Czechoslovak Mathematical Journal

Ján Jakubík

О отношениях конгруэнтности на абстрактных алгебрах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 4 (1954), No. 4, 314–317

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100119

Чехословацкий математический журнал, т. 4 (79) 1954

О ОТНОШЕНИЯХ КОНГРУЭНТНОСТИ НА АБСТРАКТНЫХ АЛГЕБРАХ

ЯН ЯКУБИК (Ján Jakubík), Кошице

(Поступило в редакцию 15/V 1954 г.)

Г. Биркгоф выдвинул проблему ([1], проблема 33), касающуюся дополнительных соотношений конгруэнтности на абстрактных алгебрах. В настоящей заметке на простом примере доказывается, что ответ на поставленный в упомянутой проблеме вопрос положителен.

Выражениями алгебра, подалгебра, соотношение конгруэнтности мы будем пользоваться в том же смысле, как и в книге [1].[1]) Если R — соотношение конгруэнтности в алгебре A и если элементы $x, y \in A$ конгруэнтны по соотношению R, то мы будем писать xRy. Каждое соотношение конгруэнтности (взаимно однозначно) определяется соответствующим разбиением множества A; такое разбиение мы будем называть производящим разбиением в обозначать той же буквой, как и рассматриваемое соотношение конгруэнтности.

Соотношения конгруэнтности R, R' на A мы называем дополнительными,[2] если для любой пары $a, b \in A$ из справедливости соотношений

$$aRx, \; xR'b$$

вытекает существование элемента $y \in A$, для которого имеет место

$$aR'y\,, \quad yR'b\,.$$

В таком случае мы будем также говорить, что производящие разбиения R, R' дополнительны. Разбиение множества A, содержащее всего лишь один класс, мы будем называть наибольшим и обозначать через R_1. Разбиение множества A, в котором каждый класс содержит только один элемент, мы называем наименьшим разбиением и обозначаем через R_0. Очевидно, имеют место утверждения 1. разбиения R_0, R_1 являются про-

[1]) См. алгебраическую часть введения к упомянутой книге.

[2]) В русском переводе книги [1] такие соотношения конгруэнтности названы перестановочными.

изводящими, 2. разбиение $R_0(R_1)$ является дополнительным с каждым производящим разбиением на A.

Пусть S — подалгебра в алгебре A, содержащая один элемент („одноэлементная подалгебра"), пусть R — производящее разбиение на алгебре A. Класс разбиения R, который содержит элемент, лежащий в подалгебре S, мы обозначим через $S(R)$.

Г. Биркгоф выдвинул следующую проблему ([1], Проблема 33):

Пусть A — алгебра с одноэлементной подалгеброй и дополнительными производящими разбиениями. Может ли алгебра A иметь соотношения конгруэнтности R, R', $R \neq R'$, для которых имеет место $S(R) = S(R')$?

Рассмотрим следующий пример:

Пусть G — группа, содержащая хотя бы два элемента. Предположим, что ни один из элементов группы G не обозначен символом 0. Образуем множество $A = G \cup \{0\}$ и определим для любой упорядоченной пары элементов $x, y \in A$ их произведение $x_0 y$ следующим образом:

если $x, y \in G$, то пусть $x_0 y = xy$ (выражение в правой части означает произведение в G);

если же хоть один из элементов x, y равен 0, то пусть $x_0 y = 0$.

Исследуем производящие разбиения этого группоида A.

1. Пусть r — производящее разбиение на G. Образуем разбиение R множества A таким образом: Пусть элемент 0 образует особый класс. Пусть разбиение множества G на классы одинаково как в R, так и в разбиении r. Очевидно, R будет производящим разбиением на A. Образованные таким образом разбиения множества A мы назовем разбиениями типа G. Разбиение R_0 на A будет, очевидно, также разбиением типа G.

2. Кроме разбиений типа G и разбиения R_1 на A не существует никаких других производящих разбиений.

Доказательство: Пусть R — произвольное производящее разбиение на A. Если элемент 0 образует особый класс, нетрудно убедиться, что разбиение R будет типа G. Если же элемент 0 не образует особого класса, то существует элемент $x \in G$, для которого имеет место $xR0$. (1) Пусть $y \in G$. Из соотношения (1) следует

$$y = [(yx^{-1})_0\, x]\, R[(yx^{-1})_0\, 0] = 0\ ,$$

откуда $R = R_1$. Утверждение доказано.

