Paragraphen werden wir die Beziehung der Komponenten zu den direkten Produktzerlegungen besonders auf den Gruppen mit der Minimalbedingung für die Normalteiler untersuchen.

4,1. Hilfssatz. *Die Komponente A auf einer Gruppe $\mathfrak{G}$ ist die Vereinigung der in A maximalen Normalteiler.*[4])

Beweis. Alle in A enthaltenen Normalteiler bilden ein nichtleeres System Δ der Elemente, welches durch die mengentheoretische Inklusion teilweise geordnet ist. Ist Δ_1 ein einfach geordneter Teil des Systems Δ, dann ist die Vereinigung aller Elemente aus Δ_1 eine obere Beschränkung von Δ_1. Nach dem Zornschen Satz existiert über jedem Element in Δ ein maximales Element in Δ, also existiert über jedem Normalteiler $\subset A$ ein in A maximaler Normalteiler. Da jedoch mit jedem $x \in A$ auch $(x) \subset A$ ist, so ist der Satz bewiesen.

4,2. Satz. *Ist $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \dots \times \mathfrak{A}_n$ eine direkte Produktzerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$, dann existiert ein solches System von Komponenten $A_1, A_2, \dots, A_n$, dass für $i, k = 1, 2, \dots, n$ gilt:*

(1) $A_i \supset \mathfrak{A}_i$,

(2) $A_i \cap A_k = e$ *für* $i \neq k$,

(3) $\mathfrak{A}_i$ *ist ein in A_i maximaler Normalteiler.*

[3]) Die Behauptung dieses Satzes ist als ein Spezialfall in der Behauptung des Satzes aus § 5 enthalten. Man muss nur beweisen, dass die Disjunktivität des § 3 dieselbe ist als die im § 5.

[4]) Ist die Komponente A selbst ein Normalteiler in $\mathfrak{G}$, dann halten wir A für einen maximalen Normalteiler in A.

Beweis. Es genügt $A_i = \overline{\mathfrak{A}_i}$ zu wählen. Offenbar $A_i \supset \mathfrak{A}_i$. Für $k \neq i$ ist weiter $A_i' = \mathfrak{A}_i' \supset \overline{\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_{i-1}\mathfrak{A}_{i+1} \ldots \mathfrak{A}_n} \supset \overline{\mathfrak{A}_k} = A_k$, so dass die Relation $e = A_i \cap A_i' \supset A_i \cap A_k$ die Eigenschaft (2) bestätigt. Die Eigenschaft (3): Wenn es für einen Normalteiler $\mathfrak{B}_i$ $A_i \supset \mathfrak{B}_i \supset \mathfrak{A}_i$ gibt, so geben die Relationen $\mathfrak{B}_i \cap (\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_{i-1}\mathfrak{A}_{i+1} \ldots \mathfrak{A}_n) \subset A_i \cap A_i' = e$ und $\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_{i-1}\mathfrak{B}_i\mathfrak{A}_{i+1} \ldots \mathfrak{A}_n = \mathfrak{G}$ sofort $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}_i$.

4,3. Satz. *Ist $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n$ eine direkte Produktzerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$, dann existiert ein solches System der Komponenten $A_1, \ldots, A_n$, dass für $i, k = 1, \ldots, n$ gilt:*

(1) *$A_i \cap A_k = e$ für $i \neq k$,*

(2) $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_{i-1} \vee A_i = \overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_{i-1}\mathfrak{A}_i}$,

(3) *ist $\{B_k\}$ ein mit den Eigenschaften* (1) *und* (2) *versehenes System von Komponenten, dann ist $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_k$ ein in $B_1 \vee \ldots \vee B_k$ maximaler Normalteiler.*

Bemerkung. Von den Eigenschaften (1) und (2) leitet man leicht die folgenden ab:

(1') $(A_{i_1} \vee A_{i_2} \vee \ldots \vee A_{i_j}) \cap (A_{k_1} \vee A_{k_2} \vee \ldots \vee A_{k_l}) = e$, wenn $\{i_r\}$ und $\{k_s\}$ zwei elementfremde Systeme von Indizen (von den natürlichen Zahlen zwischen 1 und n) sind,

