Miloš Kössler

Über reelle Charakteristiken von Potenzreihen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 4 (1954), No. 3, 274–282

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100112

ÜBER REELLE CHARAKTERISTIKEN VON POTENZREIHEN

MILOŠ KÖSSLER, Prag.

(Eingelangt am 24. Feber 1954.)

Ist $f(z) = z + c_2z^2 + c_3z^3 + \ldots$, so hat die Funktion $A(r) = \max_{|z|=r} R(f(z))$ für kleine $r > 0$ die Gestalt

$$r + C_2r^2 + C_3r^3 + \ldots \tag{*}$$

Hier wird das umgekehrte Problem behandelt: zu vorgegebener Reihe (*) diejenigen $f(z)$ zu finden, für welche in einer Umgebung des Nullpunktes die Gleichung $A(r) = r + C_2r^2 + C_3r^3 + \ldots$ gilt. Analog kann man $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ und ähnliche Funktionen behandeln.

Einleitung. Die Potenzreihe

$$w = f(z) = z + \sum_2^\infty (a_k + ib_k)z^k \tag{1}$$

mit positiven Konvergenzradius bildet den Kreis $|z| = r$ auf eine gewisse geschlossene Kurve $w = f(re^{i\varphi})$ in der w-Ebene ab. Wenn bei festem r die Zahl φ das Intervall $\langle 0,2\pi\rangle$ durchläuft, ändert sich wie der Realteil so auch der Imaginärteil von w stetig. Das Maximum des Realteiles wird gewöhnlich mit $A(r)$ und das Minimum mit $B(r)$ bezeichnet. Ähnlich bezeichnet mann Max . . $|f(z)| = M(r)$ und Min $|f(z)| = m(r)$. Diese und ähnliche reelle Funktionen der positiven Veränderlichen r werden wir als *reelle Charakteristiken* der Potenzreihe (1) bezeichnen.

Eine solche Charakteristik ist z. B. der Mittelwert

$$F(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})\,\bar{f}(re^{-i\varphi})d\varphi = r^2 + \sum_2^\infty |a_k+ib_k|^2r^{2k} \tag{2}$$

Alle solche Charakteristiken der Reihe (1) sind durch die Koefizienten der Reihe eindeutig bestimmt. Dieselben Charakteristiken $A(r)$, $B(r)$, $M(r)$, $m(r)$ und $F(r)$ wie die Reihe (1) hat auch die Reihe

$$\bar{f}(z) = z + \sum_2^\infty (a_k - ib_k)z^k$$

und weiter die Reihen, welche aus (1) durch die Rotation der Veränderlichen entstehen, das heißt die Reihen $f(ze^{i\psi})$, wo ψ eine reelle Zahl ist. Die Charakteristiken $F(r)$, $M(r)$ und $m(r)$ haben sogar die Reihen $e^{i\varphi}f(ze^{i\psi})$ (φ und ψ reell) gemeinsam.

Manche Eigenschaften solchen Charakteristiken sind wohl bekannt. So ist z. B. die Funktion $M(r)$ monoton wachsend, stückweise analytisch und ihr Wachstum ist von ganz bestimmten Typus (der Dreikreisensatz von Hadamard).

Um das Problem, welches den Inhalt dieser Abhandlung bildet, näher zu charakterisieren, zitiere ich aus dem Buche L. BIEBERBACH: Lehrbuch der Funktionentheorie B. II. S. 130. folgende Stelle:

,,Man ist aber heute noch weit davon entfernt, die charakteristischen Eigenschaften der Funktion $M(r)$ zu kennen. Das heißt also, man kennt noch nicht die notwendigen und hinreichenden Eigenschaften, die eine Funktion besitzen muß, wenn sie $M(r)$ einer analytischen Funktion sein soll. Man weiß auch nicht, ob bis auf triviale Möglichkeiten zu jedem $M(r)$ nur eine analytische Funktion gehört. Diese trivialen Möglichkeiten aber sind diese: zu den Funktionen $f(z)$, $\varepsilon f(\eta z)$, $\varepsilon \bar{f}(\eta z)$ gehört das gleiche $M(r)$, wenn ε, η Zahlen vom Betrage Eins sind und wenn zugleich $f(0) = 0$ ist.''

