Štefan Schwarz

К теории Хаусдорфовых бикомпактных полугрупп

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 1, 1–23

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100128

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. 5 (80) ПРАГА 30. IV. 1955 г. • No 1

К ТЕОРИИ ХАУСДОРФОВЫХ БИКОМПАКТНЫХ ПОЛУГРУПП

ШТЕФАН ШВАРЦ, Братислава.

(Поступило в редакцию 23/VIII 1954 г.)

Целью этой стати является в основном перенесение результатов работы автора [1] на случай хаусдорфовых бикомпактных полугрупп. Но многие из результатов настоящей работы не имеют непосредственной аналогии в случае периодических полугрупп.

Под полугруппой мы понимаем непустое множество элементов $S = \{a, b, c, \dots\}$, в котором определена ассоциативная операция умножения: $a(bc) = (ab)\,c$.

Если множество S является одновременно топологическим пространством и операция в этом топологическом пространстве непрерывна, то мы называем S топологической полугруппой

Частичную полугруппу $S_1 \subseteqq S$ мы будем называть открытой (замкнутой), если S_1 является открытым (замкнутым) множеством в пространстве S. Каждая частичная полугруппа $S_1 \subseteqq S$ будет, очевидно сама топологической полугруппой в относительной топологии.

В настоящей работе выражение топологическое пространство всегда будет обозначать хаусдорфово бикомпактное пространство.

Кроме других результатов мы перенесем на хаусдорфовы бикомпактные пространства и результаты работы автора [1]. Из цитированной работы предполагаются известными только некоторые элементарные факты, обыкновенно используемые в теории полугрупп.

I.

Лемма 1. *Пусть S — хаусдорфова полугруппа. Пусть $A \subseteqq S$. Если A — полугруппа, то и замыкание $\overline{A}$ будет полугруппой.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \overline{A}$, $\beta \in \overline{A}$. Нужно показать, что также

$\alpha\beta \in \bar{A}$. Предположим, что $\alpha\beta \in S - A$. Так как $S - A$ есть открытое множество, то существует окрестность $U(\alpha\beta)$ элемента $\alpha\beta$ так, что

$$\bar{A} \cap U(\alpha\beta) = \emptyset\,. \tag{1}$$

Ввиду предположения о непрерывности умножения, существуют окрестности элементов α, β $U(\alpha)$, $U(\beta)$ такие, что $U(\alpha)\,U(\beta) \subseteqq U(\alpha\beta)$. Так как $\alpha \in \bar{A}$, имеем $U(\alpha) \cap A \neq \emptyset$. Аналогично $U(\beta) \cap A \neq \emptyset$. Пусть a — произвольный элемент $a \in U(\alpha) \cap A$, b — произвольный элемент $b \in U(\beta) \cap A$. Тогда $ab \in U(\alpha\beta)$. С другой стороны (так как A есть полугруппа), $ab \in A$. Следовательно, $U(\alpha\beta) \cap A \neq \emptyset$, а тем более $U(\alpha\beta) \cap \bar{A} \neq \emptyset$, что противоречит соотношению (1).

Лемма 2. (См. аналогигно Нумакура [2].) *Пусть S — хаусдорфова бикомпактная полугруппа. Пусть $a \in S$. Положим $A = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$. Тогда $\bar{A}$ содержит в виде подмножества некоторую замкнутую коммутативную группу G.*

Доказательство. а) Положим для $n = 1, 2, 3, \ldots, A_n = \{a^n, a^{n+1}, a^{n+2}, \ldots\}$. Ясно, что

$$A = A_1 \supseteqq A_2 \supseteqq A_3 \supseteqq \ldots$$

Система $\mathfrak{S} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ подмножеств бикомпактного пространства S обладает тем свойством, что каждое конечное число множеств, выделенное из этой системы, имеет непустое пересечение. Итак, $G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \neq \emptyset$. Ввиду леммы 1 каждый член $\bar{A}_n$ является полугруппой, следовательно и их пересечение будет полугруппой. Как пересечение замкнутых множеств будет и само G замкнутым. В то же время G — как замкнутое подмножество бикомпактного пространства — будет бикомпактной полугруппой.

б) Покажем, что G есть группа. Достаточно доказать, что для любой пары $z, y \in G$ уравнения $\xi y = z$, соотв. $y\eta = z$ имеют решения $\xi, \eta \in G$. Ограничимся первым уравнением, рассуждения для второго протекают аналогично.

Доказательство от противного. Пусть существует такая паро $y, z \in G$, что уравнение $\xi y = z$ не имеет решения $\xi \in G$. Тогда для любого $x_\lambda \in G$ будет $x_\lambda y \neq z$. Следовательно, существуют окрестности элементов x_λ, y, z, и именно $U(x_\lambda)$, $U_\lambda(z)$, $U_\lambda(y)$, такие, что

$$U(x_\lambda)\,.\,U_\lambda(y) \cap U_\lambda(z) = \emptyset\,. \tag{2}$$

Система окрестностей $U(x_\lambda)$, $x_\lambda \in G$ покрывает бикомпактную полугруппу G. Итак, существует конечное число окрестностей, покрывающих G:

$$G \subseteqq U(x_{\lambda_1}) + U(x_{\lambda_2}) + \ldots + U(x_{\lambda_k}) = Q\,,$$

причем Q — открытое множество, покрывающее G.

Построим для каждого $U(x_{\lambda_i})$, $i = 1, 2, \ldots, k$, такие окрестности $U_{\lambda_i}(y)$ и $U_{\lambda_i}(z)$ точек y и z, чтобы

$$U(x_{\lambda_i}) \,.\, U_{\lambda_i}(y) \cap U_{\lambda_i}(z) = \emptyset\,. \tag{3}$$

Пусть далее $U(y)$ и $U(z)$ будут такие окрестности элементов y и z, что

$$U(y) \subseteqq U_{\lambda_1}(y) \cap U_{\lambda_2}(y) \cap \ldots \cap U_{\lambda_k}(y)\,,$$
$$U(z) \subseteqq U_{\lambda_1}(z) \cap U_{\lambda_2}(z) \cap \ldots \cap U_{\lambda_k}(z)\,.$$

Ввиду (3), для любого $i = 1, 2, \ldots, k$ будет

$$U(x_{\lambda_i})\, U(y) \cap U(z) = \emptyset\,;$$

итак,

$$Q \,.\, U(y) \cap U(z) = \emptyset\,. \tag{4}$$

Покажем, что соотношение (4) ведет к противоречию.

Так как $y \in \bar{A}_1 = \overline{\{a, a^2, a^3, \ldots\}}$, то существует такое натуральное $\mu \geqq 1$ что $a^\mu \in U(y)$. Об элементе z можно утверждать, что $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i$; значит, тем более $z \in \bar{A}_{\mu+1} = \overline{\{a^{\mu+1}, a^{\mu+2}, \ldots\}}$. Поэтому существует натуральное число $\nu_1 > \mu$ такое, что $a^{\nu_1} \in U(z)$. Аналогично будет $z \in \bar{A}_{\nu_1+1} = \overline{\{a^{\nu_1+1}, a^{\nu_1+2}, \ldots\}}$. Значит, существует натуральное число $\nu_2 > \nu_1$ такое, что $a^{\nu_2} \in U(z)$, и т. д. К нашему элементу z можно, следовательно, подобрать такую последовательность натуральных чисел $\mu < \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 \ldots$, что $\{a^{\nu_1}, a^{\nu_2}, a^{\nu_3}, \ldots\} \in \in U(z)$.

Положим

$$A^{(1)} = \{a^{\nu_1-\mu}, a^{\nu_2-\mu}, a^{\nu_3-\mu}, \ldots\}\,,$$
$$A^{(2)} = \{a^{\nu_2-\mu}, a^{\nu_3-\mu}, a^{\nu_4-\mu}, \ldots\}\,,$$
$$A^{(3)} = \{a^{\nu_3-\mu}, a^{\nu_4-\mu}, a^{\nu_5-\mu}, \ldots\}\,,$$
$$\vdots$$

Тогда имеем

$$A^{(1)} \supseteqq A^{(2)} \supseteqq A^{(3)} \supseteqq \ldots$$

Система подмножеств $\{A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, \ldots\}$ бикомпактного пространства S обладает опять тем свойством, что каждое конечное число выделенных из нее множеств имеет непустое пересечение. Поэтому $\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}^{(i)} \neq \emptyset$. При этом, очевидно,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}^{(i)} \subseteqq G \subseteqq Q\,.$$

Возьмем произвольный элемент $w \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}^{(i)}$. Так как $w \in Q$ (и Q открыто) то существует такая окрестность $U(w)$, что $U(w) \subseteqq Q$. Так как, далее,

$w \in \bar{A}^{(1)}$, то существует некоторый индекс s такой, что $a^{\nu_s - \mu} \in U(w) \subseteqq Q$. Для элемента a^{ν_s} имеет теперь место: 1. $a^{\nu_s} \in U(z)$, 2. $a^{\nu_s} = a^{\nu_s - \mu} \, . \, a^{\mu} \in U(w) \, . \, U(y) \subseteqq Q \, . \, U(y)$. Итак, $a^{\nu_s} \in QU(y) \cap U(z)$, что противоречит соотношению (4). Этим доказано, что G является группой.