(2') $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n = \mathfrak{G}$, d. h. das System $\{A_i\}$ ist vollständig in $\mathfrak{G}$,

(3') $A_i \vee A_{i+1} \vee \ldots \vee A_{k-1} \vee A_k \supset \mathfrak{A}_i\mathfrak{A}_{i+1} \ldots \mathfrak{A}_{k-1}\mathfrak{A}_k$ für $1 \leqq i \leqq k \leqq n$ (u. daher als ein Spezialfall für $k = i$: $A_i \supset \mathfrak{A}_i$),

(4') $\mathfrak{A}_1$ resp. $\mathfrak{A}_n$ ist ein in A_1 resp. A_n maximaler Normalteiler.

Beweis der Bemerkungen. (1') folgt aus der Distributivität in der Algebra der Komponenten und aus (1). (2') folgt aus (2) für $i = n$. (3'): Aus (2) folgt: $A_1 \vee \ldots \vee A_k \supset \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_k$; weiter folgt aus (1') $(A_i \vee A_{i+1} \vee \ldots \vee A_n) \wedge \wedge (A_1 \vee \ldots \vee A_{i-1}) = e$. Zusammen mit (2') und (2) haben wir $A_i \vee \ldots \vee A_n = (A_1 \vee \ldots \vee A_{i-1})' = (\overline{\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_{i-1}})' \supset \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n$. Wenn man die Durchschnitte links und rechts in den Relationen $A_1 \vee \ldots \vee A_k \supset \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_k$, $A_i \vee \vee \ldots \vee A_n \supset \mathfrak{A}_i \ldots \mathfrak{A}_n$ durchführt, bekommt man für $i \leqq k$: $(A_1 \vee \ldots \vee A_k) \wedge \wedge (A_i \vee \ldots \vee A_n) \supset \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_k \cap \mathfrak{A}_i \ldots \mathfrak{A}_n$. Die linke Seite lässt sich auf die Form $[(A_1 \vee \ldots \vee A_{i-1}) \vee (A_i \vee \ldots \vee A_k)] \wedge [(A_i \vee \ldots \vee A_k) \vee (A_{k+1} \vee \ldots \vee A_n)] = A_i \vee \ldots \vee A_k$ (nach (1')) und die rechte Seite auf die Form $\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_k \cap \cap \mathfrak{A}_i \ldots \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_i \ldots \mathfrak{A}_k$ überführen: Erstens $\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_k \cap \mathfrak{A}_i \ldots \mathfrak{A}_n \supset \mathfrak{A}_i \ldots \mathfrak{A}_k$. Gehört weiter $x \in \mathfrak{G}$ links, dann $x = x_1 \ldots x_k = y_i \ldots y_n$ $(x_r \in \mathfrak{A}_r, y_r \in \mathfrak{A}_r)$ und daher $x_1 = \ldots = x_{i-1} = e$, $x_i = y_i, \ldots, x_k = y_k$, $y_{k+1} = \ldots = y_n = e$, d. h. $x = x_i \ldots x_k \in \mathfrak{A}_i \ldots \mathfrak{A}_k$. Damit ist (3') bewiesen. Der Beweis von (4') für $\mathfrak{A}_n$ ist ähnlich wie der von 4,2 (3). Für $\mathfrak{A}_1$ ist die Behauptung in (2) und (3) enthalten.

Beweis des Satzes. Bezeichnen wir $\mathfrak{A}^k = \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_k$. Setzen wir $A_1 = \overline{\mathfrak{A}_1}$ und $A_k = (\overline{\mathfrak{A}^{k-1}})' \cap \overline{\mathfrak{A}^k}$ für $k = 2, 3, \ldots, n$. Diese Komponenten haben die verlangten Eigenschaften: (1) $A_i \cap A_k = (\overline{\mathfrak{A}^{i-1}})' \cap \overline{\mathfrak{A}^i} \cap (\overline{\mathfrak{A}^{k-1}})' \cap \overline{\mathfrak{A}^k}$. Für

