Czechoslovak Mathematical Journal

Štefan Schwarz

О некоторой связи Галуа в теории характеров полугрупп

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 4 (1954), No. 4, 296–313

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100118

Чехословацкий математический журнал, т. 4 (79) 1954

О НЕКОТОРОЙ СВЯЗИ ГАЛУА В ТЕОРИИ ХАРАКТЕРОВ ПОЛУГРУПП

ШТЕФАН ШВАРЦ, (Štefan Schwarz), Братислава

(Поступило в редакцию 7/IV 1954 г.)

Пусть S — конечная коммутативная полугруппа. В работе [1] мы исследовали строение полугруппы S^* характеров полугруппы S. Содержанием настоящей работы является вывод некоторых теорем, не имеющих непосредственной аналогии в теории характеров конечных абелевых групп и весьма напоминающих основную теорему теории Галуа конечных расширений данного тела.

Некоторые понятия и результаты из работы [1] мы считаем в дальнейшем известными.

I. ЗАМКНУТЫЕ ИДЕАЛЫ

Определение. *Пусть* $\mathfrak{a}$ — *идеал полугруппы* S. *Пусть* $\bar{\mathfrak{a}}$ — *множество элементов* $x \in S$, *удовлетворяющих для некоторого целого натурального* $\varrho > 0$ *условию* $x^\varrho \in \mathfrak{a}$. *Множество* $\bar{\mathfrak{a}}$ *мы будем называть замыканием идеала* $\mathfrak{a}$.[1])

Лемма 1. $\bar{\mathfrak{a}}$ *есть идеал из* S; $\mathfrak{a} \subseteqq \bar{\mathfrak{a}}$.

Доказательство. Пусть $a \in \bar{\mathfrak{a}}$, т. е. $a^\varrho \in \mathfrak{a}$, $\varrho \geqq 1$. Тогда для любого $s \in S$ имеет место $(sa)^\varrho = s^\varrho a^\varrho \in s^\varrho \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{a}$, т. е. $sa \in \bar{\mathfrak{a}}$, ч. т. д.

Определение. *Пусть* e — *идемпотент* $\in S$. *Тогда мы назовем максимальной полугруппой, принадлежащей идемпотенту* e, *множество* P_e *всех элементов* $x \in S$, *которые для некоторого натурального* $\tau \geqq 1$ *удовлетворяют условию* $x^\tau = e$. (*Смотри* [1], *более подробно* [2]).

Нетрудно доказать, что S является множественной суммой своих дизъюнктных максимальных полугрупп.

Лемма 2. *Пусть все идемпотенты полугруппы* S, *лежащие в идеале* $\mathfrak{a}$

[1]) Это обозначение имеет силу в продолжение всего раздела I. Символы с чертой, введение в конце раздела II и в разделе III, имеют другое значение, причем не может возникнуть недоразумение.

суть $e_1, e_2, \ldots, e_r$. *Пусть максимальные полугруппы, принадлежащие этим идемпотентам будут* $P_1, P_2, \ldots, P_r$. *Тогда имеет место*

$$\bar{\mathfrak{a}} = P_1 + P_2 + \ldots + P_r .$$

Доказательство. По предположению имеем $e_i \in \mathfrak{a} \cap P_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Если $a \in P_i$ для какого-либо i $(1 \leqq i \leqq r)$, то существует число $\varrho \geqq 1$ такое, что $a^\varrho = e_i$. Следовательно $\bar{\mathfrak{a}} \supseteqq P_1 + P_2 + \ldots + P_r$.

Пусть P_e — еще одна произвольная максимальная полугруппа, не содержащаяся в $P_1 + P_2 + \ldots + P_r$. Если бы было $\bar{\mathfrak{a}} \cap P_e \neq \emptyset$, то существовал бы элемент $b \in P_e$, $b \in \bar{\mathfrak{a}}$. Так как b входит в $\bar{\mathfrak{a}}$, то существовало бы целое $\tau > 0$ такое, что $b^\tau \in \mathfrak{a}$. Однако, для элемента b существует одновременно число $\sigma > 0$ такое, что $b^\sigma = e$, где e есть идемпотент $\in P_e$. Тогда $(b^\tau)^\sigma$ входило бы в $\mathfrak{a}$ и однобременно было бы $(b^\tau)^\sigma = (b^\sigma)^\tau = e^\tau = e$. Следовательно, $\mathfrak{a}$ содержало бы еще один идемпотент e, отличный от $e_1, \ldots, e_r$, что противоречит предположению.

Определение. *Идеал* $\mathfrak{a}$ *полугруппы* S *мы называем замкнутым, если* $\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}}$.[2])

Замечания. 1. Множество $\mathfrak{a}$ представляет замкнутый идеал в том случае, если оно является α) идеалом, и β) одновременно суммой некоторого числа целых максимальных полугрупп из S.

2. Если S имеет нулевой элемент z, то каждый замкнутый идеал $\bar{\mathfrak{a}}$ содержит не только z, но и все нильпотентные элементы $\in S$.

3. Простой идеал является всегда замкнутым идеалом. Наоборот, на простом примере можно убедится в том, что замкнутый идеал не должен быть простым идеалом. Это точно выражается следующей леммой:

Лемма 3. *Идеал* $\mathfrak{a} \neq \emptyset$ *замкнут тогда и только тогда, если его можно записать в виде пересечения (конечного числа) простых идеалов:*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{g}_t \quad (t \geqq 1) .$$

Доказательство. а) Пусть пересечение $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{g}_t$ непусто. Пересечение является прежде всего идеалом. Далее (см. лемму 9 из работы [1]), каждый простой идеал является суммой некоторого числа максимальных полугрупп. Значит, и пересечение будет суммой некоторого числа максимальных полугрупп, ч. т. д.

б) Наоборот, пусть $\mathfrak{a}$ — замкнутый идеал, т. е. $\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}}$. Согласно лемме 2, можно писать $\mathfrak{a} = P_1 + \ldots + P_r$. Наша лемма будет доказана, если покажем, что существует конечное число простых идеалов $\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{g}^{(t)}$ таких, что

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_r = \mathfrak{g}^{(1)} \cap \mathfrak{g}^{(2)} \cap \ldots \cap \mathfrak{g}^{(t)} . \tag{1}$$

[2]) Выражение „замкнутый" выбрано так, что результаты согласуются с общей теорией связей Галуа, разработанной ОЙШТЕЙН ОРЭ. (См. Биркгоф [1], стр. 91.)

Пусть $S = P_1 + \ldots + P_r + P_{r+1} + \ldots + P_s$. Покажем, что для каждого $i = r + 1, r + 2, \ldots, s$ существует идеал A_i такой, что имеет место

α) $\mathfrak{a} \subseteqq A_i \quad (i = r + 1, r + 2, \ldots, s)$,

β) $A_i \cap P_i = \emptyset \quad (i = r + 1, r + 2, \ldots, s)$,

γ) A_i суть простые идеалы.

Этим будет наша теорема доказана, ибо тогда будет наверное

$$\mathfrak{a} = A_{r+1} \cap A_{r+2} \cap \ldots \cap A_s . \tag{2}$$

Построим для фиксированного i ($r + 1 \leqq i \leqq s$) какой-либо максимальный идеал A_i полугруппы S, такой что 1) $\mathfrak{a} \subseteqq A_i$, 2) $A_i \cap P_i = \emptyset$. Такой максимальный идеал наверное существует. Имеем $P_i \subseteqq S - A_i$. Покажем, что A_i — *простой идеал*, т. е., что $S - A_i$ является полугруппой. Этим мы докажем наше утверждение.

Пусть $a \in S - A_i$, $b \in S - A_i$; покажем, что $ab \in S - A_i$.

Построим идеалы (A_i, a, Sa), (A_i, b, Sb). Так как эти идеалы будут $\supset A_i$, то будет обязательно (ввиду максимальности A_i)

$$(a, Sa) \cap P_i \neq \emptyset , \quad (b, Sb) \cap P_i \neq \emptyset .$$

Тогда будет или $a \in P_i$ или $xa \in P_i$ (с некоторым $x \in S$) или и то и другое. Точно так же будет или $b \in P_i$ или $yb \in P_i$ (с некоторым $y \in S$) или и то и другое.

Обозначим символом p_1 тот из элементов a, xa, который попадает в P_i; символом же p_2 — тот из элементов b, yb, который попадет в P_i. Тогда (так как P_i — полугруппа) p_1p_2 попадет в P_i, т. е. хоть один из элементов ab, xab, yab, $xyab$ попадет в P_i.

Если $ab \in P_i$, то ab non $\in A_i$, значит, $ab \in S - A_i$ и теорема доказана.