в) Докажем наконец, что G — коммутативная группа. В противном случае существовала бы такая пара α, $\beta \in G$, что $\alpha\beta \neq \beta\alpha$. Следовательно, существуют такие окрестности элементов $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, что

$$U(\alpha\beta) \cap U(\beta\alpha) = \emptyset \, . \tag{5}$$

Найдем такие окрестности $U'(\alpha)$, $U'(\beta)$ и $U''(\alpha)$, $U''(\beta)$, чтобы было $U'(\alpha) \, . \, U'(\beta) \subseteqq U(\alpha\beta)$, $U''(\beta) \, . \, U''(\alpha) \subseteqq (\beta\alpha)$. Подберем, далее, $U(\alpha)$, $U(\beta)$ так, чтобы было $U(\alpha) \subseteqq U'(\alpha) \cap U''(\alpha)$, $U(\beta) \subseteqq U'(\beta) \cap U''(\beta)$. Тогда будет $U(\alpha)\, U(\beta) \subseteqq U(\alpha\beta)$, $U(\beta)\, U(\alpha) \subseteqq U(\beta\alpha)$ и, следовательно, ввиду (5)

$$U(\alpha)\, U(\beta) \cap U(\beta)\, U(\alpha) = \emptyset \, . \tag{6}$$

Так как $\alpha, \beta \in \bar{A}$, то $A' = U(\alpha) \cap A = \{a^{\varrho_1}, a^{\varrho_2}, a^{\varrho_3}, \ldots\} \neq \emptyset$ и $A'' = U(\beta) \cap A = \{a^{\sigma_1}, a^{\sigma_2}, a^{\sigma_3}, \ldots\} \neq \emptyset$. Далее будет $A' \subseteqq U(\alpha)$, $A'' \subseteqq U(\beta)$. Из соотношения (6) следовало бы

$$A'A'' \cap A''A' = \emptyset \, . \tag{7}$$

Однако, очевидно,

$$A'A'' = \{a^{\varrho_1}, a^{\varrho_2}, a^{\varrho_3}, \ldots\} \, . \, \{a^{\sigma_1}, a^{\sigma_2}, a^{\sigma_3}, \ldots\} = A''A' \, ,$$

следовательно, $A''A' \cap A'A'' = A'A'' \neq \emptyset$, что противоречит соотношению (7). Этим лемма 2 полностью доказана.

Замечание. Если a — элемент конечного порядка (т. е. если $a^m = a^n$ для некоторых целых $m \neq n$), то известно, что G будет не только коммутативной, но даже циклической группой.

Так как единичный элемент группы G является идемпотентом, то из леммы 2 непосредственно следует

Теорема 1. *Каждая хаусдорфова бикомпактная полугруппа содержит хоть один идемпотент.*

В частности: каждая замкнутая частичная полугруппа бикомпактной хаусдорфовой полугруппы содержит хоть один идемпотент.

Лемма 3. *Пусть $a \in S$. Положим $A = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$. Тогда $\bar{A}$ имеет один и только один идемпотент.*

Доказательство. а) Наличие хотя бы одного идемпотента следует из леммы 2.

б) Если a — элемент конечного порядка, то A содержит лишь конечное число различных элементов, и утверждение представляет известную теорему из теории периодических полугрупп.

Итак, пусть a не является элементом конечного порядка. Для любого натурального n напишем: $A = \{a, a^2, \ldots, a^{n-1}\} + A_n$. Тогда получим $\bar{A} = \{a, a^2, \ldots, a^{n-1}\} + \bar{A}_n$. Так как a — элемент бесконечного порядка, то для любого идемпотента $e \in \bar{A}$ необходимо имеет место $e \operatorname{non} \in \{a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$.[1] Следовательно для $n = 1, 2, 3 \ldots$ будет $e \in \bar{A}_n$. Поэтому $e \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$. Однако, по лемме 2, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ является группой. Следовательно, существует только один идемпотент в $\bar{A}$ (и именно, единичный элемент группы G).

Определение 1. *Пусть e — идемпотент $\in S$. Мы скажем, что элемент $a \in S$ принадлежит к идемпотенту e, если e является единственным идемпотентом полугруппы $\bar{A} = \overline{\{a, a^2, a^3, \ldots\}}$.*

Определение 2. *Символом K_α мы будем в дальнейшем обозначать множество всех элементов $\in S$, принадлежащих к идемпотенту e_α.*

Каждый элемент $a \in S$ принадлежит к некоторому вполне определенному идемпотенту e_α. Поэтому очевидна справедливость теоремы:

Теорема 2. *Хаусдорфова бикомпактная полугруппа может быть представлена в виде суммы дизъюнктных множеств: $S = \sum_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha$, где α пробегает некоторое множество индексов $\alpha \in \Lambda$.*

На примере можно доказать (см. [1], стр. 10), что уже в конечном случае (если S не является коммутативной полугруппой) множества K_α не должны быть полугруппами.

Мы будем часто пользоваться следующей леммой:

Лемма 4. *Пусть $a \in K_\alpha$. Положим $A = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$. Тогда $\bar{A} \subseteqq K_\alpha$.*

Доказательство. Пусть $b \in \bar{A}$. Положим $B = \{b, b^2, b^3, \ldots\}$. Так как A — полугруппа, то $B \subseteqq \bar{A}$, и, значит, $\bar{B} \subseteqq \bar{A}$. Положим для $n = 1, 2, 3, \ldots$ $B_n = \{b^n, b^{n+1}, b^{n+2}, \ldots\}$. Имеем $B_n \subseteqq \bar{A}$ и $\bar{B}_n \subseteqq \bar{A}$. Аналогично тому, как и в лемме 2, докажем, что $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \neq \emptyset$ и что H — замкнутая группа. Очевидно, $H \subseteqq \bar{A}$. Однако, $\bar{A}$ имеет только один идемпотент e_α. Следовательно, e_α будет также единичным элементом группы H, т. е. b принадлежит к идемпотенту e_α. Поэтому $\bar{A} \subseteqq K_\alpha$, ч. т. д.

Определение 3. *Мы говорим, что полугруппа $P \subseteqq S$ является максимальной полугруппой, принадлежащей к идемпотенту e_α, если*

1. *P содержит только один идемпотент e_α,*

2. *не существует полугруппы $P' \neq P$, имеющей лишь один идемпотент e_α, для которой имело бы место $P \subset P' \subseteqq S$.*

---

[1]) Действительно, если бы было $e = a^k$, $1 \leqq k \leqq n - 1$, было бы и $e^2 = a^{2k}$, $a^k = a^{2k}$. Следовательно, a было бы элементом конечного порядка.

При помощи принципа максимума, известного под названием леммы Цорна, нетрудно доказать, что для каждого идемпотента e_α существует хоть одна максимальная полугруппа, принадлежащая к e_α. Очевидно, можно каждый элемент $a \in K_\alpha$ включить в некоторую максимальную полугруппу $P_\alpha^{(a)}$, принадлежащую к идемпотенту e_α, причем $P_\alpha^{(a)} \subseteqq K_\alpha$. Следовательно, если K_α не является само полугруппой, то для данного e_α существует более чем одна максимальная полугруппа. (Их может быть, конечно, и бесконечное количество.) Итак, можно написать $K_\alpha = \sum_{\nu \in Z} P_\alpha^{(\nu)}$, где ν пробегает некоторое множество индексов Z.

В коммутативном случае положение значительно упрощается. Покажем, что в таком случае K_α будет полугруппой. Прежде всего докажем

Лемму 5. *Пусть S — коммутативная хаусдорфова бикомпактная полугруппа. Пусть $a \in S$ принадлежит к идемпотенту e_1, $b \in S$ — к идемпотенту e_2. Тогда элемент ab принадлежит к идемпотенту $e_1 e_2$.*

Доказательство. Положим

$$A = \{a, a^2, a^3, \ldots\},$$
$$B = \{b, b^2, b^3, \ldots\},$$
$$C = \{ab, a^2b^2, a^3b^3, \ldots\}.$$

По предположению имеем $e_1 \in \bar{A}$, $e_2 \in \bar{B}$. Так как $e_1 e_2$ является идемпотентом $\in S$, то достаточно доказать, что $e_1 e_2 \in \bar{C}$.

1. Покажем прежде всего, что существует элемент $\beta \in \bar{B}$ такой, что $e_1 \beta \in \bar{C}$.

Пусть $\Sigma = \{U_\tau(e_1), \tau \in T\}$ — полная система окрестностей элемента e_1. Положим

$$A_\tau = U_\tau(e_1) \cap A = \{a^{\tau_1}, a^{\tau_2}, a^{\tau_3}, \ldots\}.$$

Обозначим множество степеней b с теми же самыми показателями знаком B_τ:

$$B_\tau = \{b^{\tau_1}, b^{\tau_2}, b^{\tau_3}, \ldots\}.$$

Таким образом мы получаем систему множеств $\mathfrak{B} = \{B_\tau, \tau \in T\}$. Утверждаем, что $\bigcap_{\tau \in T} \bar{B}_\tau \neq \emptyset$.[2])

Так как S бикомпактно, то достаточно доказать, что для каждой конечной системы $B_{\tau'}, B_{\tau''}, \ldots, B_{\tau^{(k)}}$ будет $B_{\tau'} \cap B_{\tau''} \cap \ldots \cap B_{\tau^{(k)}} \neq \emptyset$.

Обозначим через $A_{\tau'}, A_{\tau''}, \ldots, A_{\tau^{(k)}}$ соответствующие подмножества A_τ. Согласно определению этих множеств существуют такие окрестности

[2]) Вообще говоря, не имеет места $e_2 \in \bigcap_{\tau \in T} \bar{B}_\tau$.

$U_\tau(e_1), U_{\tau''}(e_1), \ldots, U_{\tau^{(k)}}(e_1)$ элемента e_1, что $A_{\tau'} = U_{\tau'}(e_1) \cap A, \ldots, A_{\tau^{(k)}} = U_{\tau^{(k)}}(e_1) \cap A$. Построим теперь такую окрестность $U_\varrho(e_1)$, чтобы было

$$U_\varrho(e_1) \subseteqq U_{\tau'}(e_1) \cap U_{\tau''}(e_1) \cap \ldots \cap U_{\tau^{(k)}}(e_1)\,.$$

Так как $e_1 \in \bar{A}$, то множество

$$A_\varrho = U_\varrho(e_1) \cap A = \{a^{\varrho_1}, a^{\varrho_2}, a^{\varrho_3}, \ldots\}$$

непусто. Тогда для множества $B_\varrho = \{b^{\varrho_1}, b^{\varrho_2}, b^{\varrho_3}, \ldots\}$ будет, очевидно,

$$\emptyset \neq B_\varrho \subseteqq B_{\tau'} \cap B_{\tau''} \cap \ldots \cap B_{\tau^{(k)}}\,,$$

что и доказывает наше утверждение.