$1 \leqq i < k \leqq n$ gilt $\mathfrak{A}^i \subset \mathfrak{A}^{k-1}$, d. h. $(\mathfrak{A}^i)' \supset (\mathfrak{A}^{k-1})'$, so dass $(\mathfrak{A}^{k-1})' \cap \overline{\mathfrak{A}^i} \subset$ $\subset (\mathfrak{A}^i)' \cap \overline{\mathfrak{A}^i} = e$. Schliesslich $A_i \cap A_k = e$. (2) Es ist $A_1 = \overline{\mathfrak{A}}_1$; ist für $1 \leqq$ $\leqq k < n$ $A_1 \vee \ldots \vee A_k = \overline{\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_k}$, dann $A_1 \vee \ldots \vee A_k \vee A_{k+1} = \overline{\mathfrak{A}^k} \vee$ $\vee [(\mathfrak{A}^k)' \wedge \overline{\mathfrak{A}^{k+1}}] = [\overline{\mathfrak{A}^k} \vee (\mathfrak{A}^k)'] \wedge [\overline{\mathfrak{A}^k} \vee \overline{\mathfrak{A}^{k+1}}] = \overline{\mathfrak{A}^{k+1}}$. (3) Es sei $\{B_k\}$ ein System der Komponenten mit den Eigenschaften (1) und (2). Wenn für einen Normalteiler $\mathfrak{B}_i$ $B_1 \vee \ldots \vee B_i \supset \mathfrak{B}_i \supset \mathfrak{A}^i$ gilt, dann führen die Relationen $\mathfrak{B}_i \mathfrak{A}_{i+1} \ldots \mathfrak{A}_n = \mathfrak{G}$ und $e = (B_1 \vee \ldots \vee B_i) \wedge (B_1 \vee \ldots \vee B_i)' \supset \mathfrak{B}_i \wedge (\mathfrak{A}^i)' \supset$ $\supset \mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{A}_{i+1} \ldots \mathfrak{A}_n$ zur Gleichheit $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}^i$. Der Satz ist bewiesen.

Offen bleibt die Frage nach einer Umkehrung des Satzes. Also z. B.: Besitzt jede Komponente einen direkten Faktor von $\mathfrak{G}$? Gilt für jeden in einer Komponente A maximalen Normalteiler $\mathfrak{A}$ und für jeden in dem zu A disjunktiven Komplement A' maximalen Normalteiler $\mathfrak{B}$ sogar die Relation $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{G}$? Oder: unter welchen Bedingungen tritt einer der angeführten Fälle ein? Die zyklische Gruppe ist der Fall, wie wir in § 3 gesehen haben. Ein weiteres Beispiel wird in § 5 gegeben werden und zwar die Gruppe mit der eindeutigen direkten Produktzerlegung.

Nun die Hauptergebnisse dieses Paragraphen.

4,4. Satz. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit der Minimalbedingungen für die Normalteiler. Es seien K_1, K_2 zwei disjunktive Komponenten. Weiter sei*

$$\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{G} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2,\ K_1 \supset \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1;\ K_2 \supset \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2\,.$$ [5])

Dann

(1) $\mathfrak{A}_i \simeq \mathfrak{B}_i$ $(i = 1, 2)$,

(2) $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{G}$,

(3) $\omega = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$ *ist ein normaler Automorphismus der Gruppe $\mathfrak{G}$, welcher die $\mathfrak{A}$-Zerlegung auf die $\mathfrak{B}$-Zerlegung transformiert (d. h. $\mathfrak{A}_i^\omega = \mathfrak{B}_i$); der normale Operator $\alpha_i\beta_i$, $i = 1, 2$, induziert auf $\mathfrak{A}_i$ den Isomorphismus unter* (1) *(d. h. $\mathfrak{A}_i^{\alpha_i\beta_i} = \mathfrak{B}_i$).*[6])