Если же $xab \in P_i$, не может быть $ab \in A_i$, ибо (ввиду того, что A_i — идеал) $ab \in A_i$ влечет за собой $xab \in A_i$ для любого $x \in S$. Следовательно, и в этом случае ab non $\in A_i$, т. е. $ab \in S - A_i$, ч. т. д.

Замечание. В пересечении (2) можно при этом выпустить те простые идеалы, которые в нем фигурируют несколько раз и взять лишь один из них; далее, если там встречаются идеалы A_i, A_k такие, что $A_i \subseteqq A_k$, можно вычеркнуть A_k. Если тогда останется только t „существенных" простых идеалов, то мы получим выражение (1).

Пусть S^* — полугруппа характеров полугруппы S. Полугруппа S^* имеет особенное строение. В работе [1] мы доказали, что S^* является теоретико-множественной суммой дизъюнктных групп. Значит, у полугруппы S^* все максимальные полугруппы P_i являются группами, откуда вытекает такое следствие:

Лемма 4. *Каждый идеал полугруппы S^* замкнут.*

Доказательство. Согласно только-что сказанному можно написать $S^* = \sum_{\alpha} G_\alpha$, где G_α — группы. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал из S^*. Пусть будет $\chi \in \mathfrak{a}$, тогда будет и $S^*\chi \in \mathfrak{a}$. Элемент χ входит в некоторую группу $G_\nu \subseteqq S^*$; тогда тем более имеет место $G_\nu\chi \in \mathfrak{a}$. Однако $G_\nu\chi = G_\nu$, значит, $G_\nu \subseteqq \mathfrak{a}$. Следовательно, идеал $\mathfrak{a}$ состоит только из целых групп G_ν, т. е. $\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}}$, ч. т. д.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{a}$ — произвольный идеал из S. Тогда множество $\mathfrak{a}_0$ всех характеров $\in S^*$, равных нулю на $\mathfrak{a}$, будет идеалом из S^*.*

Доказательство. Пусть дано $\mathfrak{a} \subseteqq S$. $\mathfrak{a}_0$ наверное не пусто, так как содержит по крайней мере нулевой характер. Пусть $\chi' \in S^*$ обладает тем свойством, что для любого $a \in \mathfrak{a}$ будет $\chi'(a) = 0$. Пусть $\chi(x)$ — произвольный элемент $\in S^*$. Тогда $\chi\chi'(a) = \chi(a)\,\chi'(a) = \chi(a)\,.\,0 = 0$. Отсюда $\chi\chi' \in \mathfrak{a}_0$, т. е. $\mathfrak{a}_0$ является идеалом из S^*.

Замечание. Лемма справедлива и в том случае, когда $\mathfrak{a}$ — произвольное множество $\subseteqq S$ (не обязательно идеал из S).

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{a}_0$ — произвольный идеал из S^*, $\mathfrak{a}_0 \neq S^*$. Множество $\mathfrak{a}$ всех элементов $a \in S$, которые для всякого $\chi(x) \in \mathfrak{a}_0$ удовлетворяют уравнению $\chi(a) = 0$, является идеалом из S.*

Доказательство. Прежде всего мы докажем, что идеал $\mathfrak{a}$ *не пуст*. Полугруппа S^* имеет единичный элемент (а именно, единичный характер χ_1 полугруппы S). Очевидно, элемент χ_1 не входит в $\mathfrak{a}_0$ (ибо в противном случае было бы $S^* = S^*\chi_1 \subseteqq S^*\mathfrak{a}_0 \subseteqq \mathfrak{a}_0$). Если H_1 есть максимальная группа из S^*, принадлежащая к идемпотенту χ_1, будет также $\mathfrak{a}_0 \cap H_1 = \emptyset$. (Так как из $\chi \in \mathfrak{a}_0$, $\chi \in H_1$ вытекало бы для некоторого $\tau > 0$ $\chi^\tau \in \mathfrak{a}_0$, $\chi^\tau = \chi_1$, т. е. $\chi_1 \in \mathfrak{a}_0$, что не соответствует действительности). Согласно работе [1], группа H_1 является группой тех и только тех характеров $\in S^*$, которые отличны от нуля для всех $a \in S$. Пусть теперь $e = e_1\,.\,e_2 \ldots e_s$ будет произведением всех идемпотентов $\in S$. Мы утверждаем, что для любого $\chi \in \mathfrak{a}_0$ необходимо должно быть $\chi(e) = 0$. В противном случае должно было бы быть $\chi(e_1e_2 \ldots e_s) = 1$, т. е. $\chi(e_i) = 1$ для любого $i = 1, 2, \ldots, s$. Если χ отлично от нуля для любого идемпотента $\in S$, то χ отлично от нуля для любого элемента $a \in S$. Тогда было бы $\chi \in H_1$, что противоречит соотношению $\mathfrak{a}_0 \cap H_1 = \emptyset$. Поэтому множество $\mathfrak{a}$ не пусто — оно содержит хотя бы элемент $e = e_1 . e_2 \ldots . e_s$.

Пусть теперь для всякого $\chi(x) \in \mathfrak{a}_0$ имеет место $\chi(a) = 0$. Тогда для произвольного $s \in S$ будет

$$\chi(as) = \chi(a)\,\chi(s) = 0\,.\,\chi(s) = 0\,.$$

Итак, если $a \in \mathfrak{a}$, то и $as \in \mathfrak{a}$, т. е. $\mathfrak{a}$ является идеалом из S, ч. т. д.

Пусть $\mathfrak{a}$ — произвольный идеал из S. По лемме 5 ему можно поставить в соответствие некоторый идеал $\mathfrak{a}_0 \subseteqq S^*$. Если теперь идеалу $\mathfrak{a}_0$ на основании леммы 6 поставить в соответствие идеал $\mathfrak{a}'$, можно только сказать, что $\mathfrak{a}' \supseteqq \mathfrak{a}$. На простых примерах можно убедиться, что возможен случай $\mathfrak{a}' \supset \mathfrak{a}$ (т. е. $\mathfrak{a}'$ является собственным надмножеством $\mathfrak{a}$). Для достижения взаимной однозначности необходимо как то ограничить выбор идеала $\mathfrak{a}$. Оказывается, для этого необходимо и достаточно, чтобы идеал $\mathfrak{a}$ был замкнут. Это выражает

Теорема 1. *В соответствиях из леммы 5 и 6 идеалы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}_0$ находятся во взаимно однозначном соответствии тогда и только тогда, если идеал $\mathfrak{a}$ замкнут.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал из S. Пусть $\mathfrak{a}_0 = \{\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \ldots, \chi^{(r)}\}$ является идеалом всех тех элементов $\chi \in S^*$, которые равны нулю на $\mathfrak{a}$. Пусть, наоборот, $\chi^{(i)}$ — произвольный фиксированный элемент $\chi^{(i)} \in \mathfrak{a}_0$. Тогда множество элементов $\in S$, для которых $\chi^{(i)}$ равно нулю, будет (см. лемму 3 из работы [1]) некоторым простым идеалом $\mathfrak{g}_i \subseteqq S$.

Множество элементов $\in S$, для которых равны нулю одновременно все характеры $\chi^{(i)} \in \mathfrak{a}_0$ $(i = 1, \ldots, r)$, будет, следовательно, равно пересечению простых идеалов

$$\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{g}_r .$$

Ввиду определения $\mathfrak{a}_0$ будет, очевидно,

$$\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{g}_r . \tag{3}$$

α) Если $\mathfrak{a}$ не является замкнутым идеалом, то (ввиду леммы 3) обязательно будет

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{g}_r .$$

β) Если $\mathfrak{a}$ — замкнутый идеал, то согласно лемме 3 существуют простые идеалы $\mathfrak{g}_1', \mathfrak{g}_2', \ldots, \mathfrak{g}_s'$ такие, что

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_1' \cap \mathfrak{g}_2' \cap \ldots \cap \mathfrak{g}_s' .$$

Для каждого простого идеала $\mathfrak{g}_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ можно построить такой характер полугруппы S, который будет равен нулю точно на $\mathfrak{g}_i'$. Такого рода характером будет, напр., идемпотентный характер, определенный следующим образом:

$$\varepsilon_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in \mathfrak{g}_i' , \\ 1 & \text{для } x \in S - \mathfrak{g}_i' . \end{cases}$$

Характеры $\varepsilon_i(x)$ являются обязательно элементами из $\mathfrak{a}_0$, так как для любого $a \in \mathfrak{a} = \mathfrak{g}_1' \cap \mathfrak{g}_2' \cap \ldots \cap \mathfrak{g}_s'$ имеем $\varepsilon_i(a) = 0$.

