Gheorghe Vrănceanu
Sur les espaces à connexion affine partiellement projectifs

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 4 (1954), No. 3, 283–286

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100113

SUR LES ESPACES À CONNEXION AFFINE PARTIELLEMENT PROJECTIFS

GHEORGHE VRÂNCEANU, Bucarest.

(Reçu le 5 juin 1954.)

Le texte de la communication de l'auteur à la section de mathématiques de la III. session générale de l'Académie Tchècoslovaque des Sciences qui a eu lieu le 14. avril 1954.

On sait que les équations différentielles des courbes auto-parallèles d'un espace A_n à connexion affine Γ^i_{jk} ont la forme

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \tag{1}$$

et que les équations en termes finis de ces courbes sont de la forme

$$F_\alpha(x^1, \ldots, x^n, c^1, \ldots, c^{2n-2}) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n - 1), \tag{2}$$

c'est-à-dire qu'elles dépendent de $2n - 2$ constantes arbitraires.

Dans le cas où les premiers membres des $n - 1$ équations (2) sont des fonctions linéaires des variables $x^1, \ldots, x^n$, l'espace A_n est euclidien projectif et les variables $x^1, \ldots, x^n$ sont des coordonées projectives de l'espace. Autrement dit, les courbes (2) sont en ce cas données par des formules de la forme

$$x^\alpha = a^\alpha x^n + b^\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, n - 1) \tag{3}$$

et ces courbes sont des droites. Dans le cas envisagé, les composantes Γ^i_{jk} de la connexion sont données par les formules de Weyl

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j, \tag{4}$$

où φ_i est un vecteur covariant et δ^i_j est le delta de Kronecker.

Dans le cas où $n - p$ $(p > 1)$ seulement des équations (2) sont linéaires, on dit que l'espace est partiellement projectif ou projectif d'ordre $n - p$. V. F. Kagan et ses élèves P. K. Rachefski et G. M. Chapiro[1]) ont étudié le cas, où l'espace est projectif d'ordre $n - 2$ en supposant aussi que les $n - 2$ hyperplans, définis par les équations linéaires, passent par un point fixe. En prenant ce point pour origine, les $n - 2$ hyperplans peuvent s'écrire sous la forme

$$x^i = a^i x^1 + b^i x^2, \qquad (i = 3, \ldots, n). \tag{5}$$

[1]) Voir Труды семинара по векторному и тензорному анализу, Москва 1933, volume 1.

En ce cas Kagan a montré que la connexion peut être écrite sous la forme

$$\Gamma^i_{jk} = x^i f_{jk} + \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j \,. \tag{6}$$

Dans mes recherches j'ai supposé que le point fixe par lequel passent les $n - 2$ hyperplans est à l'infini sur un des axes de coordonnées, par exemple l'axe x^1, et j'ai montré qu'en ce cas les formules (6) de Kagan deviennent

$$\Gamma^\alpha_{jk} = \delta^\alpha_j \varphi_k + \delta^\alpha_k \varphi_j \qquad (\alpha = 2, \ldots, n) \,, \tag{7}$$

ce qui constitue une généralisation directe des formules (4) relatives aux espaces euclidiens projectifs. Je dis aussi qu'en ce cas l'espace de Kagan a été reporté aux coordonées affines. Si dans les formules (7) α varie de $p + 1$ à n, l'espace est $n - p$ fois projectif et ses hyperplans passent par les points à l'infini des axes $x^1, \ldots, x^p$ c'est-à-dire qu'ils contiennent une variété linéaire à $p - 1$ dimensions.

Les espaces de Kagan ne sont pas les seuls espaces dont les courbes auto-parallèles soient situés dans des hyperplans, mais on ne connait pas jusqu'ici d'autres classes générales de ces espaces. Dans cette communication je donnerai une caractérisation des espaces de Kagan, qui met plus clairement en lumière leur caractère spécial par rapport à d'autres espaces partiellement projectifs.

Pour établir cette caractérisation, cherchons s'il existe des courbes auto-parallèles (1) situées dans l'hyperplan

$$x^1 = c^1 \quad , \tag{8}$$

où c^1 est une certaine constante. En tenant compte de (8), les équations (1) deviennent

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^1_{\beta\gamma} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}t} = 0 \\ &\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}t} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

où dans Γ^i_{jk} on remplace x^1 par la valeur c^1. Les formules (9) nous disent que dans le cas seulement, où nous avons

$$\Gamma^1_{\beta\gamma}(c^1, x^2, \ldots, x^n) = 0 \,, \tag{10}$$

l'hyperplan $x^1 = c^1$ contient le nombre maximum ∞^{2n-4} de courbes auto-parallèles.