Die Abbildungen α_1 resp. α_2 (β_1 resp. β_2) nennt man die Projektionen der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf ihre Untergruppen $\mathfrak{A}_1$ resp. $\mathfrak{A}_2$ ($\mathfrak{B}_1$ resp. $\mathfrak{B}_2$), die zur direkten Produktzerlegung $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{G}$ ($\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{G}$) gehören, und man versteht darunter die Abbildungen $x \to x_1$ resp. $x \to x_2$ ($x \to y_1$ resp. $x \to y_2$), wo bei $x \in \mathfrak{G}$, $x = x_1x_2$, $x_1 \in \mathfrak{A}_1$, $x_2 \in \mathfrak{A}_2$ ($x \in \mathfrak{G}$, $x = y_1y_2$, $y_1 \in \mathfrak{B}_1$, $y_2 \in \mathfrak{B}_2$).

Beweis. Wie bekannt, sind $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ normale Operatoren, also ist $\mathfrak{B}_1^{\alpha_1}$ ein Normalteiler und $\mathfrak{B}_1^{\alpha_1} \subset \mathfrak{A}_1$. Dabei ist $\alpha_1 \mid \mathfrak{B}_1$ (die durch die Abbildung α_1

[5]) Man kann die Komponenten aus den Voraussetzungen dieses Satzes auslassen und durch die Voraussetzung $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{B}_2 = e = \mathfrak{A}_2 \cap \mathfrak{B}_1$ ersetzen. Die in diesem und im folgenden Satz angeführte Formulation soll die wechselseitige Beziehung der Sätze 4,5 und 4,6 betonen.

[6]) Akad. Kořínek hat mich aufmerksam gemacht, dass die Teile (1) und (3) resp. (2) der Behauptung des Satzes 4,4 eine Folgerung der in seiner Abhandlung [6] angeführten Sätze 3,5 und 3,6 resp. 5,1 sind.

induzierte Teilabbildung der Gruppe $\mathfrak{B}_1$) resp. $\beta_1 \mid \mathfrak{A}_1$ eine normalisomorphe Abbildung der Gruppe $\mathfrak{B}_1$ in $\mathfrak{A}_1$ resp. $\mathfrak{A}_1$ in $\mathfrak{B}_1$.[7] Man setzt den nichttrivialen Fall $\mathfrak{B}_1 \neq e$ voraus. Ist $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{G}_1 \neq \mathfrak{G}$, dann enthält $\mathfrak{G}_1$ nicht $\mathfrak{A}_1$ und also $e \neq \mathfrak{B}_1^{\alpha_1} = \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{G}_1 \Rightarrow \mathfrak{B}_1^{\alpha_1} \subsetneqq \mathfrak{A}_1$. Ähnlich gilt für den Normalteiler $\mathfrak{B}_1^{\alpha_1\beta_1}$ $e \neq \mathfrak{B}_1^{\alpha_1\beta_1} \subsetneqq \mathfrak{B}_1$ und weiter $e \neq \mathfrak{B}_1^{\alpha_1\beta_1\alpha_1} \subsetneqq \mathfrak{B}_1^{\alpha_1}$, $e \neq \mathfrak{B}_1^{\alpha_1\beta_1\alpha_1\beta_1} \subsetneqq \mathfrak{B}_1^{\alpha_1\beta_1}$ u. s. w. So bekommen wir eine unendliche abnehmende Folge von verschiedenen Normalteilern $\mathfrak{A}_1 \supsetneqq \mathfrak{B}_1^{\alpha_1} \supsetneqq \mathfrak{B}_1^{\alpha_1\beta_1\alpha_1} \supsetneqq \ldots$ gegen die Voraussetzung. Daher $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{A}_2$ (ähnlich $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{G}$) und β_1 induziert auf $\mathfrak{A}_1$ einen normalen $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$-Isomorphismus. $\alpha_1\beta_1$ ist also ein normaler Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{B}_1$ und auch ein normaler $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$-Isomorphismus, da $a^{\alpha_1} = a$ für $a \in \mathfrak{A}_1$. Ähnlich ist $\alpha_2\beta_2$ ein normaler Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{B}_2$ una auch ein normaler $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$-Isomorphismus. Die Operatoren $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$ sind, wie man leicht zeigen kann, addierbar und $\omega = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$ ist ein normaler Automorphismus der Gruppe $\mathfrak{G}$. Die Eineindeutigkeit von ω wird in dem folgenden Satz 4,5 in einem allgemeineren Fall bewiesen.