Итак, можно предположить, что среди простых идеалов $\mathfrak{g}_i$ в правой части соотношения (3) мы найдем также простые идеалы $\mathfrak{g}_1', \mathfrak{g}_2', \ldots, \mathfrak{g}_s'$.

Если бы теперь было $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{g}_r$, то существовал бы элемент b такой, что b non $\in \mathfrak{a}$, но $b \in \mathfrak{g}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{g}_r$. Тем более было бы $b \in \mathfrak{g}_1' \cap \mathfrak{g}_2' \cap \ldots \cap \mathfrak{g}_s'$. Однако это невозможно, так как $\mathfrak{g}_1' \cap \mathfrak{g}_2' \cap \ldots \cap \mathfrak{g}_s' = \mathfrak{a}$, откуда вытекало бы $b \in \mathfrak{a}$, что не может быть. Поэтому $\mathfrak{a}$ является в точности идеалом всех тех элементов $a \in S$, которые удовлетворяют уравнению $\chi(a) = 0$ для всякого $\chi \in \mathfrak{a}_0$, ч. т. д.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — *замкнутые идеалы. Если* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, *то* $\mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{b}_0$.[3]) *Наоборот, если* $\mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{b}_0$ — *идеалы из* S^*, *то идеалы, отвечающие им в соответствии из леммы* 6, *удовлетворяют соотношению* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$.

Доказательство. а) Пусть $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$. Так как каждый характер, равный нулю на $\mathfrak{b}$, тем более равен нулю на $\mathfrak{a}$, то очевидно $\mathfrak{b}_0 \subseteqq \mathfrak{a}_0$. Мы покажем, что существует характер, равный нулю на $\mathfrak{a}$, но не равный нулю везде на $\mathfrak{b}$. Так как $\mathfrak{b} - \mathfrak{a} \neq \emptyset$ и оба идеала замкнуты, то существует хоть одна максимальная полугруппа P_i, такая, что $P_i \subset \mathfrak{b}$, но $\mathfrak{a} \cap P_i = \emptyset$. Построим какой-либо максимальный идеал J полугруппы S, имеющий следующие свойства: α) $\mathfrak{a} \subseteqq J$, β) $J \cap P_i = \emptyset$. Согласно доказательству леммы 3, J является простым идеалом из S. Построим характер $\chi(x)$, определенный следующим образом:

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in J, \\ 1 & \text{для } x \in S - J . \end{cases}$$

Тогда имеем $\chi(\mathfrak{a}) = 0$, откуда $\chi \in \mathfrak{a}_0$. Так как $\chi(P_i) = 1$ и $P_i \subset \mathfrak{b}$, имеем χ non $\in \mathfrak{b}_0$. Этим доказана первая часть теоремы.

б) Пусть наоборот $\mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{b}_0$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b}$. Согласно доказательству теоремы 1, множества $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ можно записать в виде пересечения простых идеалов

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{g}_r, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{h}_s .$$

Следовательно, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — замкнутые идеалы из S и соответствия $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_0 \to \mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b} \to \mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{b}_0 \to \mathfrak{b}$ взаимно однозначны. Если бы имело место $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, то было бы и $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}_0$, что противоречит предположению $\mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{b}_0$. Итак, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, ч. т. д.

Пересечение двух замкнутых идеалов есть замкнутый идеал. Пересечение всех простых идеалов из S есть *минимальный* замкнутый идеал из S, входящий в каждый замкнутый идеал из S. Очевидно, существует лишь один такой минимальный идеал.

Исследуем некоторые „крайние" случаи соответствия из теоремы 1.

а) Пусть $\mathfrak{a} = S$. Тогда $\mathfrak{a}_0$ будет, очевидно, нулевым характером χ_0 (нулевым элементом $\in S^*$).

б) Пусть S имеет нулевой элемент z. Пусть $\mathfrak{a} = P_0$ — множество нильпотентных элементов. Оно образует идеал в S. Так как P_0 является одновременно одной из максимальных полугрупп, то $\mathfrak{a}$ есть замкнутый идеал из S. Так как z содержится в каждом идеале, то $\mathfrak{a}$ будет, очевидно, минимальным замкнутым идеалом из S. Ввиду того, что каждый характер χ, отличный от единичного характера χ_1 полугруппы S, удовлетворяет соотношению $\chi(z) = 0$, мы получим для $\chi \neq \chi_1$ даже $\chi(P_0) = 0$. Итак, $\mathfrak{a}_0 = S^* - \{\chi_1\}$.

[3]) Знак $\subset$ (в отличие от знака $\subseteqq$) обозначает здесь и во всей работе *собственное* подмножество. На примере можно убедиться в следующем: если $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ не являются замкнутыми идеалами, то соотношение $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ может повлечь за собой $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{b}_0$.

в) Пусть S не имеет нулевого элемента. Пусть $\mathfrak{a}$ — минимальный замкнутый идеал. Так как χ_1 non $\in \mathfrak{a}_0$, то и для максимальной группы H_1 полугруппы S^*, идемпотентом которой является χ_1, имеет место соотношение H_1 non $\in \mathfrak{a}_0$.[4]) Следовательно, $\mathfrak{a}_0 \subseteqq S^* - H_1$. Множество $S^* - H_1$ является, однако, идеалом из S^*, и даже единственным максимальным идеалом, полугруппы S^* (см. подробнее [3]).[5]) Итак, обязательно будет $\mathfrak{a}_0 = S^* - H_1$, ибо если бы было $\mathfrak{a}_0 \subset S^* - H_1$, то — ввиду теоремы 2 — существовал бы замкнутый идеал $\mathfrak{b}$ такой, что было бы $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$, что невозможно ввиду предположенной нами минимальности $\mathfrak{a}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество замкнутых идеалов из S, $\mathfrak{A}_0$ — множество всех идеалов из S^*, отличных от S^*. $\mathfrak{A}$ образует относительно включения структуру. Наименьшим элементом структуры $\mathfrak{A}$ является минимальный замкнутый идеал из S, наибольшим элементом — само S. Подобным образом $\mathfrak{A}_0$ является относительно включения структурой, наименьшим элементом которой является нулевой идеал χ_0, наибольшим элементом — единственный существующий[6]) максимальный идеал $\neq S^*$.

Ввиду теоремы 1 и 2 (и ввиду б) и в)) справедлива.

Теорема 3. *Структура $\mathfrak{A}$ замкнутых идеалов из S и структура $\mathfrak{A}_0$ всех идеалов из S^*, отличных от S^*, дуально изоморфны.*

Зададим себе еще вопрос, каким особым свойством обладает множество $\mathfrak{P}$ всех простых идеалов из S. Это множество становится структурой относительно включения, если к числу простых идеалов мы отнесем и пустое множество $\emptyset$ (а также само S), что мы в дальнейшем и сделаем. (См. [1], лемма 18.)

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}$, $\mathfrak{a} \neq \emptyset$. Тогда идеал $\mathfrak{a}_0$, присвоенный ему на основании теоремы 1, является главным идеалом из S^*. Наоборот: если $\mathfrak{b}_0 \neq S^*$ является главным идеалом из S^*, то присвоенный ему идеал $\mathfrak{b} \subseteqq S$ будет простым идеалом из S.*

Замечание. Если еще простому идеалу $\emptyset \in \mathfrak{P}$ присвоить главный идеал $S^* = S^* \cdot \chi_1$, то можно утверждать: каждый главный идеал из S^* мы получим как множество характеров, равных нулю на некотором простом идеале из S. Отсюда следует: существует ровно столько же главных идеалов из S^* (считая и S^*), сколько простых идеалов из S (считая $\emptyset$ и S).

Доказательство. а) Пусть $\mathfrak{a}$ — простой идеал из S. Значит, $S - \mathfrak{a}$

---

[4]) Так как характеры $\in H_1$ нигде не равны нулю (см. также доказательство леммы 6).

[5]) Из работы [3] следует (что можно просто доказать и непосредственно): коммутативная полугруппа T с единичным элементом e содержит один и только один максимальный идеал A, причем $T - A$ образует группу, а именно ту максимальную группу полугруппы T, которая имеет e в качестве единичного элемента.

[6]) Существует лишь один максимальный идеал $\neq S^*$, так как S^* имеет единичный элемент (а именно единичный характер χ_1).