Bei der Charakteristik (2) $F(r)$ kann man alle diese Fragen leicht beantworten. Es ist augenscheinlich, daß zu jedem $F(r)$ eine unendliche, nicht abzählbare Menge von Potenzreihen (1) gehört, die ganz verschiedene analytische Funktionen definieren. Die Elemente dieser Menge sind diejenigen Potenzreihen, deren Koeffizienten dieselben Beträge $|a_k + ib_k|$ for $k = 1, 2, 3, \ldots$ ... besitzen.

In folgendem werden wir beweisen, daß auch ein und dasselbe Maximum des Realteiles.

$$A(r) = r + C_2r^2 + C_3r^3 + \ldots + C_nr^n + \ldots \tag{3}$$

zu unabzählbar unendlich vielen Potenzreihen (1) gehört, die ganz verschiedene analytische Funktionen definieren. Die einzige Bedingung für (3) ist dabei, daß alle C_k reell sind und die Reihe (3) einen positiven Konvergenzradius hat. Es wird nicht nur die Existenz solchen Reihen (1) bewiesen, sondern sogar eine konstruktive Vorschrift zur Bildung solcher Reihen gegeben. Ähnliche Sätze über die Charakteristiken $B(r)$, $M(r)$, und $m(r)$ sind dann nur eine Folge des Satzes über $A(r)$.

1. Die Charakteristik $A(r)$. Es sei die Reihe (1) gegeben. Wenn wir bei festem r $z = re^{i\varphi}$ einsetzen, so bekommt man bei üblicher Bezeichnung

$$w = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$$

$$u(r, \varphi) = r\cos\varphi + \sum_2^\infty a_kr^k \cos k\varphi - \sum_2^\infty b_kr^k \sin k\varphi \tag{1,1}$$

Es ist also $u(r, \varphi)$ eine stetige periodische Funktion der reellen Veränderlichen

φ, welche alle Derivierten nach φ besitzt. Extreme Werte dieser periodischen trigon. Reihe sind durch die Wurzel der Gleichung

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \sin\varphi + \sum_2^\infty k a_k r^{k-1} \sin k\varphi + \sum_2^\infty k b_k r^{k-1} \cos k\varphi = 0 \qquad (1,2)$$

bestimmt. Wenn wir die linke Seite dieser Gleichung als $G(r, \varphi)$ bezeichnen, so ist diese Funktion der *komplexen* Veränderlichen r und φ analytisch solange $|r|$ genügend klein ist und φ in einem genügend engem Bande $-\delta < J(\varphi) < \delta$ verbleibt. Da für $r = 0$ die Gleichung (1,2) nur zwei Lösungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$ besitzt, so hat auch die Gleichung (1,2) für genügend kleine r nur zwei Lösungen der Form

$$\begin{aligned} \varphi_1(r) &= \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 r^3 + \dots, \\ \varphi_2(r) &= \pi + \beta_1 r + \beta_2 r^2 + \beta_3 r^3 + \dots, \end{aligned}$$

wo die Koeffizienten (α_k, β_k) reell sind und beide Reihen für genügend kleine r konvergieren. Das ist eine Folge der Tatsache, daß durch (1,2) φ als implizite Funktion von r definiert wird. Der Winkel $\varphi_1(r)$ bestimmt dann $A(r)$ und der Winkel $\varphi_2(r)$ $B(r)$. Es ist also

$$A(r) = u(r, \varphi_1(r)), \qquad B(r) = u(r, \varphi_2(r)) .$$

Das ist ein systematischer Weg zur Berechnung der Charakteristiken $A(r)$ und $B(r)$. Z. B. wenn alle Koeffizienten der Reihe (1) reell sind, d. h. wenn alle $b_k = 0$ sind, so kann die Gleichung (1,2) in der Form

$$\sin\varphi \left\{1 + \sum_2^\infty k a_k r^{k-1} \frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}\right\} = 0$$

geschrieben werden. Es ist klar, daß für genügend kleine r sich die Klammer nicht annulieren kann und infolgedessen ist für solche r $\varphi_1(r) = 0$, $\varphi_2(r) = \pi$ und $A(r) = f(r)$, $B(r) = f(-r)$.