Возьмем произвольный элемент $\beta \in \bigcap_{\tau \in T} \overline{B}_\tau$. Тогда для любой окрестности $U(e_1\beta)$ элемента $e_1\beta$ существуют окрестности $U_\sigma(e_1)$ и $U(\beta)$ такие, что $U_\sigma(e_1)\, U(\beta) \subseteqq U(e_1\, \beta)$. Имеем $\sigma \in T$ и в дальнейшем будем считать σ фиксированным.

Пусть $A_\sigma = U_\sigma(e_1) \cap A = \{a^{\sigma_1}, a^{\sigma_2}, a^{\sigma_3}, \ldots\}$. Построим множество $B_\sigma = \{b^{\sigma_1}, b^{\sigma_2}, b^{\sigma_3}, \ldots\}$ и множество $\overline{B}_\sigma = \overline{\{b^{\sigma_1}, b^{\sigma_2}, b^{\sigma_3}, \ldots\}}$. Очевидно, $\overline{B}_\sigma$ будет одним из сомножителей $\bigcap_{\tau \in T} \overline{B}_\tau$. Так как $\beta \in \bigcap_{\tau \in T} \overline{B}_\tau$, то будет, конечно, и $\beta \in \overline{B}_\sigma$. Следовательно, в окрестности $U(\beta)$ элемента β существует хоть один элемент $\in B_\sigma$. Итак,

$$B_\sigma \cap U(\beta) = U(\beta) \cap \{b^{\sigma_1}, b^{\sigma_2}, b^{\sigma_3}, \ldots\} \neq \emptyset\,.$$

Возьмем произвольный элемент $b^{\sigma'}$ из этого пересечения, $b^{\sigma'} \in U(\beta) \cap \{b^{\sigma_1}, b^{\sigma_2}, b^{\sigma_3}, \ldots\}$. Тогда, конечно, элемент $a^{\sigma'}$ (с тем же показателем σ'!) принадлежит A_σ, т. е.

$$a^{\sigma'} \in \{a^{\sigma_1}, a^{\sigma_2}, a^{\sigma_3}, \ldots\} = A_\sigma\,.$$

Отсюда

$$a^{\sigma'} \,.\, b^{\sigma'} = (ab)^{\sigma'} \in [U_\sigma(e_1) \cap A] \,.\, [U(\beta) \cap B_\sigma] \subseteqq U_\sigma(e_1) \,.\, U(\beta) \subseteqq U(e_1\beta)\,.$$

Однако, $(ab)^{\sigma'} \in C$. Итак, для любой окрестности $U(e_1\beta)$ будет $U(e_1\beta) \cap C \neq \emptyset$, т. е. $e_1\beta \in \overline{C}$.

2. Рассмотрим теперь полугруппу

$$D = \{e_1\beta, e_1\beta^2, e_1\beta^3, \ldots\}\,.$$

Так как $\overline{C}$ — полугруппа, то $\overline{C} \supseteqq D$, значит, $\overline{D} \subseteqq \overline{C}$. По лемме 3 полугруппа $\overline{D}$ содержит один и только один идемпотент. Покажем, что этим идемпотентом будет e_1e_2. Для этого достаточно доказать, что каждая окрестность $U(e_1e_2)$ содержит хоть один элемент $\in D$. Пусть $U(e_1e_2)$ — произвольная окрестность элемента e_1e_2. Тогда существуют окрестности $U'(e_1)$ и $U''(e_2)$ такие, что $U'(e_1) \,.\, U''(e_2) \subseteqq U(e_1\, e_2)$. Прежде всего $e_1 \in U'(e_1)$. Далее, элемент β входит в $\overline{B}$. Полугруппа $F = \{\beta, \beta^2, \beta^3, \ldots\}$ входит в $\overline{B}$ и, следовательно,

$\overline{F} \subseteqq \overline{B}$. Согласно приведенным выше построениям ясно, что $\overline{F}$ имеет идемпотент, причем этим идемпотентом является элемент e_2 (так как $\overline{B}$ имеет только один идемпотент e_2). Ввиду того, что $e_2 \in \overline{F}$, для окрестности $U''(e_2)$ имеет место соотношение $U''(e_2) \cap F \neq \emptyset$. Следовательно, существует некоторое $s \geqq 1$, такое, что $\beta^s \in U''(e_2)$. Итак, $e_1\beta^s \in U(e_1e_2)$, откуда $e_1e_2 \in \overline{D}$. Наконец, так как $\overline{C} \supseteqq \overline{D}$ содержит только один идемпотент, можно утверждать, что $e_1e_2 \in \overline{C}$, ч. т. д.

Лемма 5, в частности, утверждает: если элементы a, b принадлежат к идемпотенту e_α, то и ab принадлежит к идемпотенту e_α. Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Пусть S — коммутативная хаусдорфова бикомпактная полугруппа. Тогда множество всех элементов, принадлежащих к фиксированному идемпотенту e_α, образует полугруппу P_α.*

Эта полугруппа будет теперь максимальной в том смысле, что каждая полугруппа, имеющая один единственный идемпотент e_α, обязательно содержится в $P_\alpha \equiv K_\alpha$.

В связи с теоремой 2 мы получаем

Теорему 4. *Пусть $\{e_\alpha\}$, $\alpha \in T$ есть множество всех идемпотентов коммутативной хаусдорфовой бикомпактной полугруппы S. Тогда S можно представить в виде суммы дизъюнктных максимальных полугрупп P_α, каждая из которых обладает только одним идемпотентом e_α : $S = \sum_{\alpha \in T} P_\alpha$.*

II.

Рассмотрим теперь более подробно группы, содержащиеся в S. Так как в нашей полугруппе всегда существуют идемпотенты, то всегда существуют и подмножества, являющиеся группами. В крайнем случае группы сводятся к одноэлементным группам, т. е. именно к идемпотентам.

Определение 4. *Пусть e_α — идемпотент. Мы говорим, что группа G_α является максимальной группой, принадлежащей к идемпотенту e_α, если*

а) группа G_α содержит e_α,

б) не существует группы $G' \neq G$, для которой было бы $G \subset G' \subseteqq S$.

Пусть e_α — фиксированный идемпотент. Используя лемму Цорна, мы обычным способом убедимся в том, что существует хоть одна максимальная группа, принадлежащая к идемпотенту e_α. Это утверждение мы теперь усилим.

Теорема 5. *Пусть e_α — идемпотент $\in S$. Тогда существует одна и только одна максимальная группа G_α, принадлежащая к идемпотенту e_α.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть G_1, G_2 — две различные максимальные группы, принадлежащие к идемпотенту e_α. Построим композитум $G = [G_1, G_2]$. Множество G будет, очевидно, полугруппой, содержащей элемент e_α, являющийся единичным элементом полугруппы G. Теорема будет доказана, если покажем, что G будет даже группой, ибо это явно противоречило бы предположению, что G_1, G_2 представляют две различные максимальные группы, принадлежащие к e_α. Для доказательства того обстоятельства, что G есть группа, достаточно показать, что уравнения $ax = e_\alpha$ и $ya = e_\alpha$ имеют в G решения для любого $a \in G$. Пусть напр., $a = p \,.\, q \,.\, r$, где p, q, r — элементы $\in G_1$ и соотв. $\in G_2$. Так как это элементы одной или другой группы, то можно в G_1 или в G_2 всегда найти элементы $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ такие, что $p \,.\, \bar{p} = q \,.\, \bar{q} = r \,.\, \bar{r} = e_\alpha$. Тогда $x = \bar{r}\bar{q}\bar{p}$, очевидно, решением уравнения $ax = e_\alpha$. Аналогичные рассуждения справедливы и для уравнения $ya = e_\alpha$. Итак, G_α есть группа, ч. т. д.

Теорема 6. *Каждая максимальная группа хаусдорфовой бикомпактной полугруппы замкнута.*

Доказательство. Достаточно доказать, что и $\bar{G}_\alpha$ есть группа. В самом деле, так как $\bar{G}_\alpha$ содержит идемпотент e_α а G_α — максимальная группа, принадлежащая к идемпотенту e_α, то обязательно будет $G_\alpha = \bar{G}_\alpha$.

Очевидно, $\bar{G}_\alpha$ есть полугруппа, содержащая идемпотент e_α. (Неизвестно, конечно, является ли e_α единичным элементом полугруппы $\bar{G}_\alpha$!) Чтобы доказать, что $\bar{G}_\alpha$ — группа, достаточно показать, что для каждой пары $\xi, \eta, \in \bar{G}_\alpha$ существует такое $x \in \bar{G}_\alpha$ (соотв. $y \in \bar{G}_\alpha$), что $\xi x = \eta$ (соотв. $y\xi = \eta$). Докажем только первую половину. Доказательство второй половины протекает аналогично.

Предположим противное. Пусть существует такая пара $\xi, \eta, \in \bar{G}_\alpha$, для которой имеет место следующее: для любого $x_\lambda \in \bar{G}_\alpha$ справедливо $\xi x_\lambda \neq \eta$. Тогда для каждого x_λ существуют такие окрестности элементов ξ, η, x_λ, что $U_\lambda(\xi) \,.\, U(x_\lambda) \cap U_\lambda(\eta) = \emptyset$.

Рассмотрим сумму $\sum\limits_{x_\lambda \in \bar{G}_\alpha} U(x_\lambda)$. Эта сумма, очевидно, покрывает $\bar{G}_\alpha$. Так как $\bar{G}_\alpha$ сама является бикомпактной полугруппой, то можно подобрать конечное покрытие $\bar{G}_\alpha$ так, чтобы

$$\bar{G}_\alpha \subseteqq U(x_{\lambda_1}) + U(x_{\lambda_2}) + \ldots + U(x_{\lambda_n}) = Q\,,$$

где Q — открытое множество.