есть полугруппа. Идеал $\mathfrak{a}_0$ из S^* наверное содержит характер, определенный следующим образом:

$$\varepsilon_{\mathfrak{a}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in \mathfrak{a}\,, \\ 1 & \text{для } x \in S - \mathfrak{a}\,. \end{cases}$$

Для каждого $\chi \in S^*$ имеет место $\chi\varepsilon_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{a}_0$, т. е. $S^*\varepsilon_{\mathfrak{a}} \subseteqq \mathfrak{a}_0$. Притом для каждого $\chi \in \mathfrak{a}_0$ будет $\chi\varepsilon_{\mathfrak{a}} = \chi$, т. е. $\mathfrak{a}_0\varepsilon_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}_0$. Имеем

$$S^*\varepsilon_{\mathfrak{a}} = (S^* - \mathfrak{a}_0)\,\varepsilon_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{a}_0\varepsilon_{\mathfrak{a}}\,.$$

Первое слагаемое в правой части $\subseteqq \mathfrak{a}_0$, второе же равно $\mathfrak{a}_0$. Следовательно $S^*\varepsilon_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}_0$, т. е. $\mathfrak{a}_0$ есть главный идеал из S^*.

б) Пусть наоборот $\mathfrak{b}_0 = (\chi, S^*\chi) = S^*\chi$ есть главный идеал из S^*. Характер χ точно равен нулю на некотором простом идеале $\mathfrak{b}_1$ из S. В $\mathfrak{b}_0$ входит и характер $\chi \cdot \bar{\chi} = \varepsilon_{\mathfrak{b}_1}$, определенный так:

$$\varepsilon_{\mathfrak{b}_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in \mathfrak{b}_1\,, \\ 1 & \text{для } x \in S - \mathfrak{b}_1\,. \end{cases}$$

Каждый элемент $\in \mathfrak{b}_0$, очевидно, равен нулю на $\mathfrak{b}_1$, но по меньшей мере один характер (а именно $\varepsilon_{\mathfrak{b}_1}$) равен нулю *точно* на $\mathfrak{b}_1$. Следовательно, $\mathfrak{b}_1$ есть наибольший идеал из S, на котором равны нулю все характеры $\in \mathfrak{b}_0$.

Итак, $\mathfrak{b}_1$ тождественно с тем идеалом $\mathfrak{b}$, который при соответствии из теоремы 1 присвоен идеалу $\mathfrak{b}_0$; поэтому $\mathfrak{b}$ есть простой идеал, ч. т. д.

Замечание. Соответствие из леммы 7 присваивает минимальному непустому простому идеалу из S максимальный *главный* идеал из S^* (максимальный, но $\neq S^*$). Максимальному[7]) простому идеалу из S (отличному от S) присвоен минимальный главный идеал из S^* отличный от χ_0. Простому идеалу S присвоен главный идеал χ_0.

Покажем, что *главные* идеалы из S^* (в том числе χ_0 и S^*) образуют относительно включения структуру.

Прежде всего докажем, что $S^*\chi_i \cap S^*\chi_k = S^*\chi_i \cdot \chi_k$. Доказательство. Имеем $S^*\chi_i\chi_k \subseteqq (S^*\chi_i)\,\chi_k \subseteqq S^*\chi_k$. Точно так же $S^*\chi_i\chi_k \subseteqq S^*\chi_i$. Отсюда $S^*\chi_i\chi_k \subseteqq S^*\chi_i \cap S^*\chi_k$. Пусть, наоборот $\varphi \in S^*\chi_i \cap S^*\chi_k$, т. е. $\varphi = \sigma_1\chi_i = \sigma_2\chi_k$, $\sigma_1, \sigma_2 \in S^*$. Тогда получим $\varphi^2 = \sigma_1\sigma_2\chi_i\chi_k \subseteqq S^*\chi_i\chi_k$. Поскольку S^* конечно и является суммой групп, то для каждого элемента $\varphi \in S^*$ существует натуральное число $\tau > 0$, такое, что φ^τ будет идемпотентом $\varepsilon \in S^*$. Этот идемпотент является единичным элементом для φ. Отсюда $\varphi^{\tau+1} = \varphi^\tau \cdot \varphi = \varepsilon\varphi = \varphi$. Если φ входит в идеал $S^*\chi_i\chi_k$, то тем более имеет место $\varphi^{\tau+1} \in S^*\chi_i\chi_k$, откуда $\varphi \in S^*\chi_i\chi_k$. Поэтому $S^*\chi_i \cap S^*\chi_k \subseteqq S^*\chi_i\chi_k$, т. е. $S^*\chi_i \cap S^*\chi_k = S^*\chi_i\chi_k$, ч. т. д.

Ввиду только что доказанного для каждой пары $S^*\chi_i$, $S^*\chi_k$ существует

---

[7]) Напомним, что максимальный идеал не должен быть простым идеалом. Максимальный идеал A будет, однако, наверное простым идеалом, если множество $S - A$ содержит более одного элемента. (См. [3], теорема 4,5).

одновременно один единственный наименьший *главный* идеал, в котором содержатся оба эти идеала (а именно пересечение всех главных идеалов, содержащих оба идеала). Итак, рассматриваемое множество главных идеалов образует структуру.

Из теоремы 2 и леммы 7 вытекает

Теорема 4. *Структура простых идеалов полугруппы S (в том числе $\emptyset$ и S) и структура главных идеалов полугруппы S^* (в том числе χ_0 и S^*) являются дуально изоморфными структурами.*

Замечание. Пусть $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \in \mathfrak{P}$. Тогда справедливо и $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 \in \mathfrak{P}$. Из проведенных нами рассуждений ясно, что если при дуальном изоморфизме из теоремы 4 имеет место $\mathfrak{g}_1 \longleftrightarrow S^*\chi_1$, $\mathfrak{g}_2 \longleftrightarrow S^*\chi_2$, то получаем $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 \longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow S^*\chi_1\chi_2$.

II. ХАРАКТЕРЫ ДАННОГО ПОДИДЕАЛА $\mathfrak{a}$

В разделах II и III мы не будем ограничиваться одними только замкнутыми идеалами.

Пусть S^* — полугруппа характеров полугруппы S. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал из S. Каждый характер $\chi \in S^*$ порождает на $\mathfrak{a}$ некоторый характер полугруппы $\mathfrak{a}$. Характеры $\in \mathfrak{a}_0$ (и только они) порождают на $\mathfrak{a}$ нулевой характер полугруппы $\mathfrak{a}$.

Зададимся проблемой найти *множество* $[\mathfrak{a}]^*$ *всех характеров* идеала $\mathfrak{a}$. Нас интересует, можноли это множество каким-нибудь образом охарактеризовать при помощи S^* и $\mathfrak{a}_0$. Мы увидим, что это возможно и что полученные таким образом теоремы весьма напоминают соответствующие теоремы теории Галуа.

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{a}_0$ — множество элементов $\in S^*$, равных нулю на $\mathfrak{a}$. Пусть χ_i, χ_k — два различных характера полугруппы S. Пусть χ_i non $\in \mathfrak{a}_0$, χ_k non $\in \mathfrak{a}_0$. Тогда эти характеры порождают на полугруппе $\mathfrak{a}$ два различных характера полугруппы $\mathfrak{a}$.*

Доказательство. От противного. Пусть χ_i, χ_k — два характера полугруппы S, не принадлежащие к $\mathfrak{a}_0$, которые порождают на $\mathfrak{a}$ один и тот же характер, т. е. для всякого $a \in \mathfrak{a}$ имеет место

$$\chi_i(a) = \chi_k(a) .$$

Так как χ_i, χ_k non $\in \mathfrak{a}_0$, то существует такой элемент $b \in \mathfrak{a}$, что $\chi_i(b) \neq 0$ (а значит, и $\chi_k(b) \neq 0$). Пусть s — произвольный элемент $\in S$. Тогда $sb \in \mathfrak{a}$ и, следоветельно,

$$\chi_i(sb) = \chi_k(sb) ,$$

$$\chi_i(s) \cdot \chi_i(b) = \chi_k(s) \cdot \chi_k(b) ;$$

а так как $\chi_i(b) = \chi_k(b) \neq 0$, то

$$\chi_i(s) = \chi_k(s) \quad \text{для любого} \quad s \in S ,$$

т. е. χ_i, χ_k суть два тождественных характера полугруппы S, ч. т. д.

Докажем теперь наоборот:

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал из S. Пусть $\psi(x)$ — произвольный ненулевой характер полугруппы $\mathfrak{a}$. Тогда существует один и только один характер $\chi(x)$ полугруппы S, такой, что для $x \in \mathfrak{a}$ имеет место $\chi(x) = \psi(x)$.*

Доказательство. а) Существует самое больше один такой характер, как следует из леммы 8.