De même, si les formules (10) ne sont pas vérifiées, mais la formule

$$\Gamma^1_{\beta\gamma}\,(c^1, x^2, \ldots, x^n) \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}t} = c \tag{11}$$

où c est une constante, est une intégrale première des dernières formules (9), le nombre des courbes auto-parallèles situées dans l'hyperplan $x^1 = c^1$ est égal à ∞^{2n-5}.

Supposons maintenant que l'espace A_n ait la propriété qu'il contient dans chaque hyperplan le nombre maximum ∞^{2n-4} de courbes auto-parallèles. En ce cas l'espace est euclidien projectif. Pour le démontrer, remarquons tout d'abord que, la propriété étant vraie quel que soit l'hyperplan $x^i = c^i$, nous devons avoir en accord avec les formules (10)

$$\Gamma^i_{jk} = 0, \qquad (i \neq j, k) , \tag{12}$$

et grâce à ces relations, les équations (1) deviennent

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\left(\Gamma^i_{ii}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} + 2\Gamma^i_{ik}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\right), \qquad (k \neq i) . \tag{13}$$

En supposant maintenant que la propriété est vraie aussi pour un hyperplan quelconque $a_i x^i = c$, on trouve les conditions

$$2\Gamma^i_{ik} = \Gamma^i_{ii} \qquad (i \neq k) ,$$

qui sont équivalentes aux conditions (4) et par conséquent l'espace est euclidien projectif. On peut donc énoncer le théorème suivant:

Si un espace A_n possède dans chaque hyperplan le nombre maximum ∞^{2n-4} de courbes auto-parallèles, il est euclidien projectif (les courbes auto-parallèles étant des droites) et inversement.

En supposant maintenant que l'espace A_n possède le nombre maximum ∞^{2n-4} de courbes auto-parallèles dans chaque hyperplan d'une famille de ∞^{n-p} hyperplans parallèles, l'espace est un espace de Kagan $n-p$ fois projectif. Inversement, un espace de Kagan des variables affines possède cette propriété.

Pour obtenir donc des espaces partiellement projectifs, qui ne sont pas des espaces de Kagan, on doit étudier le cas des hyperplans, qui ne contiennent pas le nombre maximum ∞^{2n-4} de courbes auto-parallèles, donc le cas des systèmes tels que (9), pour lesquels les conditions (10) ne sont pas vérifiées.

Si l'on suppose par exemple que l'hyperplan $x^1 = c^1$ contient ∞^{2n-5} de courbes auto-parallèles, c'est-à-dire que (11) est une intégrale première, on a les conditions suivantes

$$\frac{\partial \Gamma^1_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial \Gamma^l_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \Gamma^1_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \Gamma^1_{\alpha\rho}\Gamma^\rho_{\beta\gamma} + \Gamma^1_{\beta\rho}\Gamma^l_{\gamma\alpha} + \Gamma^1_{\gamma\rho}\Gamma^\rho_{\alpha\beta} = 0$$

donc des conditions différentielles dans les composantes de la connexion de l'espace, ce qui explique peut-être le fait qu'on n'a pas jusqu'ici réussi a trouver d'autres classes d'espaces partiellement projectifs que celle d'espaces de Kagan.

Резюме

О ЧАСТИЧНО ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Г. ВРАНЧЕАНУ, Бухарест

(Поступило в редакцию 5/VI 1954 г.)

Пространствами Кагана называются пространства A_n, обладающие системой координат $x_1, \ldots, x_n$, автопараллельные кривые которых находятся в гиперплоскостях некоторой системы параллельных гиперплоскостей. В этой статье доказывается, что пространство A_n проективно-евклидово, если в каждой гиперплоскости находится максимальное количество ∞^{n-4} автопараллельных кривых. Далее доказано, что A_n — пространство Кагана, если в каждой гиперплоскости некоторой системы параллельных гиперплоскостей находится максимальное количество ∞^{2n-4} автопараллельных кривых. Если пространство A_n частично проективно, но не является пространством Кагана, то существуют гиперплоскости, в которых не находится максимальное количество автопараллельных кривых, и оказывается, что связность в этом случае определяется дифференциальными уравнениями. Относительная сложность этих уравнений объясняет, может быть, то обстоятельство, почему не удалось до сих пор привести другие примеры частично-проективных пространств кроме пространств Кагана.