Для каждого λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ найдем прежде всего такие окрестности $U_{\lambda_i}(\xi)$, $U_{\lambda_i}(\eta)$, чтобы было $U_{\lambda_i}(\xi) \,.\, U(x_{\lambda_i}) \cap U_{\lambda_i}(\eta) = \emptyset$. Подберем, далее, такие окрестности элементов ξ, η $U(\xi)$, $U(\eta)$, чтобы имело место

$$U(\xi) \subseteqq U_{\lambda_1}(\xi) \cap \ldots \cup U_{\lambda_n}(\xi)\,,$$
$$U(\eta) \subseteqq U_{\lambda_1}(\eta) \cap \ldots \cup U_{\lambda_n}(\eta)\,.$$

Тогда для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ будет

$$U(\xi) \,.\, U(x_{\lambda_i}) \cap U(\eta) = \emptyset\,,$$

т. е.

$$U(\xi)\,.\,Q \cap U(\eta) = \emptyset\,.$$

Покажем, что это соотношение не может иметь места. Так как ξ (соотв. η) содержится в $\overline{G}_\alpha$, то существуют элементы $x, y \in G_\alpha$ такие, что $x \in U(\xi)$, $y \in U(\eta)$. Далее $G_\alpha \subseteqq Q$. Следовательно, $x\,G_\alpha \cap \{y\} = \emptyset$. Однако, xG_α равно всей группе G_α. Соотношение $G_\alpha \cap \{y\} = \emptyset$ противоречит тому факту, что $y \in G_\alpha$. Этим завершается доказательство теоремы 6.

Из теоремы 6 непосредственно вытекает

Следствие. *Для любого α будет $G_\alpha \subseteqq K_\alpha$.*

Доказательство. Пусть $a \in G_\alpha$. Тогда $\{a, a^2, a^3, \ldots\} \in G_\alpha$, откуда $\overline{\{a, a^2, a^3, \ldots\}} \subseteqq \overline{G}_\alpha = G_\alpha$. Так как G_α содержит только один идемпотент e_α, то и единственный идемпотент, содержащийся в $\overline{\{a, a^2, a^3, \ldots\}}$, будет равным e_α, ч. т. д.

Возникает вопрос о связи между K_α и G_α.

Лемма 6. *Пусть $a \in S$, пусть e — единственный идемпотент $\in \bar{A} = \overline{\{a, a^2, a^3, \ldots\}}$. Пусть G — максимальная группа, содержащаяся в $\bar{A}$. Тогда $\bar{A}e = e\bar{A} = G$.*

Доказательство. а) Так как $G \subseteqq \bar{A}$, то $G\,.\,e \subseteqq \bar{A}\,.\,e$, следовательно, $G \subseteqq \bar{A}\,.\,e$.

б) Докажем теперь, что $\bar{A}\,.\,e \subseteqq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$. Пусть $b \in \bar{A}$. Докажем, что для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ будет $b\,.\,e \in \bar{A}_n$. Пусть n — фиксированное число. Тогда получим (ввиду $e \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$)

$$b\,.\,e \in b\,.\,\bar{A}_n \subseteqq \bar{A}\,.\,\bar{A}_n = \overline{\{a, \ldots, a^{n-1}, a^n, a^{n+1}, \ldots\}}\,.\,\bar{A}_n =$$
$$= \{(a, a^2, \ldots, a^{n-1}) + \bar{A}_n\}\,.\,\bar{A}_n = a\bar{A}_n + a^2\bar{A}_n + \ldots + a^{n-1}\bar{A}_n + \bar{A}_n^2\,.$$

Так как $\bar{A}_n$ — полугруппа, то $\bar{A}_n^2 \subseteqq \bar{A}_n$. Далее, для любого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ имеет место

$$a^i\,.\,\bar{A}_n \subseteqq \overline{a^i A_n} = \overline{\{a^{n+i}, a^{n+i+1}, \ldots\}} \subseteqq \bar{A}_n\,.^{3)}$$

Итак, $be \in \bar{A}_n$ и поэтому $be \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$ и $\bar{A}e \subseteqq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$.

в) Для максимальной группы G из а) и б) следует

$$G \subseteqq \bar{A}e \subseteqq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n\,.$$

---

[3]) Соотношение $a^i\,.\,\bar{A}_n \subseteqq \overline{a^i A_n}$ следует из следующего замечания общего характера: если B — произвольное подмножество из S и если $b \in S$, то будет $b\,.\,\overline{B} \subseteqq \overline{bB}$. Написанное соотношение является непосредственным следствием непрерывности отображения $x \in S \to bx \in S$.

Однако, по лемме 2 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$ есть группа, содержащаяся в A, следовательно (ввиду максимальности), $G = \bar{A}e = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$.

Таким образом мы доказали, что $G = \bar{A} \,.\, e$. Аналогично докажем, что $G = e\bar{A}$.

Определение 5. *Пусть $a \in S$. Пусть a принадлежит к идемпотенту e. В таком случае мы называем a регулярным элементом, если только $a \,.\, e = a$.*

Лемма 7. *Элемент $a \in S$ будет регулярным тогда и только тогда, если $\bar{A} = \overline{\{a, a^2, a^3, \ldots\}}$ есть группа.*

Доказательство. а) Если $\bar{A}$ — группа, то для идемпотента $e \in \bar{A}$ и для любого $a \in \bar{A}$ имеет место $ae = a$, т. е. a является регулярным элементом $\in S$.

б) Если $\bar{A}$ не является группой, то по лемме 6 будет $\bar{A}e = G \subset \bar{A}$, $\bar{A}e \neq \bar{A}$. Следовательно, существует некоторое $\xi \in \bar{A}$, такое, что $\xi e \neq \xi$. Найдем такие окрестности элементов ξ и ξe, чтобы было $U(\xi e) \cap U(\xi) = \emptyset$. Найдем, далее, $U_1(\xi), U(e)$ так, чтобы было $U_1(\xi) \,.\, U(e) \subseteqq U(\xi\, e)$. Следовательно, $U_1(\xi) \,.\, U(e) \cap U(\xi) = \emptyset$. Подберем, наконец, $U_2(\xi)$ так, чтобы было $U_2(\xi) \subseteqq \subseteqq U_1(\xi) \cap U(\xi)$. Тогда тем более будет $U_2(\xi) \,.\, U(e) \cap U_2(\xi) = \emptyset$. Так как $\xi \in \bar{A}$, то существует некоторое натуральное $\varrho \geqq 1$ такое, что $a^\varrho \in U(\xi)$. Итак, было бы $a^\varrho \,.\, e \neq a^\varrho$. Отсюда непосредственно следует, что a не может быть регулярным элементом $\in S$. Ибо если бы a было регулярным элементом, то имело бы место $ae = a$. Умножив слева на элемент $a^{\varrho-1}$, мы получили бы $a^\varrho \,.\, e = a^\varrho$, что является противоречием. Тем самым лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Максимальная группа G_α состоит из тех элементов $\in K_\alpha$, которые являются регулярными, и только из этих элементов.*

Доказательство. а) Каждый элемент $a \in G_\alpha$ регулярен, так как e_α является единичным элементом группы G_α.

б) Покажем, наоборот, что элемент $\in K_\alpha$, являющийся регулярным, попадает в G_α. Пусть $b \in K_\alpha$ и пусть $be_\alpha = b$. Положим $B = \{b, b^2, b^3, \ldots\}$. По лемме 6 $\bar{B}e_\alpha$ равно некоторой группе $H \subseteqq K_\alpha$. Для элемента b имеет место $b = be_\alpha \in \bar{B}e_\alpha = H$. Так как H — группа, то должно быть $H \subseteqq G_\alpha$, следовательно, $b \in G_\alpha$, ч. т. д.

Замечание. Так как для каждого регулярного элемента a имеет место $a \in G_\alpha$, то каждый регулярный элемент удовлетворяет также соотношению $e_\alpha a = a$.

Из леммы 7 и 8 следует

Теорема 7. *Хаусдорфова бикомпактная полугруппа S является суммой* *дизъюнктных групп тогда и только тогда, если каждый элемент $a \in S$ является регулярным.*

Теорема 8. *Для максимальной группы G_α хаусдорфовой бикомпактной полугруппы справедливо $G_\alpha = K_\alpha e_\alpha = e_\alpha K_\alpha$.*

Доказательство. Ввиду леммы 8, достаточно показать, что регулярным будут те и только те элементы $y \in K_\alpha$, которые можно записать в виде $y = x \,.\, e_\alpha, x \in K_\alpha$.

а) Пусть y есть регулярный элемент. Тогда можно, по определению, написать $y = y \,.\, e_\alpha$, $y \in K_\alpha$.

б) Пусть, наоборот, y есть элемент, который можно записать в виде $y = x \,.\, e_\alpha$, $x \in K_\alpha$. Тогда $ye_\alpha = (xe_\alpha)\, e_\alpha = xe_\alpha$, т. е. $ye_\alpha = y$. Это значит, что y регулярно, ч. т. д.

Замечание. Из теорем 6 и 7 вытекает такое следствие: Пусть хаусдорфову бикомпактную полугруппу можно представить в виде теоретико-множественной суммы групп: $S = \sum\limits_\alpha G_\alpha$. Пусть это разложение несократимо, т. е. не существует $\alpha \neq \beta$, для которого было бы $G_\alpha \subseteqq G_\beta$. Тогда: а) это разложение однозначно, б) группы дизъюнктны, в) каждая из групп G_α замкнута, г) группы G_α исчерпывают в точности все максимальные группы из S.

Из выведенных теорем можно сделать простые заключения относительно проблем связности.

Теорема 9. *Связная хаусдорфова бикомпактная полугруппа, состоящая только из регулярных элементов и имеющая конечное число идемпотентов, является группой (и имеет поэтому только один идемпотент).*

Иначе говоря: связная хаусдорфова бикомпактная полугруппа, имеющая более одного, но все же конечное число идемпотентов, обязательно содержит нерегулярные элементы.

Доказательство. Из теорем 6 и 7 вытекает, что такая полугруппа является суммой дизъюнктных замкнутых максимальных групп. Если существует всего лишь конечное число идемпотентов, а S — связная полугруппа, то может существовать только одна максимальная группа, т. е. S есть группа.

Замечание. Предположение о конечном числе идемпотентов существенно. Рассмотрим, напр., множество S действительных чисел замкнутого интервала $\langle\alpha, \beta\rangle$ с обычной топологией на действительной оси. Определим умножение при помощи соотношения $a \odot b = \mathrm{Max}\,(a, b)$. Тогда каждый элемент $\in S$ будет идемпотентом и, следовательно, регулярным. S связно, но не является группой.