Man kann die Gleichungen (1,1) und (1,2), welche $A(r)$ bestimmen, durch eine einzige ersetzen. Wenn wir nämlich in die Gleichung (1,1) $\varphi = \varphi_1(r)$ einsetzen, so bekommen wir

$$A(r) = r\cos\varphi_1 + \sum_2^\infty a_k r^k \cos k\varphi_1 - \sum_2^\infty b_k r^k \sin k\varphi_1 .$$

Beide Seiten dieser Gleichung sind konvergente Potenzreihen in r. Durch Differenzieren beider Seiten nach r bekommen wir

$$\begin{aligned} rA'(r) = \{&r\cos\varphi_1 + \sum_2^\infty k a_k r^k \cos k\varphi_1 - \sum_2^\infty k b_k r^k \sin k\varphi_1\} - \\ &- r\frac{d\varphi_1}{dr}\left\{r\sin\varphi_1 + \sum_2^\infty k a_k r^k \sin k\varphi_1 + \sum_2^\infty k b_k r^k \cos k\varphi_1\right\} . \end{aligned}$$

Aber die zweite Klammer auf der rechten Seite ist nach (1,2) Null und $\dfrac{d\varphi_1}{dr}$ ist endlich. Es ist also auch

$$rA'(r) = r\cos\varphi_1 + \sum_2^\infty ka_k r^k \cos k\varphi_1 - \sum_2^\infty kb_k r^k \sin k\varphi_1 +$$

$$+ i\,\{r\sin\varphi_1 + \sum_2^\infty ka_k r^k \sin k\varphi_1 + \sum_2^\infty kb_k r^k \cos k\varphi_1\}\,, \tag{1,3}$$

$$rA'(r) = re^{i\varphi 1} + \sum_2^\infty k(a_k + ib_k) r^k e^{ki\varphi 1} = re^{i\varphi 1} f'(re^{i\varphi 1})\,.$$

Wenn also die Reihe (1) gegeben ist, so ist diese Gleichung (1,3) äquivalent mit beiden Gleichungungen (1,1) und (1,2). Denn $\varphi_1(r)$ wird durch die Gleichung (1,2)

$$J(re^{i\varphi 1} f'(re^{i\varphi 1})) = 0$$

bestimmt und der Realteil der rechten Seite von (1,3) ist dann $rA'(r)$.

Nach dieser Vorbereitung sind wir im Stande zu einem von vornherein gegebenem $A(r)$ die zugehörige Reihe oder Reihen (1) zu suchen.

§ 2. Es sei also eine konvergente Reihe

$$A(r) = r + C_2 r^2 + C_3 r^3 + \dots \tag{2,1}$$

mit reellen Koeffizienten von vornherein gegeben. Nach dem, was vorher gesagt wurde, hat die Reihe mit reellen Koeffizienten $f_1(z) = A(z)$ für genügend kleine r die Charakteristik $A(r)$. Wenn nun eine andere Reihe $f(z)$ existieren soll, welche dasselbe $A(r)$ besitzt, dann muß für sie die Relation (1,3) erfüllt werden. Dabei muß der zugehörige Winkel $\varphi_1(r)$ die Gestalt einer Potenzreihe in r haben und diese Reihe muß die Relation (1,3) erfüllen. Wir definieren also den Winkel $\varphi_1(r)$ versuchsweise durch eine Reihe mit beliebigen reellen Koefizienten

$$\begin{gathered} \sin\varphi_1 = \gamma_1 r + \gamma_2 r^2 + \gamma_3 r^3 + \dots = \psi(r)\,, \\ \cos\varphi_1 = +\sqrt{1 - \sin^2\varphi_1} \end{gathered} \tag{2,2}$$