Bemerkung. In dem Satz 4,4 kann man anstatt „ein normaler Automorphismus ω" „ein zentraler Automorphismus ω" schreiben (siehe z. B. [2,3]).

4,5. Satz. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit der Minimalbedingung für die Normalteiler. Es seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Komponenten, $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n = \mathfrak{G} = \mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_n$ zwei direkte Produktzerlegungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ und es gelte $A_i \supset \mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i$ und $A_i\ \delta\ \mathfrak{C}_1 \ldots \mathfrak{C}_{i-1}\mathfrak{A}_{i+1} \ldots \mathfrak{A}_n$, $A_i\ \delta\ \mathfrak{C}_1 \ldots \mathfrak{C}_{i-1}\mathfrak{B}_{i+1} \ldots \mathfrak{B}_n$, wo $\mathfrak{C}_k$ gleich einem beliebigen von den $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$ ist.*[8]

Dann

(1) $\mathfrak{A}_i \simeq \mathfrak{B}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

(2) $\mathfrak{C}_1 \times \ldots \times \mathfrak{C}_n = \mathfrak{G}$,

(3) $\omega = \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n$ *ist ein normaler Automorphismus der Gruppe $\mathfrak{G}$, welcher die $\mathfrak{A}$-Zerlegung auf die $\mathfrak{B}$-Zerlegung transformiert; der normale Operator $\alpha_i\beta_i$, $i = 1, 2$, induziert auf der Gruppe $\mathfrak{A}_i$ den Isomorphismus unter* (1) *(d. h. $\mathfrak{A}_i^{\alpha_i\beta_i} = \mathfrak{A}_i^{\omega} = \mathfrak{B}_i$).*

Die Abbildungen α_i resp. β_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) nennt man die Projektionen der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf ihre Untergruppen $\mathfrak{A}_i$ resp. $\mathfrak{B}_i$, die zur direkten Produktzerlegung $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n = \mathfrak{G}$ resp. $\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \ldots \times \mathfrak{B}_n = \mathfrak{G}$ gehören, und man versteht darunter die Abbildungen $x \to x_i$ resp. $x \to y_i$, wo bei $x \in \mathfrak{G}$, $x = x_1x_2 \ldots x_n$, $x_i \in \mathfrak{A}_i$ resp. $x \in \mathfrak{G}$, $x = y_1y_2 \ldots y_n$, $y_i \in \mathfrak{B}_i$.

Beweis. (1) und (2): $A_1\ \delta\ \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n$, $A_1\ \delta\ \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_n \Rightarrow A_1\ \delta\ (\overline{\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n} \vee \overline{\mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_n})$. Wenn wir $K_1 = A_1$, $K_2 = (\overline{\mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n} \vee \overline{\mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_n})$ setzen, dann ist nach dem vorhergehenden Satz $\mathfrak{A}_1 \simeq \mathfrak{B}_1$ und es gilt $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \ldots \times \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n = \mathfrak{G}$. Setzen wir voraus, dass der Satz für alle

7) Die Eineindeutigkeit der Abbildung z. B. $\alpha_1 \mid \mathfrak{B}_1$ folgt daher, dass $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{A}_2 = e$.

8) Siehe die Fussnote [4] zu dem Satz 4,4.