б) Пусть $\psi(x)$ — произвольный ненулевой характер полугруппы $\mathfrak{a}$. Из теории, изложенной в работе [1], вытекает: Каждый характер $\psi(x)$ полугруппы $\mathfrak{a}$ можно получить так: выберем произвольный простой идеал $\mathfrak{g}$ полугруппы $\mathfrak{a}$. Множество $\mathfrak{a} - \mathfrak{g}$ есть полугруппа. Ее идемпотенты e_1, $e_2, \ldots, e_k$ образуют полуструктуру (см. [1], раздел II). Пусть e — наименьший элемент этой полуструктуры и H_e-соответствующая максимальная группа в $\mathfrak{a}$. Так как e входит в идеал $\mathfrak{a}$ из S, то и максимальная группа G_e (принадлежащая идемпотенту e в S) входит в $\mathfrak{a}$.[8]) Отсюда $H_e = G_e$. Из [1] вытекает, что для любого $x \in \mathfrak{a} - \mathfrak{g}$ будет $x \,.\, e \in G_e$. Если $\varphi(x)$ — надлежаще подобранный (ненулевой)характер группы G_e, то

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in \mathfrak{g} , \\ \varphi(xe) & \text{для } x \in \mathfrak{a} - \mathfrak{g} . \end{cases} \tag{4}$$

Притом идеалом $\mathfrak{g}$ может быть как пустое множество $\emptyset$, так и вся полугруппа $\mathfrak{a}$. Таким образом идеалу $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}$ мы поставим в соответствие нулевой характер ψ_0.

Построим теперь характер $\chi(x)$, упомянутый в лемме 9.

Рассмотрим множество E всех идемпотентов $\alpha \in S$, которые удовлетворяют условию $e\alpha = e$ (т. е. которые $\geqq \alpha$). Они образуют полугруппу. В E входят наверное все идемпотенты $\in \mathfrak{a} - \mathfrak{g}$, ибо e — наименьший идемпотент из $\mathfrak{a} - \mathfrak{g}$. Идемпотент e является наименьшим элементом полуструктуры E.

Рассмотрим далее множество E_1 всех идемпотентов $\beta \in S$, для которых справедливо $\beta e \neq e$. Множество E_1 является идеалом множества всех идемпотентов из S, ибо, если $\beta \in E_1$, а ξ — произвольный идемпотент из S, то будет $\xi\beta e \neq e$.[9]) E_1 наверное содержит каждый идемпотент, лежащий в $\mathfrak{g}$, ибо имеет место $\mathfrak{g}e \subseteqq \mathfrak{g}\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{g}$, и по выбору e имеем $e \operatorname{non} \in \mathfrak{g}$. Может, конечно, случиться, что $E_1 = \emptyset$, а именно в том случае, если $\mathfrak{g} = \emptyset$, т. е. если e есть наименьший идемпотент $\in S$.

---

[8]) Дело в том, что если $e \in \mathfrak{a}$, то $Se \subseteqq \mathfrak{a}$, т. е. $\{G_e + \ldots\} e \in \mathfrak{a}$, т. е. $G_e + \ldots \subseteqq \mathfrak{a}$.

[9]) Соотношение $\xi\beta e = e$ повлекло бы за собой $\xi\beta^2 e = e\beta$, т. е. $\xi\beta e = \beta e$, откуда $e = e\beta$, что противоречит предположению.

По лемме 11 работы [1] сумма максимальных полугрупп, принадлежащих к идемпотентам из E_1, является простым идеалом из S. Обозначим его знаком J. Дополнение $S - J$ есть полугруппа, в которой e является наименьшим идемпотентом. (Если $E_1 = \emptyset$, то $J = \emptyset$, $S - J = S$.) Для каждого $x \in S - J$ будет $xe \in G_e$. Построим теперь следующую комплексную функцию

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in J\,, \\ \varphi(xe) & \text{для } x \in S - J\,. \end{cases} \tag{5}$$

Это характер полугруппы S. Так как $\mathfrak{g} \subseteqq J$, $\mathfrak{a}$ есть $\mathfrak{g} \subseteqq S - J$, то для $y \in \mathfrak{a}$ будет $\chi(y) = \psi(y)$, ч. т. д.

Замечание. Предположение, что $\psi(x)$ есть ненулевой характер $\mathfrak{a}$, существенно в том смысле, что нулевой характер $\mathfrak{a}$ можно распространить на всю полугруппу S вообще говоря различными способами.

Из леммы 8 и 9 вытекает следующее: каждому ненулевому характеру $\psi(x)$ полугруппы $\mathfrak{a}$ поставлен в однозначное соответствие характер $\chi(x)$ полугруппы S. Обозначим это соответствие знаком $(\mathbf{R})$.

Лемма 10. *Пусть ψ_1, ψ_2 — два ненулевых характера идеала $\mathfrak{a}$. Пусть в соответствии $(\mathbf{R})$ будет $\psi_1 \longleftrightarrow \chi_1$, $\psi_2 \longleftrightarrow \chi_2$. Тогда а) если $\psi_1 \cdot \psi_2$ не является нулевым характером $\mathfrak{a}$, то $\psi_1 \cdot \psi_2 \longleftrightarrow \chi_1 \cdot \chi_2$; б) если же $\psi_1 \cdot \psi_2$ является нулевым характером $\mathfrak{a}$, то $\chi_1 \cdot \chi_2 \in \mathfrak{a}_0$.*

Доказательство. Пусть $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ — два характера $\mathfrak{a}$, определенные следующим образом:

$$\psi_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in \mathfrak{g}_1\,, \\ \varphi_1(xe_1) & \text{для } x \in \mathfrak{a} - \mathfrak{g}_1\,; \end{cases} \tag{6}$$

$$\psi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in \mathfrak{g}_2\,, \\ \varphi_2(xe_2) & \text{для } x \in \mathfrak{a} - \mathfrak{g}_2\,. \end{cases} \tag{7}$$

Притом $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ суть два простых идеала из $\mathfrak{a}$, e_1 и e_2 суть наименьшие идемпотенты соответственно в $\mathfrak{a} - \mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{a} - \mathfrak{g}_2$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — два фиксированных характера максимальных групп соответственно, G_{e_1} и G_{e_2}.

Произведение этих характеров равно характеру идеала $\mathfrak{a}$, определенному следующим образом :[10])

$$\psi_1\psi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2\,, \\ \varphi_1(xe_1) \cdot \varphi_2(xe_2) & \text{для } x \in \mathfrak{a} - (\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2)\,. \end{cases} \tag{8}$$

При помощи конструкции из леммы 8 характерам ψ_1, ψ_2 поставлены в соответствие два характера, а именно

$$\chi_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in J_1\,, \\ \varphi_1(xe_1) & \text{для } x \in S - J_1\,; \end{cases}$$

$$\chi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in J_2\,, \\ \varphi_2(xe_2) & \text{для } x \in S - J_2\,. \end{cases}$$

[10]) $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$ есть простой идеал в $\mathfrak{a}$. (См. напр. [1], лемма 16.)

Притом J_1 есть простой идеал, в который входят те и только те идемпотенты $\alpha \in S$, которые удовлетворяют условию $\alpha e_1 \neq e_1$. Точно так же J_2 есть простой идеал, содержащий все идемпотенты $\alpha \in S$, которые удовлетворяют соотношению $\alpha e_2 \neq e_2$.

Произведением характеров $\chi_1 \cdot \chi_2$ является следующий характер полугруппы S:

$$\chi_1\chi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in J_1 + J_2\,, \\ \varphi_1(xe_1)\,.\,\varphi_2(xe_2) & \text{для } x \in S - (J_1 + J_2)\,. \end{cases} \tag{9}$$

Докажем, что функция (9) является продолжением характера (8) на всю полугруппу S.

Ввиду соотношений (8) и (9) достаточно доказать справедливость включений $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_1 \subseteqq J_1 + J_2$ и $\mathfrak{a} - (\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2) \subseteqq S - (J_1 + J_2)$, т. е. $(\mathfrak{a} - \mathfrak{g}_1) \cap \cap (\mathfrak{a} - \mathfrak{g}_2) \subseteqq (S - J_1) \cap (S - J_2)$.

Из построения в лемме 8 вытекает, что $\mathfrak{g}_1 \subseteqq J_1$, $\mathfrak{g}_2 \subseteqq J_2$, откуда $\mathfrak{g}_1 + + \mathfrak{g}_2 \subseteqq J_1 + J_2$.

Идемпотентами полугруппы $\mathfrak{a} - \mathfrak{g}_1$ являются те и только те идемпотенты $\alpha \in \mathfrak{a}$, для которых имеет место $\alpha e_1 = e_1$. Аналогично для полугруппы $\mathfrak{a} - \mathfrak{g}_2$. Следовательно, $Q = (\mathfrak{a} - \mathfrak{g}_1) \cap (\mathfrak{a} - \mathfrak{g}_2)$ есть полугруппа, имеющая в качестве идемпотентов те и только те идемпотенты $\alpha \in \mathfrak{a}$, для которых одновременно справедливо $\alpha e_1 = e_1$, $\alpha e_2 = e_2$. Аналогично $P = (S - J_1) \cap \cap (S - J_2)$ есть полугруппа, имеющая в качестве идемпотентов те и только те идемпотенты $\alpha \in S$, для которых справедливо $\alpha e_1 = e_1$, $\alpha e_2 = e_2$.