III.

Рассмотрим теперь более подробно множества K_α.

Прежде всего несколько простых замечаний. Пусть S содержит бесконечное количество идемпотентов. Тогда каждое K_α не может быть открытым, так как в противном случае из соотношения $S = \sum_\alpha K_\alpha$ вытекало бы, что множества K_α дают открытое покрытие S. Следовательно, можно было бы подобрать конечное число K_α, покрывающее S. Ясно, однако, что это невозможно, ибо все K_α взаимно дизьюнктны и точно покрывают S.

Пусть S имеет конечное число идемпотентов. Тогда, если S связно, то каждое K_α не может быть открытым, точно так же каждое K_α не может быть замкнутым.

На примере, помещенном за теоремой 9 можно, однако, убедиться в том, что если полугруппа содержит бесконечное число идемпотентов, то каждое K_α может быть замкнуто, причем S связно.

Множество K_α (в отличие от G_α) не должно быть обязательно замкнутым. Это значит, что $\overline{K}_\alpha$ может иметь элементы, принадлежащие к идемпотенту $\neq e_\alpha$. Мы покажем, что в таком случае $\overline{K}_\alpha$ содержит также идемпотент $\neq e_\alpha$.

Лемма 9. *Пусть K_α незамкнуто; тогда $\overline{K}_\alpha$ содержит хоть один идемпотент $\neq e_\alpha$.*

Доказательство. а) Прежде всего заметим: если $a \in K_\alpha$, то по лемме 4 и $\overline{\{a, a^2, a^3, \ldots\}} \in K_\alpha$, и тем более $a^n \in K_\alpha$.

б) Пусть теперь $\overline{K}_\alpha - K_\alpha \neq \emptyset$. Возьмем элемент $b \in \overline{K}_\alpha - K_\alpha$. Мы утверждаем, что для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ будет и $b^n \in \overline{K}_\alpha$. Предположим, что это не так, и что следовательно, $b^n \in S - \overline{K}_\alpha$. Тогда существует окрестность $U(b^n)$ такая, что $U(b^n) \cap \overline{K}_\alpha = \emptyset$. Отыщем окрестность $U_1(b)$ элемента b такую, что бы $[U_1(b)]^n \subseteqq U(b^n)$, т. е. $[U_1(b)]^n \cap \overline{K}_\alpha = \emptyset$. Так как $b \in \overline{K}_\alpha$, то в окрестности $U_1(b)$ существует некоторый элемент $a \in K_\alpha$. Следовательно, было бы a^n non $\in \overline{K}_\alpha$. Это противоречит тому факту, что (по лемме 4) $a^n \in K_\alpha$.

Из соотношения $\{b, b^2, b^3, \ldots\} \subseteqq \overline{K}_\alpha$ следует $\overline{\{b, b^2, b^3, \ldots\}} \subseteqq \overline{K}_\alpha$. Однако $\overline{\{b, b^2, b^3, \ldots\}}$ содержит некоторый идемпотент e'_α, отличный от e_α (ибо b не принадлежит к идемпотенту e_α). При этом, очевидно, $e'_\alpha \in \overline{K}_\alpha$, ч. т. д.

Лемма 10. *Пусть $\overline{K}_\alpha \cap K_\beta \neq \emptyset$. Тогда $e_\beta \in \overline{K}_\alpha$.*

Доказательство. Пусть $a \in \overline{K}_\alpha \cap K_\beta$. Согласно лемме 9, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$ содержит идемпотент $e'_\alpha \neq e_\alpha$, лежащий в $\overline{K}_\alpha$, т. е. a принадлежит к идемпотенту e'_α. Однако, $a \in K_\beta$, следовательно, a принадлежит к e_β. Отсюда $e'_\alpha = e_\beta$, $e_\beta \in \overline{K}_\alpha$, ч. т. д.

Обстоятельство, отмеченное в леммах 9 и 10, может, действительно, иметь место, как показывает следующий простой пример коммутативной полугруппы. Пусть S — мультипликативная полугруппа комплексных чисел $|z| \leq 1$. Пусть топологией является здесь топология, индуцированная на S обычной топологией на плоскости. Существуют два идемпотента 0 и 1. Пусть $|a| < 1$. Тогда, если $A_n = \{a^n, a^{n+1}, \ldots\}$, будет $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n = \{0\}$. Следовательно, каждый элемент a, для которого $|a| < 1$, принадлежит к идемпотенту 0. Каждый элемент a, для которого $|a| = 1$, принадлежит, очевидно, к идемпотенту 1. Итак, $K_0 = \{z/|z| < 1\}$, $K_1 = \{z/|z| = 1\}$. Но $\overline{K}_0 = S$ и $\overline{K}_0$ содержит дальнейший идемпотент, а именно число 1.

Докажем, что и между $\overline{K}_\alpha$ и G_α имеется простое соотношение.

Теорема 10. *Для замыкания* $\overline{K}_\alpha$ *имеет место*: $\overline{K}_\alpha e_\alpha = e_\alpha \overline{K}_\alpha = G_\alpha$.

Доказательство. Пусть $\xi \in \overline{K}_\alpha$. Достаточно доказать, что $\xi e_\alpha \in G_\alpha$. Допустим, что $\xi e_\alpha \operatorname{non} \in G_\alpha$. Так как $S - G_\alpha$ открыто, то существует окрестность $U(\xi e_\alpha)$ такая, что $U(\xi e_\alpha) \cap G_\alpha = \emptyset$. Найдем окрестности $U(\xi)$, $U(e_\alpha)$ так, чтобы было $U(\xi)\, U(e_\alpha) \subseteq U(\xi e_\alpha)$. Тогда получим $U(\xi) \,.\, U(e_\alpha) \cap G_\alpha = \emptyset$. Так как $\xi \in \overline{K}_\alpha$, то в $U(\xi)$ существует элемент $x \in K_\alpha$, $x \in U(\xi)$. Следовательно, для некоторого $x \in K_\alpha$ было бы $\{x e_\alpha\} \cap G_\alpha = \emptyset$, что противоречит теореме 8.

Замечание. Из теоремы 10 следует: если e_α — левая (правая, двусторонняя) единица из S, то $\overline{K}_\alpha = G_\alpha$, следовательно, $K_\alpha = G_\alpha$. Это значит, что K_α есть замкнутая группа.

Весьма важной для дальнейших рассуждений является

Лемма 11. *Если* $e_\beta \in \overline{K}_\alpha$, *то* $e_\alpha e_\beta = e_\beta e_\alpha = e_\alpha$.

Доказательство. Так как $\overline{K}_\alpha e_\alpha = G_\alpha$, то и $e_\beta e_\alpha \in G_\alpha$. Для элемента $e_\beta e_\alpha$ (так как он входит в группу G_α) имеет место $e_\alpha \,.\, (e_\beta e_\alpha) = e_\beta e_\alpha$. Следовательно,

$$(e_\beta e_\alpha)^2 = e_\beta (e_\alpha e_\beta e_\alpha) = e_\beta \,.\, e_\beta e_\alpha = e_\beta e_\alpha \,,$$

т. е. $e_\beta e_\alpha$ есть идемпотент. Но единственным идемпотентом группы G_α является e_α. Отсюда $e_\beta e_\alpha = e_\alpha$. Аналогично из соотношения $e_\alpha \overline{K}_\alpha = G_\alpha$ следует $e_\alpha e_\beta \in G_\alpha$. Следовательно, $(e_\alpha e_\beta) \,.\, e_\alpha = e_\alpha e_\beta$. Поэтому

$$(e_\alpha e_\beta)^2 = (e_\alpha e_\beta e_\alpha)\, e_\beta = e_\alpha e_\beta e_\beta = e_\alpha e_\beta \,,$$

т. е. $e_\alpha e_\beta$ есть идемпотент $\in G_\alpha$. Итак, $e_\alpha e_\beta = e_\alpha$. Вместе получаем $e_\alpha e_\beta = e_\beta e_\alpha = e_\alpha$, ч. т. д.

Лемма 12. *Если для* $\alpha \neq \beta$ $\overline{K}_\alpha \cap K_\beta \neq \emptyset$, *то обязательно будет* $K_\alpha \cap \overline{K}_\beta = \emptyset$.

Доказательство. Согласно лемме 10, имеем $e_\beta \in \overline{K}_\alpha$, откуда по лемме 11 $e_\alpha e_\beta = e_\beta e_\alpha = e_\alpha$. Если бы было $K_\alpha \cap \overline{K}_\beta \neq \emptyset$, то было бы, наоборот, и $e_\alpha \in \overline{K}_\beta$ и, следовательно, (по лемме 11) $e_\alpha e_\beta = e_\beta e_\alpha = e_\beta$. Тогда было бы $e_\alpha = e_\beta$, что противоречит предположению.

Дальнейшим следствием леммы 11 является следующее усиление леммы 10 в коммутативном случае:

Лемма 10а. *Пусть S коммутативна. Пусть будет $\overline{K}_\alpha \cap K_\beta \neq \emptyset$. Тогда для максимальной группы G_β имеет место $G_\beta \subseteqq \overline{K}_\alpha$.*

Доказательство. Пусть $c \in G_\beta$, Достаточно доказать, что любая окрестность $U(c)$ содержит элемент $\in K_\alpha$. Так как c регулярно, то $ce_\beta = c$. Найдем окрестности $U_1(c)$, $U(e_\beta)$ так, чтобы было $U_1(c) \,.\, U(e_\beta) \subseteqq U(c)$. Пересечение $U(e_\beta) \cap K_\alpha \neq \emptyset$. Возьмем элемент $m \in U(e_\beta) \cap K_\alpha$. Тогда получим $U_1(c) \,.\, m \subseteqq \subseteqq U(c)$, в частности, $c \,.\, m \in U(c)$. Элемент $c \in G_\beta$ принадлежит к идемпотенту e_β. Элемент $m \in K_\alpha$ принадлежит к идемпотенту e_α. Следовательно, $m \,.\, c$ принадлежит к идемпотенту $e_\alpha e_\beta$. По лемме 11 это произведение равно e_α. Итак, $m \,.\, c \in K_\alpha$, ч. т. д.