k kleiner als i bewiesen ist, d. h. $\mathfrak{A}_k \simeq \mathfrak{B}_k$ für $k < i$, $\mathfrak{C}_1 \times \ldots \times \mathfrak{C}_{i-1} \times \mathfrak{A}_i \times \times \ldots \times \mathfrak{A}_n = \mathfrak{G} = \mathfrak{C}_1 \times \ldots \times \mathfrak{C}_{i-1} \times \mathfrak{B}_i \times \ldots \times \mathfrak{B}_n$ ist durch die Induktion bewiesen. (3): Bezeichnen wir α_i resp. β_i die Projektionen der Gruppe $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{A}_i$ resp. $\mathfrak{B}_i$, welche zu den direkten Produktzerlegungen $\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_{i-1} \cdot \cdot \mathfrak{A}_{i+1} \ldots \mathfrak{A}_n$ resp. $\mathfrak{B}_i \times \mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_{i-1}\mathfrak{B}_{i+1} \ldots \mathfrak{B}_n$ gehören. Es gilt, dass $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ addierbare Operationen und $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ addierbare Operationen sind, dass $\alpha_i\beta_i$ normale addierbare Operatoren und auch $\omega = \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n$ ein normaler Operator ist, welcher — wie in dem Satz 4,4 gezeigt wurde — die Gruppe $\mathfrak{A}_i$ auf die Gruppe $\mathfrak{B}_i$ transformiert und dessen jeder Summand $\alpha_i\beta_i$ einen $\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_i$-Isomorphismus $\mathfrak{A}_i \simeq \mathfrak{B}_i$ induziert. Endlich ist die Abbildung ω schlicht: Die Gleichheit $x^\omega = y^\omega$ gibt die weitere $x^{\alpha_i\beta_i} \ldots x^{\alpha_n\beta_n} = y^{\alpha_1\beta_1} \ldots y^{\alpha_n\beta_n}$. Diese Gleichung mit der Beziehung $x^{\alpha_i\beta_i}, y^{\alpha_i\beta_i} \in \mathfrak{B}_i$ gibt: $x^{\alpha_i\beta_i} = y^{\alpha_i\beta_i}$; $i = = 1, \ldots, n$. Weiter $x^{\alpha_i} = y^{\alpha_i}$, weil β_i eindeutig $\mathfrak{A}_i$ auf $\mathfrak{B}_i$ abbildet. x, y gehören also zu derselben Restklasse des Normalteilers $\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_{i-1}\mathfrak{A}_{i+1} \ldots \mathfrak{A}_n$ für alle i, also $x = y$.

4,6. Satz. *Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit der Minimalbedingung für die Normalteiler. $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n = \mathfrak{G} = \mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_n$ seien zwei Remaksche Produktzerlegungen der Gruppe $\mathfrak{G}$. Wenn wir mit $\mathfrak{C}_i$ eine beliebige von den Untergruppen $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ bezeichnen, dann existieren Komponenten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mit den Eigenschaften* $(1 \leqq i \leqq n)$

(1) $A_i \supset \mathfrak{C}_i$,

(2) $A_i \,\delta\, \mathfrak{C}_1 \ldots \mathfrak{C}_{i-1}\mathfrak{C}_{i+1} \ldots \mathfrak{C}_n$,

(3) $\mathfrak{C}_i$ *ist ein in* A_i *maximaler Normalteiler.*

Beweis. Es sei $A_i = \overline{\mathfrak{A}}_i \vee \overline{\mathfrak{B}}_i$. Nach dem Schmidt-Remakschen Austauschsatz ist $\mathfrak{C}_1 \times \ldots \times \mathfrak{C}_{i-1} \times \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{C}_{i-1} \times \ldots \times \mathfrak{C}_n = \mathfrak{G} = \mathfrak{C}_1 \times \ldots \times \mathfrak{C}_{i-1} \times \times \mathfrak{B}_i \times \mathfrak{C}_{i+1} \times \ldots \times \mathfrak{C}_n$, so dass $\overline{\mathfrak{A}}_i \,\delta\, \mathfrak{C}_1 \ldots \mathfrak{C}_{i-1}\mathfrak{C}_{i+1} \ldots \mathfrak{C}_n$, $\overline{\mathfrak{B}}_i \,\delta\, \mathfrak{C}_1 \ldots \mathfrak{C}_{i-1} \cdot \cdot \mathfrak{C}_{i+1} \ldots \mathfrak{C}_n$ und daher $(\overline{\mathfrak{A}}_i \vee \overline{\mathfrak{B}}_i) \,\delta\, \mathfrak{C}_1 \ldots \mathfrak{C}_{i-1}\mathfrak{C}_{i+1} \ldots \mathfrak{C}_n$, was die Behauptungen (1), (2), des Satzes ergibt. Die Behauptung (3) bestimmt man wie gewöhnlich (4, 2 (3)).