а) Пусть Q непусто. Каждый идемпотент из Q попадет, очевидно, в P. Так как J_1 и J_2 ,а значит и $S - J_1$ и $S - J_2$, являются суммами максимальных полугрупп из S, то и P будет суммой некоторых максимальных полугрупп из S, следовательно, $P = P_\alpha + P_\beta + \ldots + P_\nu$. Пусть соответствующие идемпотенты будут $e_\alpha, e_\beta, \ldots, e_\nu$. Аналогично Q будет суммой максимальных полугрупп из $\mathfrak{a}$ $Q = Q_{\alpha'} + Q_{\beta'} + \ldots + Q_{\mu'}$, причем соответствующие идемпотенты обозначим через $e_{\alpha'}, e_{\beta'}, \ldots, e_{\mu'}$. Множество идемпотентов $\{e_{\alpha'}, e_{\beta'}, \ldots, e_{\mu'}\}$ является подмножеством множества $\{e_\alpha, e_\beta, \ldots, e_\nu\}$. Следовательно, для всякого $e_{i'}$ $(i' = \alpha', \beta', \ldots, \mu')$ существует $e_i \in \{e_\alpha, e_\beta, \ldots, e_\nu\}$ такое, что $e_{i'} = e_i$. Для соответствующей максимальной полугруппы в $\mathfrak{a}$ и в S имеет место $Q_{e_i'} \subseteqq P_{e_i}$. Итак, $Q \subseteqq P$, ч. т. д.

б) Пусть Q пусто. Тогда $\emptyset = (\mathfrak{a} - \mathfrak{g}_1) \cap (\mathfrak{a} - \mathfrak{g}_2)$, т. е. $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$. Следовательно (ввиду $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 \subseteqq J_1 + J_2$), будет $\mathfrak{a} \subseteqq J_1 + J_2$. Из уравнения (9) следует, что $\chi_1\chi_2(\mathfrak{a}) = 0$, т. е. $\chi_1\chi_2 \in \mathfrak{a}_0$, ч. т. д.

Чтобы иметь возможность сформулировать результаты, полученные в леммах 7, 8, 9, *единым образом*, введем понятие *разностной полугруппы*.

Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в S. Под разностной полугруппой $\overline{S} = S/\mathfrak{a}$ мы будем подразумевать новую полугруппу, которую мы получим в основном так, что все элементы из $\mathfrak{a}$ объединим в один нулевой элемент O, а для элементов $\in S - \mathfrak{a}$ сохраним их первоначальный смысл.

Более точно, $\overline{S}$ является полугруппой классов, которые возникнут таким образом, что в S мы введем сравнение при помощи соотношения $a \equiv b \pmod{\mathfrak{a}}$, если 1) или $a = b$, 2) или одновременно $a \in \mathfrak{a}$. $b \in \mathfrak{a}$. Класс, содержащий все элементы $\in \mathfrak{a}$, мы обозначим знаком $\overline{O}$. Остальные классы мы обозначим знаком $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ Очевидно, для $a \in S - \mathfrak{a}$ класс $\bar{a}$ состоит из одного элемента, а именно элемента a. Следовательно $\overline{S} = S/\mathfrak{a} = \{\overline{O}, \bar{a}, \bar{b}, \ldots\}$. Классы образуют полугруппу с $\overline{O}$ в качестве нулевого элемента. Отображение $S \to \overline{S}$ есть гомоморфизм[11]) S на $\overline{S}$, определенный таким образом:

$$\begin{aligned} &\text{для } x \in S - \mathfrak{a} \quad \text{имеет место } x \to \overline{x}\,, \\ &\text{для } x \in \mathfrak{a} \qquad\quad \text{имеет место } x \to \overline{O}\,. \end{aligned} \tag{H}$$

Ненулевые характеры полугруппы $\mathfrak{a}$ и характеры S из $S^* - \mathfrak{a}_0$ соответствуют друг другу по лемме 8 и 9 взаимно однозначно. Присвоим кроме того нулевому характеру полугруппу $\mathfrak{a}$ все характеры $\in \mathfrak{a}_0$. Объединим далее все характеры $\in \mathfrak{a}_0$ в один класс, т. е. построим разностную полугруппу $S^*/\mathfrak{a}_0$. Тогда соответствие элементов $\in S^*/\mathfrak{a}_0$ и характеров полугруппы $\mathfrak{a}$ (в том числе и нулевого) будет взаимно однозначным. Ввиду леммы 10, это соответствие является изоморфизмом. Итак, в общем, имеет место следующая теорема:

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал из S. Пусть $\mathfrak{a}_0$ — множество всех элементов $\in S^*$, которые принимают на $\mathfrak{a}$ значение* 0. *Тогда полугруппа характеров идеала $\mathfrak{a}$ изоморфна с разностной полугруппой $S^*/\mathfrak{a}_0$. В виде формул получим*

$$[\mathfrak{a}]^* \cong S^*/\mathfrak{a}_0\,.$$

III. ХАРАКТЕРЫ РАЗНОСТНОЙ ПОЛУГРУППЫ $S/\mathfrak{a}$

Результат теоремы 5 наводит на следующий вопрос. Пусть $\mathfrak{a}$ — произвольный идеал из S. Что можно сказать о множестве характеров полугруппы $S/\mathfrak{a}$? Мы хотим доказать теорему 6, которая формально аналогична теореме 5.

Положим (как и выше) $\overline{S} = S/\mathfrak{a} = \{\overline{O}, \bar{a}, \bar{b}, \ldots\}$. Обозначения в S и $\overline{S}$ мы выберем так, чтобы при гомоморфизме (H) элементом, соответствующим элементу $a \in S - \mathfrak{a}$, был элемент $\bar{a} \in \overline{S}$.

Пусть $\chi(x)$ — произвольный характер полугруппы S, входящий в $\mathfrak{a}_0$. Отсюда $\chi(\mathfrak{a}) = 0$. Характеру χ поставим в соответствие комплексную функцию $\varphi(\bar{x})$, определенную на $\overline{S}$ таким образом:

$$\varphi(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{для } \bar{x} = \overline{O}, \\ \chi(x) & \text{для } \bar{x} = \overline{S} - \overline{O}\,. \end{cases} \tag{10}$$

[11]) Очевидно, $xy \in S \to \overline{xy} = \bar{x}\,.\,\bar{y} \in \overline{S}$.

Покажем прежде всего, что $\varphi(\bar{x})$ будет *характером* полугруппы $\bar{S}$. Пусть $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ — два элемента $\epsilon \bar{S}$.

α) Если $\bar{x}_1\bar{x}_2 \in \bar{S} - \bar{O}$, то должно быть $\bar{x}_1 \in \bar{S} - \bar{O}$, $x_2 \in \bar{S} - \bar{O}$, так что $\varphi(\bar{x}_1)\,\varphi(\bar{x}_2) = \chi(x_1)\,.\,\chi(x_2) = \chi(x_1x_2) = \varphi(\overline{x_1x_2}) = \varphi(\bar{x}_1\,.\,\bar{x}_2)$.

β) Если же $\bar{x}_1\bar{x}_2 = \bar{O}$, то это значит, что $x_1x_2 \in \mathfrak{a}$. Если хоть один из элементов x_1, x_2, напр. x_1, удовлетворяет условию $x_1 \in \mathfrak{a}$, имеем (так как тогда $\bar{x}_1 = \bar{O}$)

$$\varphi(\bar{x}_1)\,\varphi(\bar{x}_2) = 0\,.\,\varphi(\bar{x}_2) = 0 = \varphi(\bar{O}) = \varphi(\bar{x}_1\,.\,\bar{x}_2)\,.$$

Если ни один из элементов x_1, x_2 не будет $\epsilon\ \mathfrak{a}$, то[12])

$$\varphi(\bar{x}_1)\,\varphi(\bar{x}_2) = \chi(x_1)\,.\,\chi(x_2) = \chi(x_1x_2) = 0 = \varphi(\bar{O}) = \varphi(\bar{x}_1\,.\,\bar{x}_2)\,,$$

ч. т. д.

В дальнейшем мы будем говорить о характере $\varphi(\bar{x})$, определенном соотношением (10), что он *индуцирован на полугруппе* $\bar{S}$ *характером* χ.