Замечание 1. Так как $G_\beta \cap K_\alpha = \emptyset$, то имеет место усиление $G_\beta \subseteqq \subseteqq \overline{K}_\alpha - K_\alpha$.

Замечание 2. Лемму 10а мне не удалось доказать для некоммутативного случая; точно так же мне не удалось на примере опровергнуть ее справедливость.

Из леммы 12 вытекает, напр., такое следствие:

Следствие. *Пусть S — коммутативная хаусдорфова бикомпактная полугруппа с двумя идемпотентами. Тогда S является суммой двух максимальных полугрупп, из которых по меньшей мере одна замкнута.*

Замечание. Если S связно, то конечно, в точности одна из них будет замкнута.

Доказательство. Пусть $S = P_\alpha + P_\beta$. Если P_α замкнуто, нам нечего доказывать. Если P_α не замкнуто, то $\overline{P}_\alpha \cap P_\beta \neq \emptyset$. Следовательно, по лемме 12 $P_\alpha \cap \overline{P}_\beta = \emptyset$, т. е. $\overline{P}_\beta = P_\beta$, значит P_β замкнуто.

Определение 6. *Мы говорим, что идемпотент $e \in S$ является примитивным идемпотентом из S, если не существует идемпотент $x \neq e$, для которого было бы*

$$ex = xe = x\ .$$

Теорема 11. *Пусть каждый идемпотент хаусдорфовой бикомпактной полугруппы S является примитивным идемпотентом. Тогда каждое K_α замкнуто.*

Доказательство. Пусть K_α не замкнуто. Тогда, согласно лемме 9, $\overline{K}_\alpha$ содержит идемпотент $e_\beta \neq e_\alpha$. Следовательно, $\overline{K}_\alpha \cap K_\beta \neq \emptyset$. Из леммы 11 следует, что $e_\alpha e_\beta = e_\beta e_\alpha = e_\alpha$, откуда вытекает, что e_β не является примитивным идемпотентом $\in S$, что противоречит предположению.

Замечание 1. Типичным примером полугруппы, выполняющей условия теоремы 11, может служить простая хаусдорфова бикомпактная полугруппа без нуля. Исследование таких полугрупп и составляет содержание работы Нумакуры [2].

Замечание 2. Предположим, что S коммутативно и содержит два примитивных идемпотента $e_1 \neq e_2$. а) Пусть $e_1 . e_2 \neq e_1$; тогда $e_1 . e_1 e_2 = e_1 e_2$. Следовательно, e_1 не является примитивным идемпотентом. б) Пусть $e_1 e_2 \neq e_2$; тогда $e_2 e_1 e_2 = e_1 e_2$, следовательно, e_2 не является примитивным идемпотентом. Так как должен наступить один из этих случаев, то ясно, что существует не более одного примитивного идемпотента. Более подробным анализом можно доказать, что коммутативная хаусдорфова бикомпактная полугруппа имеет всегда в точности один примитивный идемпотент.

Определение 7. *Мы говорим, что идемпотент $e \in S$ является максимальным, если не существует идемпотент $x \neq e$, который удовлетворял бы уравнению*

$$ex = xe = e \, .$$

Замечание. Например, каждая левая (правая) единица представляет собой максимальный идемпотент. Если в S существует двусторонняя единица, то она является единственным максимальным идемпотентом.

Теорема 12. *Пусть e_α — максимальный идемпотент хаусдорфовой бикомпактной полугруппы. Тогда K_α замкнуто.*

Доказательство. Достаточно ограничиться случаем, когда существуют по меньшей мере два идемпотента. Если бы было $\overline{K}_\alpha - K_\alpha \neq \emptyset$, то существовало бы K_β такое, что было бы $\overline{K}_\alpha \cap K_\beta \neq \emptyset$ и $e_\beta \in \overline{K}_\alpha$, По лемме 11 было бы $e_\alpha e_\beta = e_\beta e_\alpha = e_\alpha$. Значит, e_α не было бы максимальным идемпотентом.

Замечание. Покажем на примере, что существует хаусдорфова бикомпактная полугруппа, каждый идемпотент которой является примитивным и одновременно максимальным. Пусть S — множество действительных чисел замкнутого интервала $\langle \alpha, \beta \rangle$ с обычной топологией на действительной оси. Пусть, по определению, $a \odot b = b$ для всех $a, b \in S$. Каждый элемент является сам идемпотентом, причем, как примитивным, так и максимальным. Каждое K_α является, действительно, замкнутым одноточечным множеством.

Имеет место

Теорема 13. *Пусть S — связная хаусдорфова бикомпактная полугруппа, имеющая более одного, но все же конечное число идемпотентов. Тогда*

а) невозможно, чтобы все идемпотенты были примитивными,

б) невозможно, чтобы все идемпотенты были максимальными.

Доказательство. а) Если бы все идемпотенты были примитивными, то из теоремы 11 следовало бы, что S является суммой конечного числа замкнутых множеств, вследствие чего S не могла бы быть связной полугруппой.

б) Если бы все идемпотенты были максимальными, то из теоремы 12 следовало бы аналогично, что S не могло бы быть связным.

IV.

Ясно, что свойства полугруппы существенно зависят от того, содержит ли $\overline{K}_\alpha$ идемпотенты, и какие именно. В настоящем разделе мы докажем еще несколько теорем, касающихся этих вопросов.

Пусть e_α — фиксированный идемпотент. Положим $\mathfrak{P}_\alpha = \sum_\xi K_\xi$, где K_ξ пробегает все множества K_ξ, для которых имеет место $e_\alpha \in \overline{K}_\xi$. Аналогично положим $\mathfrak{Q}_\alpha = \sum_\eta K_\eta$, где e_η пробегает все идемпотенты $\in S$, для которых имеет место $e_\eta \in \overline{K}_\alpha$.

Из леммы 11 для каждого идемпотента $e_\xi \in \mathfrak{P}_\alpha$ следует

$$e_\xi e_\alpha = e_\alpha e_\xi = e_\xi\,, \tag{8}$$

а для каждого идемпотента $e_\eta \in \mathfrak{Q}_\alpha$

$$e_\eta e_\alpha = e_\alpha e_\eta = e_\alpha\,. \tag{9}$$

Лемма 13. *Множества $\mathfrak{P}_\alpha$ и $\mathfrak{Q}_\alpha$ удовлетворяют соотношению $\mathfrak{P}_\alpha \cap \mathfrak{Q}_\alpha = K_\alpha$.*

Доказательство. Прежде всего, $K_\alpha \subseteqq \mathfrak{P}_\alpha \cap \mathfrak{Q}_\alpha$. Из соотношения $K_\eta \cap \overline{K}_\alpha \neq \emptyset$ $(\eta \neq \alpha)$ вытекает, в силу леммы 12, $\overline{K}_\eta \cap K_\alpha = \emptyset$. Аналогично, из соотношения $\overline{K}_\xi \cap K_\alpha \neq \emptyset$ $(\xi \neq \alpha)$, в силу леммы 12, вытекает $K_\xi \cap \overline{K}_\alpha = \emptyset$. Следовательно, ни одно из множеств K_ξ $(\xi \neq \alpha)$ не совпадает ни с одним из множеств K_η $(\eta \neq \alpha)$ и наоборот. Этим и завершается доказательство теоремы.

Лемма 14. *Соотношение $\mathfrak{Q}_\alpha = K_\alpha$ имеет место тогда и только тогда, если K_α замкнуто.*

Доказательство. а) Если $K_\alpha = \overline{K}_\alpha$, то не существует $e_\eta \neq e_\alpha$, для которого было бы $e_\eta \in \overline{K}_\alpha$. Следовательно, $\mathfrak{Q}_\alpha = K_\alpha$.

б) Наоборот, если не существует $e_\eta \neq e_\alpha$, для которого было бы $e_\eta \in \overline{K}_\alpha$, то по лемме 12 для каждого K_λ $(\lambda \neq \alpha)$ будет $K_\lambda \cap \overline{K}_\alpha = \emptyset$. Это значит, что $\overline{K}_\alpha \cap \sum_{\lambda \neq \alpha} K_\lambda = \emptyset$, или $\overline{K}_\alpha = K_\alpha$, ч. т. д.

Лемма 15. *Пусть K_α открыто. Тогда $\mathfrak{P}_\alpha = K_\alpha$.*

Доказательство. Пусть K_α открыто, т. е. $\sum_{\lambda \neq \alpha} K_\lambda$ замкнуто. Следовательно, e_α non $\in \sum_{\lambda \neq \alpha} K_\lambda = \overline{\sum_{\lambda \neq \alpha} K_\lambda}$. Так как $\sum_{\lambda \neq \alpha} \overline{K}_\lambda \subseteq \overline{\sum_{\lambda \neq \alpha} K_\lambda}$, то тем более будет e_α non $\in \sum_{\lambda \neq \alpha} \overline{K}_\lambda$, откуда для любого $\lambda \neq \alpha$ получим e_α non $\in \overline{K}_\lambda$. Итак $\mathfrak{P}_\alpha = K_\alpha$.

Замечание. В общем случае лемма 15 не обратима. Если $K_\alpha = \mathfrak{P}_\alpha$, то K_α не должно быть открытым. Пусть, напр., S — множество действительных чисел интервала $\langle c, d\rangle$ с обычной топологией на действительной прямой. Пусть $a \odot b = \mathrm{Max}\,(a, b)$. Одноточечное множество $\{d\}$ не является открытым, но несмотря на это $K_d = \mathfrak{P}_d = \{d\}$.