4,7. Satz. *Wenn in der Gruppe mit der Minimalbedingung für die Normalteiler alle Komponenten Normalteiler sind, dann ist die Remaksche Produktzerlegung eindeuting bestimmt.*

Die Behauptung folgt unmittelbar aus 4,6 (3).

Anmerkung. Der Satz 4,5 ist eine Analogie des Schmidt-Remakschen Satzes.

§ 5.

In diesem Paragraphen werden wir uns mit den Bedingungen der Eindeutigkeit der direkten Produktzerlegungen[9]) beschäftigen.

[9]) Die Definitionen der (unendlichen) direkten Produktzerlegung und der Verfeinerung der direkten Produktzerlegung lassen sich z. B. in [8], § 17 finden.

Ordnen wir teilweise auf eine offenbare Weise (kleiner$\equiv$feiner) das System aller direkten Produktzerlegungen der Gruppe $\mathfrak{G}$. Besitzt diese teilweise geordnete Menge das kleinste Element, so sagt man, dass die Gruppe $\mathfrak{G}$ eine eindeutige direkte Produktzerlegung besitzt. Beachten wir, dass in diesem Fall der Durchschnitt eines beliebigen Systems von direkten Faktoren in einer solchen Gruppe $\mathfrak{G}$ wieder ein direkter Faktor ist.

Führen wir auf einer solcher Gruppe $\mathfrak{G}$ (mit eindeutiger direkten Produktzerlegung) eine teilweise Ordnung $\leqq$ nach der Vorschrift: $x, y \in \mathfrak{G}$, $x \leqq y$ wenn jeder direkte Faktor, der y enthält, auch x umfasst. Bezeichnen wir zwei Elemente $x, y \in \mathfrak{G}$ als disjunktiv, $x \, \delta \, y$, wenn ein x resp. y umfassender direkter Faktor $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{G}$ existiert, so dass $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = e$.

Die Relationen $\leqq$ mit δ erfüllen offenbar auf der Gruppe mit eindeutiger direkten Produktzerlegung die Bedingungen (α), (β), (a) bis (d) vom § 1. Mit Hilfe des Satzes 1,4,4 kann man nun die folgende Charakterisierung der Gruppen mit einer eindeutigen direkten Produktzerlegung beweisen.

Satz. *Die Gruppe $\mathfrak{G}$ besitzt eine eindeutige direkte Produktzerlegung dann und nur dann, wenn alle direkten Faktoren in $\mathfrak{G}$ eine atomische Boolesche Algebra mit Rücksicht auf die Inklusion, den Durchschnitt und das Produkt bilden.*[10])

Anmerkung. *Ist in der Gruppe $\mathfrak{G}$ die direkte Produktzerlegung eindeutig bestimmt, so ist* nämlich *das System der Komponenten* (im Sinne dieses Paragraphen) *identisch mit dem System aller direkten Faktoren in $\mathfrak{G}$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{G}$ die Gruppe mit eindeutiger direkten Produktzerlegung, $\prod_{\lambda} \mathfrak{A}_\lambda$ die feinste direkte Produktzerlegung in $\mathfrak{G}$. Vorerst der Beweis, dass jede Komponente ein direkter Faktor in $\mathfrak{G}$ ist. Es sei $A \subset \mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{A}$ der kleinste A umfassende direkte Faktor und $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{G}$, dann genügt es zu zeigen $A' = \mathfrak{B}$. Offenbar $A' \supset \mathfrak{A}' \supset \mathfrak{B}$. Es sei $x \bar{\in} \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ ein beliebiger direkter Faktor, für den $x \in \mathfrak{C}$ und Γ resp. Δ die Teilmenge der $\mathfrak{A}_\lambda$, für die $\mathfrak{A}_\lambda \subset \mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{A}_\lambda \subset \mathfrak{C}$ gilt. Weil $\mathfrak{C}$ non$\subset$ $\mathfrak{B}$, so muss ein direkter Faktor von Δ auch in Γ liegen; dann $x \, \bar{\delta} \, A$, also $A' = \mathfrak{B}$. Gleichzeitig wurde gezeigt, dass das disjunktive Komplement einer Komponente ihr direktes Komplement ist. Die Anmerkung ist bewiesen. Wenn