Нулевой характер $\chi_0 \in S^*$ (который всегда входит в $\mathfrak{a}_0$), индуцирует на $\bar{S}$ нулевой характер $\varphi_0(\bar{x})$ полугруппы $\bar{S}$.

Два различных характера $\chi_1, \chi_2 \in \mathfrak{a}_0$ индуцируют на $\bar{S}$ два различных характера φ_1, φ_2 полугруппы $\bar{S}$. Действительно, по предположению существует хоть один элемент $b \in S - \mathfrak{a}$, для которого $\chi_1(b) \neq \chi_2(b)$. Для индуцированных характеров отсюда вытекает $\varphi_1(\bar{b}) \neq \varphi_2(\bar{b})$, ч. т. д.

Лемма 12. *Пусть $\varphi(\bar{x})$ — произвольный характер полугруппы S, отличный от единичного характера. Тогда существует один и только один характер $\chi(x) \in \mathfrak{a}_0$, который индуцирует на $\bar{S}$ характер $\varphi(\bar{x})$.*

Доказательство. а) Существует самое больше один такой характер, как мы только что показали.

б) Так как $\varphi(\bar{x})$ не является единичным характером $\bar{S}$, то $\varphi(\bar{O}) = 0$.

Мы знаем, что $\varphi(\bar{x})$ получается таким образом: Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ — простой идеал тех элементов $\bar{y} \in \bar{S}$, для которых $\varphi(\bar{y}) = 0$. Множество $\bar{\mathfrak{g}}$ непусто, так как оно содержит по крайней мере $\bar{O}$. Найдем наименьший идемпотент $\bar{e}$ полугруппы $\bar{S} - \bar{\mathfrak{g}}$. Пусть соответствующая максимальная группа, принадлежащая к $\bar{e}$, будет $\bar{G}_{\bar{e}}$. Если $\psi(\bar{x})$ — надлежаще выбранный характер группы $\bar{G}_{\bar{e}}$, то

$$\varphi(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{для } \bar{x} \in \bar{\mathfrak{g}}\,, \\ \psi(\bar{e}\bar{x}) & \text{для } \bar{x} \in \bar{S} - \bar{\mathfrak{g}}\,. \end{cases} \tag{11}$$

Пусть $\mathfrak{g}$ — множество всех тех элементов $\in S$, которые при гомоморфизме (H) являются прообразом простого идеала $\bar{\mathfrak{g}}$. Множество $\mathfrak{g}$ есть идеал в S.[13])

[12]) Соотношение $\chi(x_1x_2) = 0$ справедливо, так как $x_1x_2 \in \mathfrak{a}$ и $\chi \in \mathfrak{a}_0$.

[13]) Действительно, пусть $a \in \mathfrak{g}$, $s \in S$, тогда должно быть и $as \in \mathfrak{g}$. Доказательство от противного проведем так: если бы это не имело места, т. е., если бы было as non $\in \mathfrak{g}$, то хотя и имело бы место $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{g}}$, но $\bar{s}\bar{a} = \overline{sa}$ non $\in \bar{\mathfrak{g}}$. Это противоречит тому обстоятельству, что $\bar{\mathfrak{g}}$ является идеалом в $\bar{S}$.

Так как $\bar{O} \in \bar{\mathfrak{g}}$, то $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{g}$. Поскольку $\bar{S} - \bar{\mathfrak{g}}$ является полугруппой, то и $S - \mathfrak{g}$ будет полугруппой,[14] следовательно, $\mathfrak{g}$ будет простым идеалом в S.[15] (Так как соответствие элементов из $\bar{S} - \bar{\mathfrak{g}}$ и из $S - \mathfrak{g} \subseteqq S - \mathfrak{a}$ взаимно однозначно, то полугруппы $S - \mathfrak{g}$ и $\bar{S} - \bar{\mathfrak{g}}$, очевидно, изоморфны.)

В частности прообразом наименьшего идемпотента $\bar{e} \in \bar{S} - \bar{\mathfrak{g}}$ является наименьший идемпотент $e \in S - \mathfrak{g}$, а прообразом $\bar{G}_{\bar{e}}$ будет G_e, где $\bar{G}_{\bar{e}} \cong G_e$.

Построим теперь характер $\chi(x)$ полугруппы S, определенный следующим образом:

$$\chi(a) = \begin{cases} 0 & \text{для } a \in \mathfrak{g}, \\ \psi(\bar{a}\bar{e}) & \text{для } a \in S - \mathfrak{g}. \end{cases} \tag{12}$$

Так как $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{g}$, будет очевидно $\chi(x) \in \mathfrak{a}_0$.

Согласно (10) этот характер индуцирует на $\bar{S}$ характер

$$\varphi'(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{для } \bar{x} = \bar{O}, \\ \chi(x) & \text{для } \bar{x} \in \bar{S} - \bar{O}. \end{cases} \tag{13}$$

Для $\bar{x} \in \bar{S} - \bar{O}$ число $\chi(x)$ (для x, соответствующего при гомоморфизме (H) элементу $\bar{x}$) определяется так:

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } \bar{x} \in \bar{\mathfrak{g}} - \bar{O}, \\ \psi(\bar{x}\bar{e}) & \text{для } \bar{x} \in \bar{S} - \bar{\mathfrak{g}}. \end{cases} \tag{14}$$

Итак, из (13) и (14) получаем

$$\varphi'(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{для } \bar{x} \in \bar{\mathfrak{g}}, \\ \psi(\bar{x}\bar{e}) & \text{для } \bar{x} \in \bar{S} - \bar{\mathfrak{g}}. \end{cases}$$

Но это как раз характер $\varphi(\bar{x})$, т. е. $\varphi'(\bar{x}) \equiv \varphi(\bar{x})$, ч. т. д.

Лемма 13. *Пусть характеры $\chi_1 \in \mathfrak{a}_0$ и $\chi_2 \in \mathfrak{a}_0$ индуцируют на $\bar{S}$ соответственно характеры $\varphi_1(\bar{x})$ и $\varphi_2(\bar{x})$. Тогда характер $\chi_1 \cdot \chi_2$ индуцирует на $\bar{S}$ характер $\varphi_1\varphi_2(\bar{x})$.*[16]

Доказательство. По предположению χ_1 и χ_2 индуцируют на $\bar{S}$ соответственно характеры

$$\varphi_i(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{для } \bar{x} = \bar{O}, \\ \chi_i(x) & \text{для } \bar{x} \in \bar{S} - \bar{O}. \end{cases} \quad (i = 1, 2) \tag{15}$$

Произведение характеров $\chi_1\chi_2$ индуцирует, согласно (10), на $\bar{S}$ характер

$$\Phi(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{для } \bar{x} = \bar{O}, \\ \chi_1\chi_2(x) & \text{для } \bar{x} \in \bar{S} - \bar{O}. \end{cases} \tag{16}$$

---

[14] Доказательство проведем опять от противного. Если бы $S - \mathfrak{g}$ не было полугруппой, то существовали бы два элемента $a, b \in S - \mathfrak{g}$ такие, что $ab \in \mathfrak{g}$. Тогда для образов при гомоморфизме (H) имело бы место $\bar{a} \in \bar{S} - \bar{\mathfrak{g}}$, $\bar{b} = \bar{S} - \bar{\mathfrak{g}}$, но $\overline{ab} \in \bar{\mathfrak{g}}$. Это противоречит тому обстоятельству, что $\bar{S} - \bar{\mathfrak{g}}$ есть полугруппа.

[15] Простой идеал $\mathfrak{g}$ содержит не только $\mathfrak{a}$, но и все максимальные полугруппы, с которыми $\mathfrak{a}$ имеет непустое пересечение, т. е. и замыкание идеала $\mathfrak{a}$ (в смысле раздела I).

[16] Характер $\varphi_1\varphi_2$ притом, очевидно, отличен от единичного характера полугруппы $S/\mathfrak{a}$.

Однако произведение характеров $\varphi_1\varphi_2(\bar{x})$ в силу (15) равно как раз (16). Итак, имеем $\Phi = \varphi_1\varphi_2$, ч. т. д.