Лемму 15 можно, однако, обратить в следующем случае:

Лемма 16. *Пусть S имеет конечное число идемпотентов. В таком случае для того, чтобы было $\mathfrak{P}_\alpha = K_\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы K_α было открытым.*

Доказательство. Если $\mathfrak{P}_\alpha = K_\alpha$, то для каждого идемпотента $e_\lambda \neq e_\alpha$ будет e_α non $\in \overline{K}_\lambda$. Для любого $\lambda \neq \alpha$ имеет место $\overline{K}_\lambda \cap K_\alpha = \emptyset$, ибо в противном случае по лемме 10 было бы $e_\alpha \in \overline{K}_\lambda$, что противоречит предположению. Следовательно, будет и $K_\alpha \cap \sum\limits_{\lambda \neq \alpha} \overline{K}_\lambda = K_\alpha \cap \overline{\sum\limits_{\lambda\neq\alpha} K_\lambda} = \emptyset$. Отсюда и из соотношений $S = K_\alpha + \sum\limits_{\lambda\neq\alpha} K_\lambda$, $K_\alpha \cap \sum\limits_{\lambda\neq\alpha} K_\lambda = \emptyset$ следует $\sum\limits_{\lambda\neq\alpha} K_\lambda = \overline{\sum\limits_{\lambda\neq\alpha} K_\lambda}$, следовательно, $\sum\limits_{\lambda\neq\alpha} K_\lambda$ замкнуто, т. е. K_α открыто, ч. т. д.

Если S коммутативно, то о множествах $\mathfrak{P}_\alpha$ и $\mathfrak{Q}_\alpha$ можно сказать еще следующее:

Теорема 14. *Пусть S коммутативно. Тогда:*

а) множество $\mathfrak{Q}_\alpha$ есть полугруппа, единственным примитивным идемпотентом которой является e_α;

б) множество $\mathfrak{P}_\alpha$ есть полугруппа, единственным максимальным идемпотентом которой является e_α:

в) имеет место $\mathfrak{Q}_\alpha \,.\, e_\alpha = \overline{\mathfrak{Q}}_\alpha e_\alpha = G_\alpha$.

Доказательство. а) Пусть $e_{\eta_1} \in \overline{K}_\alpha$, $e_{\eta_2} \in \overline{K}_\alpha$. Тогда (так как по лемме 1 и $\overline{K}_\alpha$ является полугруппой) будет также $e_{\eta_1\eta_2} = e_{\eta_1} \,.\, e_{\eta_1} \in \overline{K}_\alpha$, т. е. $K_{\eta_1\eta_2} \subseteqq \mathfrak{Q}_\alpha$. Пусть $a \in K_{\eta_1}$, $b \in K_{\eta_2}$; тогда ab принадлежит к идемпотенту $e_{\eta_1\eta_2}$. Следовательно $ab \in K_{\eta_1\eta_2} \subseteqq \mathfrak{Q}_\alpha$. Отсюда следует, что $\mathfrak{Q}_\alpha$ — полугруппа. Ввиду леммы 11, для любого $e_\eta \in \overline{K}_\alpha$ будет $e_\eta e_\alpha = e_\alpha$. Следовательно, e_α — единственный примитивный идемпотент $\in \mathfrak{Q}_\alpha$.

б) Пусть $e_\alpha \in \overline{K}_{\xi_1}$, $e_\alpha \in \overline{K}_{\xi_2}$. Каждый элемент множества $K_{\xi_1} \,.\, K_{\xi_2}$ принадлежит к идемпотенту $e_{\xi_1\xi_2} = e_{\xi_1} \,.\, e_{\xi_2}$, следовательно, $K_{\xi_1} \,.\, K_{\xi_2} \subseteqq K_{\xi_1\xi_2}$. Чтобы доказать, что $K_{\xi_1\xi_2} \subseteqq \mathfrak{P}_\alpha$ (и, следовательно, что $\mathfrak{P}_\alpha$ — полугруппа), достаточно доказать, что в каждой окрестности $U(e_\alpha)$ находится элемент $\in K_{\xi_1\xi_2}$. Так как $e_\alpha^2 = e_\alpha$, то существуют окрестности $U_1(e_\alpha)$, $U_2(e_\alpha)$ такие, что $U_1(e_\alpha) \,.\, U_2(e_\alpha) \subseteqq U(e_\alpha)$. Так как $e_\alpha \in \overline{K}_{\xi_1}$, то существует $a \in K_{\xi_1} \cap U_1(e_\alpha)$. Аналогично существует элемент $b \in K_{\xi_2} \cap U_2(e_\alpha)$. Имеем $ab \in U(e_\alpha)$. Однако, ab принадлежит к идемпотенту $e_{\xi_1}e_{\xi_2}$. Следовательно, $U(e_\alpha) \cap K_{\xi_1\xi_2} \neq \emptyset$. По лемме 11 для любого e_ξ будет $e_\xi e_\alpha = e_\xi$; итак, e_α — единственный максимальный идемпотент $\in \mathfrak{P}_\alpha$.

в) Пусть $c \in \mathfrak{Q}_\alpha$, т. е. $c \in K_\eta$ для подходящего η. Тогда $c \,.\, e_\alpha = c(e_\eta e_\alpha) = (ce_\eta)\, e_\alpha \in G_\eta \,.\, e_\alpha$. По лемме 10а будет далее $G_\eta \,.\, e_\alpha \subseteqq \overline{K}_\alpha e_\alpha = G_\alpha$, следовательно, $ce_\alpha \in G_\alpha$. Так как далее $K_\alpha \,.\, e_\alpha = G_\alpha$, то получим $\mathfrak{Q}_\alpha e_\alpha = G_\alpha$.

Докажем, наконец, что $\overline{\mathfrak{Q}}_\alpha e_\alpha = G_\alpha$. Допустим противное. Пусть $\gamma \in \overline{\mathfrak{Q}}_\alpha$ и пусть $\gamma e_\alpha \in S - G_\alpha$. Найдем окрестности $U(\gamma)$, $U(e_\alpha)$, такие, чтобы было $U(\gamma) \,.\, U(e_\alpha) \cap G_\alpha = \emptyset$. Так как $\gamma \in \overline{\mathfrak{Q}}_\alpha$, то будет $U(\gamma) \cap \mathfrak{Q}_\alpha \neq \emptyset$. Возьмем $x \in U(\gamma) \cap \mathfrak{Q}_\alpha$. Тогда получим $\{x \,.\, e_\alpha\} \cap G_\alpha = \emptyset$, что противоречит доказанному соотношению $\mathfrak{Q}_\alpha e_\alpha = G_\alpha$.

Замечание 1. Так как, согласно лемме 10а, $G_\eta \subseteqq \overline{K}_\alpha$, то и $\sum\limits_\eta G_\eta \subseteqq \overline{K}_\alpha$, т. е. все регулярные элементы из $\mathfrak{Q}_\alpha$ лежат в $\overline{K}_\alpha$.

Замечание 2. По лемме 10а будет также для любого $\overline{K}_\xi$ $G_\alpha \subseteqq \overline{K}_\xi$. Следовательно, будет и $G_\alpha \subseteqq \bigcap\limits_\xi \overline{K}_\xi$.

Следующие теоремы опять справедливы независимо от коммутативности.

Теорема 15. *Пусть S — связная хаусдорфова бикомпактная полугруппа. Пусть S содержит более одного, но конечное число идемпотентов. Тогда для любого идемпотента e_α будет или $\mathfrak{P}_\alpha \neq K_\alpha$, или $\mathfrak{Q}_\alpha \neq K_\alpha$.*

Доказательство. Если бы для какого-либо идемпотента e_α было $K_\alpha = \mathfrak{P}_\alpha = \mathfrak{Q}_\alpha$, то подмножество K_α было бы (по лемме 14 и 16) как открытым, так и замкнутым, следовательно, S не было бы связным.

Теорема 16. *Пусть S — хаусдорфова бикомпактная полугруппа с конечным числом идемпотентов. Пусть e_α — примитивный идемпотент. Тогда K_α будет открытым множеством.*

Доказательство. Так как e_α — примитивный идемпотент, т. е. не существует идемпотент $e_\xi \neq e_\alpha$ такой, чтобы $e_\alpha \,.\, e_\xi = e_\xi \,.\, e_\alpha = e_\xi$, то обязательно должно быть $\mathfrak{P}_\alpha = K_\alpha$. Следовательно, по лемме 16 K_α открыто.

Замечание. На примерах можно опять показать, что теорема не обязательно остается в силе для случая бесконечного числа идемпотентов.

Из этой теоремы мы выведем следствие:

Можно доказать, (см. Нумакура [2]), что хаусдорфова бикомпактная полугруппа содержит (только один) минимальный двусторонний идеал $\mathfrak{n}$. Этот идеал замкнут, и каждый его идемпотент является примитивным. В то же время известно, что $\mathfrak{n}$ является суммой дизъюнктных изоморфных групп.

Определение 8. *Элемент $c \in S$ назовем $\mathfrak{n}$-потентным, если c принадлежит к какому-нибудь идемпотенту $\in \mathfrak{n}$. Мы скажем, что c есть нетривиальный $\mathfrak{n}$-потентный элемент, если c является $\mathfrak{n}$-потентным элементом, но $c \in S - \mathfrak{n}$.*

Если S имеет нулевой элемент z, то $\mathfrak{n} = \{z\}$ и мы получаем естественную модификацию алгебраического понятия нильпотентности.

Теорема 17. *Пусть S — связная хаусдорфова бикомпактная полугруппа, имеющая более одного, но конечное число идемпотентов. Тогда S необходимо содержит нетривиальные $\mathfrak{n}$-потентные элементы.*

Доказательство. Пусть $E = \{e_\alpha / \alpha \in N\}$ есть множество всех идемпотентов $\in \mathfrak{n}$. Если $\mathfrak{n}$ содержит e_α, то оно содержит и $K_\alpha \, . \, e_\alpha = G_\alpha$, т. е. всю (замкнутую) максимальную группу G_α. Отсюда непосредственно следует, что $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in N} G_\alpha$. Очевидно, $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in N} G_\alpha \subseteq \sum_{\alpha \in N} K_\alpha$. Прежде всего, $\mathfrak{n}$ замкнуто. Далее, по предыдущей теореме каждое K_α открыто, следовательно, и ΣK_α открыто. Если бы было $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in N} K_\alpha$, то $\mathfrak{n}$ было бы одновременно замкнутым и открытым, значит, S не было бы связным. Поэтому $\sum_{\alpha \in N} K_\alpha - \mathfrak{n} \neq \emptyset$, ч. т. д.