3. Так как G — группа, то все производящие разбиения на G дополнительны. Из 1., 2. тогда очевидно вытекает, что все производящие разбиения на A дополнительны.

Пусть R_2 — производящее разбиение на A, имеющее классы $\{0\}$, G. Обозначим $S = \{0\}$. Очевидно, S будет одноэлементной подалгеброй в A. Имеет место $R_2 \neq R_0$ и одновременно $S(R_2) = S(R_0)$.

Простейший пример такого рода мы получим в том случае, когда рассматриваемая группа G имеет два элемента. Соответствующий группоид равен с точностью до изоморфизма группоиду $A = \{0, 1, 2\}$, в котором умножение определено, как умножение соответствующих чисел по mod 3. Единственным нетривиальным производящим разбиением является $R_2 = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$. Если $S = \{0\}$, тогда $R_2 \neq R_0$, $S(R_2) = S(R_0)$.

Отсюда следует

Теорема. *Существует алгебра A с одноэлементной подалгеброй S такая, что*

1. *все соотношения конгруэнтности на A дополнительны,*

2. *существуют соотношения конгруэнтности R, R' на A, для которых имеет место*

$$S(R) = S(R')\,, \quad R \neq R'\,.$$[3]

Замечание. В предыдущем примере элемент одноэлементной подалгебры S не является „единицей". Требования проблемы 33 можно сделать более сильными, если предположить, что A — групоид и элемент подалгебры S — двусторонняя единица в A. В этом случае ответ на поставленный вопрос тоже положительный, как показывает следующий пример:

Пусть G — простой групоид (т. е. такой, на котором не существует нетривиальное отношение конгруэнтности), пусть для каждого $x \in G$ $xx \neq x$, пусть G имеет более одного элемента. (Как пример может служить $G = \{2, 3\}$ с таблицей умножения

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{array}\,.)$$

Предположим, что $1 \bar{\in} G$. Определим на множестве $A = \{1\} \cup G$ умножение $x_0 y$ как следует: если $x, y \in G$, положим $x_0 y = xy$; для каждого $x \in A$ положим $1_0 x = x_0 1 = x$. Пусть $R_2 = \{\{1\}, G\}$. Очевидно, что R_2 — производящее разбиение множества A. R_2 — единственное нетривиальное отношение конгруэнтности на A.

Доказательство: Пусть R — отношение конгруэнтности на A. Если в R $xR1 \Rightarrow x = 1$, потом $R = R_0$ или $R = R_2$. Если существует $x \in A$, $x \neq 1$, $xR1$, потом $x = 1_0 x R x_0 x = xx$, т. е. $xRxx$. Следовательно, для каждого $y \in G$ $1Ry$, т. е. $R = R_1$. Из этого вытекает, что все отношения конгруэнтности на A дополнительны. Пусть $S = \{1\}$. Имеет место $R_2 \neq R_0$, $S(R_2) = S(R_0)$.

[3]) Замечание при корректуре. Исследуемая проблема Г. Биркгофа была решена тоже в статье *А. И. Мальцева* „К общей теории алгебраических систем" (Матем. сборник, 35 (77):1; номер журнала вышел в августе 1954). Пример А. И. Мальцева есть алгебра с тремя элементами и одной тернарной операцией.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Garret Birkhoff:* Lattice theory (American Mathem. Society. Colloquium publications Vol. XXV). Русский перевод (Издат. И. Л., Москва,. 1952).

Summary

CONGRUENCE RELATIONS ON ABSTRACT ALGEBRAS

JÁN JAKUBÍK, Košice.

(Received May 15, 1954.)

Let A be abstract algebra, let S be subalgebra of A, containing only one element ("one — element subalgebra"), let R be a congruence relation on A (see [1], foreword on algebra). The class in the partition of A, determined by the relation R, which contain the element of S we denote by $S(R)$. By a simple example is proved the folowing statement:

There exists an algebra A with a one-element subalgebra S with the following properties: 1. all congruence relations on A are permutable and 2. there exist congruence relations R, R' on A such that $R \neq R'$, $S(R) = S(R')$.

This solves a problem of G. Birkhoff ([1], problem 33).