Из леммы 12 и 13 следует

Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал из S. Пусть $S/\mathfrak{a}$ — разностная полугруппа. Пусть $\mathfrak{a}_0$ — множество всех характеров полугруппы S, равных нулю на $\mathfrak{a}$. Тогда полугруппа $\mathfrak{a}_0$ изоморфна полугруппе всех характеров полугруппы $S/\mathfrak{a}$, отличных от единичного характера $\chi_1^{s/\mathfrak{a}}$. В виде формул:*

$$[S/\mathfrak{a}]^* - \chi_1^{s/\mathfrak{a}} \cong \mathfrak{a}_0 .$$

При помощи теоремы 5 и 6 докажем следующее обобщение теоремы 6:

Теорема 7. *Пусть $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ — идеалы полугруппы S. Пусть $\mathfrak{a}_0 \supseteqq \mathfrak{b}_0$ — множества характеров, равных нулю соответственно на $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Тогда множество характеров полугруппы $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$, отличных от единичного характера $\chi_1^{\mathfrak{b}/\mathfrak{a}}$ этой полугруппы, изоморфно полугруппе $\mathfrak{a}_0/\mathfrak{b}_0$. В виде формул:*

$$[\mathfrak{b}/\mathfrak{a}]^* - \chi_1^{\mathfrak{b}/\mathfrak{a}} \cong \mathfrak{a}_0/\mathfrak{b}_0 .$$

Доказательство. Рассмотрим полугруппу $S/\mathfrak{a}$. Множество $\bar{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ является идеалом в $\bar{S} = S/\mathfrak{a}$.

По теореме 5 характеры полугруппы $\bar{\mathfrak{b}}$ изоморфны с полугруппой $[\bar{S}]^*/\bar{\mathfrak{b}}_0$, где $\bar{\mathfrak{b}}_0$ — множество тех элементов $\epsilon\, [\bar{S}]^*$, которые обращаются на $\bar{\mathfrak{b}}$ в нуль. Итак

$$[\mathfrak{b}/\mathfrak{a}]^* \cong [\bar{S}]^*/\bar{\mathfrak{b}}_0 . \tag{17}$$

Обозначим $[\bar{S}]^* - \chi_1^{s/\mathfrak{a}} = [\bar{S}]_1^*$. По лемме 12 каждому $\chi \in \mathfrak{a}_0$ соответствует одно и только одно $\varphi(\bar{x}) \in [\bar{S}]_1^*$ и наоборот. Если теперь $\chi \in \mathfrak{b}_0$, то это χ индуцирует на $\bar{S}$, очевидно, такой характер $\varphi(\bar{x})$, который равен нулю на $\bar{\mathfrak{b}}$, т. е. мы получаем $\varphi(\bar{x}) \in \bar{\mathfrak{b}}_0$. Обратно: характеру $\varphi(\bar{x}) \in \bar{\mathfrak{b}}_0$[17]) по лемме 12 соответствует такой характер $\chi \in \mathfrak{a}_0$, который входит в $\mathfrak{b}_0$.[18]) Значит при изоморфизме из теоремы 6 $\mathfrak{a}_0 \cong [\bar{S}]_1^*$ подидеалы $\mathfrak{b}_0$ и $\bar{\mathfrak{b}}_0$ соответствуют друг другу взаимно однозначно. Отсюда непосредственно следует

$$\mathfrak{a}_0/\mathfrak{b}_0 \cong [\bar{S}]_1^*/\bar{\mathfrak{b}}_0 .$$

Из соотношения (17) вытекает для полугруппы $[\mathfrak{b}/\mathfrak{a}]_1^*$ характеров $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$, отличных от единичного характера $\chi_1^{\mathfrak{b}/\mathfrak{a}}$, следующее соотношение:[19])

$$[\mathfrak{b}/\mathfrak{a}]_1^* \cong [\bar{S}]_1^*/\bar{\mathfrak{b}}_0 .$$

[17]) Поскольку $\varphi(\bar{x}) \in \bar{\mathfrak{b}}_0$, можно утверждать, что $\varphi(\bar{x})$ не является единичным характером $\bar{S}$.

[18]) Ибо χ non $\epsilon\, \mathfrak{b}_0$ влекло бы за собой для индуцированного характера $\varphi(\bar{x})$ non $\epsilon\, \bar{\mathfrak{b}}_0$, что невозможно ввиду взаимной однозначности соответствия из леммы 12.

[19]) Припомним: так как $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ (соотв. $\bar{S}$) всегда содержит нулевой элемент, то для полугруппы $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ (соотв. $\bar{S}$) единичный характер является единственным характером, отличным от нуля на всем $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ (соотв. на всем $\bar{S}$).

Итак

$$[\mathfrak{b}/\mathfrak{a}]_1^* \cong \mathfrak{a}_0/\mathfrak{b}_0\,,$$

т. е.

$$[\mathfrak{b}/\mathfrak{a}]^* - \chi_1^{\mathfrak{b}/\mathfrak{a}} \cong \mathfrak{a}_0/\mathfrak{b}_0\,,$$

ч. т. д.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Schwarz Št.*: Теория характеров конечных коммутативных полугрупп, Чехословацкий математический журнал, т. *4* (*79*), 1954, 219—247.

[2] *Schwarz Št.*: К теории периодических полугрупп, Чехословацкий математический журнал, т. *3* (*78*), 1953, 7—21.

[3] *Schwarz Št.*: Максимальные идеалы в теории полугрупп, II, Чехословацкий математический журнал, т. *3* (*78*), 1953, 365—383.

[4] *Birkhoff G.*: Теория структур (перевод), Москва, 1952.

Summary

ON A GALOIS CONNEXION IN THE THEORY OF CHARACTERS OF COMMUTATIVE SEMIGROUPS

ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava.

(Received April 7, 1954.)

Some of the notions of this paper are the same in the paper [1]. The results of [1] are partly presupposed as known.

I. Let S be a finite commutative semigroup, S^* the semigroup of all its characters.

Let $\mathfrak{a}$ be an ideal of S. Let $\bar{\mathfrak{a}}$ be the set of all elements $x \in S$ for which $x^\varrho \in \mathfrak{a}$ holds with some integer $\varrho > 0$. The set $\bar{\mathfrak{a}}$ (the closure of $\mathfrak{a}$) is an ideal of S. The ideal $\mathfrak{a}$ is called closed if $\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}}$.

The ideal $\mathfrak{a}$ is closed if and only it can be writtten as an intersection of a (finite) number of prime ideals of S.

All ideals of S^* are closed, while this is not always true for the ideals of S.

Let $\mathfrak{a}$ be an ideal of S. The set of $\mathfrak{a}_0$ of all characters $\in S^*$ vanishing on $\mathfrak{a}$ is an ideal $\mathfrak{a}_0$ of S^*. Conversely: Let $\mathfrak{a}_0 \neq S^*$ be an ideal of S^*. The set $\mathfrak{a}$ of all elements $a \in S$ satisfying $\chi(a) = 0$ for all $\chi(x) \in \mathfrak{a}_0$ is an ideal of S.

Theorem 1. *The correspondence just mentioned between the ideals $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{a}_0$ is a one-to-one correspondence if and only if $\mathfrak{a}$ is a closed ideal of S. Moreover; if $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ (proper subset) are two closed ideals of S, then $\mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{b}_0$ holds and conversely.*

Theorems 3 and 4 are consequences of Theorem 1,

Theorem 3. *The lattice of all closed ideals of S (including S) and the lattice of all ideals of S^*, different from S^*, are dually isomorphic.*

Theorem 4. *The lattice of all prime ideals of S (including $\emptyset$ and S) and the lattice of all principal ideals of S^* (including the null-character χ_0 and S^*) are dually isomorphic.*

In the following sections II and III we deal with not necessarily closed ideals.

II. Section II is concerned with the structure of all characters $[\mathfrak{a}]^*$ of a subideal of S. The notion of „difference semigroup" is used in the meaning first introduced by D. Rees (se e. g. [3]). It is proved:

Theorem 5. *Let $\mathfrak{a}$ be an ideal of S. Let $\mathfrak{a}_0$ be the set of all elements $\in S^*$ vanishing on $\mathfrak{a}$. Then the semigroup $[\mathfrak{a}]^*$ of all characters of $\mathfrak{a}$ is isomorphic to the difference-semigroup $S^*|\mathfrak{a}_0$. In formulae: $[\mathfrak{a}]^* \cong S^*|\mathfrak{a}_0$.*

III. Section III deals with the "dual problem". If $\mathfrak{a}$ is an ideal of S, what can be said about the semigroup of all characters of $S|\mathfrak{a}$? It is proved:

Theorem 6. *Let $\mathfrak{a}$ be an ideal of S, $S/\mathfrak{a}$ the corresponding difference semigroup. Let $\mathfrak{a}_0$ be the set of all characters of S vanishing on $\mathfrak{a}$. Then $\mathfrak{a}_0$ is isomorphic to the semigroup of characters of $S/\mathfrak{a}$ different from the unity character $\chi_1^{S/\mathfrak{a}}$ of $S/\mathfrak{a}$. In formulae: $[S/\mathfrak{a}]^* - \chi_1^{S/\mathfrak{a}} \cong \mathfrak{a}_0$.*

In Theorem 7 a generalisation of Theorem 6 is given.