Замечание. Из доказательства видно, между прочим, что минимальный двусторонний идеал связной хаусдорфовой бикомпактной полугруппы, имеющей конечное число идемпотентов, является группой.

Исследуем еще два своего рода „крайних" случая.

Если полугруппа S содержит хотя бы два замкнутых множества K_α, то, очевидно, $\bigcap_\alpha \overline{K}_\alpha = \emptyset$. Если же существует не более одного замкнутого множества K_α, то возможен случай $\bigcap_{e_\alpha \in S} \overline{K}_\alpha \neq \emptyset$. В этом случае имеет место:

Теорема 18. *Пусть $\bigcap_{e_\alpha \in S} \overline{K}_\alpha \neq \emptyset$. Тогда существует один и только один максимальный идемпотент в S. Таковым является единственный идемпотент, содержащийся в $\bigcap_{e_\alpha \in S} \overline{K}_\alpha$.*

Доказательство. Множество $T = \bigcap_{e_\alpha \in S} \overline{K}_\alpha$ будет, очевидно, замкнутым подмножеством в S. Пусть $a \in T$, т. е. $a \in \overline{K}_\alpha$ для любого α. Ввиду доказательства леммы 9, для каждого α будет и $\overline{\{a, a^2, a^3, \ldots\}} \in \overline{K}_\alpha$. Следовательно, будет также $\overline{\{a, a^2, a^3, \ldots\}} \subseteq T$. Однако $\overline{\{a, a^2, a^3, \ldots\}}$ содержит согласно теореме 1, идемпотент. Следовательно, T содержит хоть один идемпотент e.

Рассмотрим множество K_e. Пересечение $\overline{K}_\alpha \cap K_e$ является для любого α непустым, ибо содержит хотя бы элемент e. По лемме 11 для любого идемпотента e_α

$$e_\alpha \, . \, e = e \, . \, e_\alpha = e_\alpha \, .$$

Следовательно, не может существовать идемпотент $x \neq e$, который удовлетворял бы уравнению

$$xe = ex = e \, ,$$

т. е. e есть максимальный идемпотент. Так как для любого идемпотента $e' \neq e$

$$e'e = ee' = e' \, ,$$

то не существует никаких других максимальных идемпотентов. Отсюда одновременно следует, что T имеет лишь один идемпотент. Ибо, если бы e, e_1 были идемпотентами $\in T$, то, с одной стороны, было бы

$$e_\alpha e = e e_\alpha = e_\alpha$$

для любого α, а с другой стороны,

$$e_\beta e_1 = e_1 e_\beta = e_\beta \quad \text{для любого } \beta .$$

Если положить $e_\alpha = e_1$, $e_\beta = e$, получим $e_1 e = e e_1 = e_1$, $e e_1 = e_1 e = e$, т. е. $e = e_1$, что противоречит предположению.

Замечание. Если S имеет одну единственную (левую, правую) единицу и $T \neq \emptyset$, то очевидно, что эта единица является максимальным идемпотентом из теоремы 18.

Вторым „крайним" случаем является случай, когда существует такое K_α, что $\overline{K}_\alpha = S$. Следующий пример показывает, что это возможно и в том случае, если существует бесконечное количество идемпотентов. Пусть S — множество комплексных чисел $|z| \leqq 1$ с обычной топологией в плоскости. Дадим определение: $z_1 \odot z_2 = z_1 \cdot |z_2|$. Идемпотентами являются элементы 0 и $e^{i\varphi}$ для всех $0 \leqq \varphi < 2\pi$. (Каждое $e^{i\varphi}$ является, кроме того, правой единицей.) Так как $\underbrace{z \odot z \odot \ldots \odot z}_{n \text{ раз}} = z \cdot |z|^{n-1}$, то очевидно, что каждый элемент z, для которого $|z| < 1$, принадлежит к идемпотенту 0. Кроме того, каждый элемент для которого $|z| = 1$ сам по себе образует максимальную группу $K_\varphi = \{e^{i\varphi}\}$. При этом, действительно, $\overline{K}_0 = S$, где $K_0 = \{z / |z| < 1\}$.

Сформулируем теорему, в некотором смысле двойственную теореме 18:

Теорема 19. *Пусть для некоторого K_α из S имеет место $\overline{K}_\alpha = S$. Тогда*

а) существует только одно такое K_α,

б) e_α является единственным примитивным идемпотентом $\in S$,

в) если S имеет конечное число идемпотентов, то K_α открыто.

Доказательство. Пусть $S = K_\alpha + \sum\limits_{\lambda \neq \alpha} K_\lambda$. Так как $K_\lambda \cap \overline{K}_\alpha \neq \emptyset$, то $K_\alpha \cap \overline{K}_\lambda = \emptyset$. По лемме 11 для любого $\lambda \neq \alpha$ имеет место $e_\lambda e_\alpha = e_\alpha e_\lambda = e_\alpha$. Следовательно, ни один идемпотент $e_\lambda \neq e_\alpha$ не будет примитивным, так как уравнение $e_\lambda x = x e_\lambda = x$ всегда имеет решение $x = e_\alpha$. Идемпотент e_α является, однако, примитивным, ибо уравнение $x e_\alpha = e_\alpha x = x$ имеет только одно решение $x = e_\alpha$.

Если бы свойством, приведенным в нашей теореме, обладало помимо K_α еще и K_β, то для любого $e_\mu \neq e_\beta$ было бы $e_\mu e_\beta = e_\beta e_\mu = e_\beta$. Положив $\lambda = \beta$, $\mu = \alpha$, мы получим $e_\alpha = e_\beta$.

Утверждение в) следует непосредственно из теоремы 16.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Schwarz Št.*: К теории периодических полугрупп, Чехословацкий математический журнал, Т *3* (78), 1953, 7—21.

[2] *Katsumi Numakura:* On bicompact semigroups, Mathematical Journal of Okayama Univ., Vol. *1*, 1952, 99—108.

Summary

ON HAUSDORFF BICOMPACT SEMIGROUPS

ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava.

(Received August 23, 1954.)

Let S be a Hausdorff bicompact semigroup, i. e. a Hausdorff bicompact space, in which an associative continuous multiplication is defined.

The purpose of the paper is to study the structure of S. We show that the structure of such semigroups is analogous to the structure of torsion semigroups given in the paper [1].

It is known (see NUMAKURA [2]) that S contains always at least one idempotent.

Let be $a \in S$. Let us put $A = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$; then $\bar{A}$ contains one and only one idempotent. We shall say that $a \in S$ belongs to the idempotent e if e is the idempotent $\in \bar{A}$.

The set of all elements belonging to the idempotent e_α will be denoted by K_α. Then S can be written as a sum of disjoint sets $S = \sum_\alpha K_\alpha$, where each K_α contains just one idempotent e_α.

If S is commutative, the sets K_α are maximal semigroups. (They are maximal in the sense that K_α is the greatest subsemigroup of S containing one and only one idempotent e_α.) This theorem is a consequence of a more general statement: If S is commutative and $a \in S$ belongs to e_1, $b \in S$ belongs to e_2, then ab belongs to e_1e_2.

To every e_α there exists a unique maximal group G_α containing e_α as unit element. It is $G_\alpha \subseteq K_\alpha$. Every G_α is closed and there holds $G_\alpha = K_\alpha e_\alpha = e_\alpha K_\alpha = \bar{K}_\alpha e_\alpha = e_\alpha \bar{K}_\alpha$.

An element $a \in S$ is called regular if $\overline{\{a, a^2, a^3, \ldots\}}$ is a group. The elements contained in $\sum_\alpha G_\alpha$ and only these are regular. The semigroup is a sum of disjoint groups if and only if every $a \in S$ is regular. Some consequences of this fact are given.

The sets K_α (in contrary to G_α) are not necessarily closed. If K_α is not closed, then $\overline{K}_\alpha$ contains at least one idempotent $\neq e_\alpha$. A number of lemmas concerning the relation between K_α and $\overline{K}_\alpha$ (with consequences) is given.

An idempotent e is called primitive if there does not exist any idempotent $x \neq e$ for which the relation $ex = xe = x$ holds. If every idempotent $\in S$ is primitive, then every K_α is closed.

An idempotent e is called maximal if there does not exist any idempotent $x \neq e$ satisfying the relation $ex = xe = e$. If e_α is a maximal idempotent $\in S$, then K_α is closed.

Let e_α be a fixed idempotent $\in S$. Let us put $\mathfrak{P}_\alpha = \sum_\xi K_\xi$, the sum being extended over all K_ξ for which $e_\alpha \in \overline{K}_\xi$ holds. Let further be $\mathfrak{Q}_\alpha = \sum_\eta K_\eta$, where e_η runs over all idempotents $\in S$ for which $e_\eta \in \overline{K}_\alpha$ holds.

It is $\mathfrak{Q}_\alpha = K_\alpha$ if and only if K_α is closed. If S has only a finite number of idempotents then $\mathfrak{P}_\alpha = K_\alpha$ holds if and only if K_α is open. A number of results concerning the sets $\mathfrak{P}_\alpha$ and $\mathfrak{Q}_\alpha$ (with consequences) is given.

In conclusion two "extreme" cases are studied. Suppose that $\bigcap_\alpha \overline{K}_\alpha \neq \emptyset$, where e_α runs over all idempotents $\in S$. Then there exists one and only one maximal idempotent in S. It is the idempotent contained in $\bigcap_\alpha \overline{K}_\alpha$. Suppose on the other side that, for some α, $\overline{K}_\alpha = S$ holds. Then there exists only one such e_α. The corresponding e_α is the single primitive idempotent $\in S$. If S has only a finite number of idempotents, then K_α is open.[4])

---

[4]) *Note* (added in proof, March 4, 1955). According to a reference in the Mathematical Reviews,, vol. 15, No. 10, p. 854 (November 1954) Theorem 6 of this paper is quoted (without proof) in the paper A. D. Wallace: A note on mobs II, Anais Acad. Brasil Ci 25, 335—336, 1953. It is further worthy of notice that a few of the results of our paper are also in a loose connection with a recent paper of R. J. Koch: Remarks on primitive idempotents in compact semigroups with zero, Proceedings AMS, vol. 5, 828—833 (October 1954).