---

[10]) In diesem Paragraphen handelt es sich um eine Charakterisierung der Gruppen mit eindeutiger direkten Produktzerlegung. Akad. Kořínek hat mich aufmerksam gemacht, dass sich die folgende, in einem Sinne allgemeinere, Behauptung beweisen lässt (von der Gruppe $\mathfrak{G}$ setzt man nicht voraus, dass sie eine eindeutige direkte Produktzerlegung besitzt):

Es sei $\mathfrak{G} = \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{A}_\lambda \ldots$ (1) eine direkte Produktzerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{G} = \prod_{\mu \in M} \mathfrak{B}_\mu \ldots$ (2) eine beliebige direkte Produktzerlegung von $\mathfrak{G}$, von der (1) eine Verfeinerung darstellt. Dann bildet das (um $\mathfrak{G}$ und e erweiterte) System Σ aller direkten Faktoren der Zerlegungen (2) im Verband aller Untergruppen von $\mathfrak{G}$ einen Unterverband, der eine atomische Boolesche Algebra ist.

Der Beweis dieses Satzes lässt sich genau so wie der des Satzes vom § 5 leiten, indem man anstatt des Systems aller direkten Faktoren der Gruppe $\mathfrak{G}$ nur das System Σ betrachtet.

wir nun den Satz 1,4,4 benützen, so ist der Satz bis auf einige offenbare Details bewiesen.[11])

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *G. Birkhoff*: Lattice Theory, rev. ed., New York, 1948.

[2] *H. Fitting*: Die Theorie der Automorphismenringe abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nicht kommutativen Gruppen, Math. Ann., 107 (1933), 514—542.

[3] *H. Fitting*: Über die direkten Produktzerlegungen einer Gruppe in direkt unzerlegbare Faktoren, Math. Zeitschrift, 39 (1935), 16—30.

[4] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих* и *А. Г. Пинскер*: Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, ГТТИ (1950).

[5] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих* и *А. Г. Пинскер*: Полуупорядоченные группы и линейные полуупорядоченные пространсва, Успехи мат. наук, VI (1951), 31—98.

[6] *V. Kořinek*: Sur la décomposition d'un groupe en produit direct des sousgroupes, Časopis pro pěst. mat. a fysiky, 66 (1937), 261—286, 67 (1938), 209—210.

[7] *A. Kurosch*: Zur Zerlegung unendlicher Gruppen, Math. Ann., 106 (1932), 107—113.

[8] *А. Г. Курош*, Теория групп, изд. второе, переработ., Москва (1953).

[9] *H. Zassenhaus*: Lehrbuch der Gruppentheorie I, Hamburger math. Einzelschriften, vol. 21 (1937).

Резюме.

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛЯРНОСТИ К ПРЯМЫМ РАЗЛОЖЕНИЯМ ОДНОЙ ГРУППЫ

ФРАНТИШЕК ШИК, (František Šik), Брно

(Поступило в редакцию 28/I 1953 г.)

В предлагаемой работе изучается специальный тип полярности, обладающий тем свойством, что все замкнутые в ней множества образуют полную алгебру Буля, упорядоченную при помощи теоретико-множественного включения, а в качестве инфимума берется пересечение. Затем результаты общих рассуждений переносятся на некоторые типы групп и используются при исследовании структуры прямых разложений на этих группах. Исследуются циклические группы (§ 3) и группы с однозначным прямым разложением (§ 5); наконец, для групп с минимальным условием для нормальных подгрупп выводится теорема, аналогичная теореме Шмидт-Ремака, а также достаточное условие для однозначности ремакова разложения.

---

[11]) Die Notwendigkeit der Bedingung lässt sich auch mit Hilfe des Th 16 in [1] (X, § 13) beweisen.