Es ist also

$$e^{i\varphi_1(r)} = \sqrt{1-\psi^2} + i\psi(r)\,.$$

Nun bezeichnen wir das Produkt

$$re^{i\varphi_1(r)} = r\{\sqrt{1-\psi^2} + i\psi\} = z\,, \tag{2,3}$$

so daß die Gleichung (1,3) in der Gestallt

$$rA'(r) = re^{i\varphi_1} f'(re^{i\varphi_1}) = zf'(z)$$

erscheint. Die inverse Funktion zu (2,3)

$$r = v(z) = z + \delta_1 z^2 + \delta_2 z^3 + \dots \tag{2,4}$$

ist eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Infolgedessen ist

$$zf'(z) = v(z)\,A'(v(z)) = v(z)\,\{1 + 2C_2 v(z) + 3C_3 v^2(z) + \dots\}\,. \tag{2,5}$$

Dadurch ist $f'(z)$ und also auch $f(z)$ formel bestimmt. Das bedeutet: Wenn überhaupt eine Reihe $f(z)$ existiert, deren Charakteristik das vorgeschriebene $A(r)$ für den vorgeschriebenen Winkel $\varphi_1(r)$ erreicht, dann muß die Relation (2,5) erfüllt werden. Die rechte Seite von (2,5) definiert aber immer eine Potenzreihe in z. Das ist eine Folge der Tatsache, daß die inverse Reihe (2,4) einen positiven Konvergenzradius besitzt. Man kann also immer ein solches positives ϱ finden, daß für $|z| < \varrho$ die Zahl $|v(z)|$ kleiner wird als der Konvergenzradius der Reihe $A'(r)$ und also auch der Reihe $A(r)$. Nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz kann also die rechte Seite von (2,5) in der Form einer Potenzreihe in z geschrieben werden. Die Koeffizienten dieser Reihe sind dann eindeutig bestimmt durch die Koeffizienten C_k in der Reihe $A(r)$ und durch die Koeffizienten γ_k in der Reihe $\psi(z)$. Dadurch ist die Reihe $f'(z)$ und also auch $f(z)$ bestimmt. Diese Funktion $f(z)$ besitzt dann das durch die Reihe (2,1) vorgeschriebene Maximum des Realteiles $A(r)$ für den vorgeschriebenen Winkel (2,2) $\varphi_1(r)$. Wenn wir nämlich in die Gleichung (2,5) z gleich $re^{i\varphi_1(r)}$ einsetzen und $\varphi_1(r)$ durch (2,2) definieren, so wird die Gleichung (1,3) erfüllt.

Die Reihe (2,2), welche den Winkel $\varphi_1(r)$ definiert, hat reelle Koeffizienten und einen positiven Konvergenzradius. Diese Bedingungen erfüllt eine unabzählbare Menge von Reihen. Man kann also auch eine unabzählbare Menge von Reihen $f(z)$ konstruktieren, welche alle dieselbe von vorherein vorgeschriebene Charakteristik $A(r)$ (2,1) für genügend kleine r besitzen. Wir definieren z. B. den Winkel $\varphi_1(r)$ durch die Gleichungen

$$\sin\varphi_1(r) = \frac{\varepsilon}{2} r, \qquad \cos\varphi_1(r) = +\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 r^2}{4}}\,,$$

wo ε eine beliebige reelle Zahl ist und r die Zahl $2:|\varepsilon|$ nicht überschreitet. Die Gleichung (2,3) ist dann

$$z = r\left(\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 r^2}{4}} + i\frac{\varepsilon r}{2}\right)$$

und die inverse Funktion (2,4)

$$r = z : (1 + i\varepsilon z)^{\frac{1}{2}} = v(z)\,.$$

Diese Funktion ist eindeutig und regulär, solange $|z| < 1 : |\varepsilon|$ bleibt. Wenn nun das Maximum des Realteiles durch die Reihe $A(r) = r + C_2 r^2 + C_3 r^3 + \dots$ vorgeschrieben ist, dann ist die zugehörige Reihe (1) durch (2,5) definiert:

$$z f_\varepsilon(z) = v(z)\, A'(v(z))\,.$$

So hat z. B. die Funktion $f(z) = z$ die Charakteristik $A(r) = r$. Es ist also $A'(r) = 1$ und infolgedessen besitzen alle Funktionen $f_\varepsilon(z)$, welche durch

$$f'_\varepsilon(z) = v(z) : z = 1 : \sqrt{1 + i\varepsilon z}$$

definiert sind, die Charakteristik $A(r) = r$. Durch Integration bekommen wir

$$f_\varepsilon(z) = \frac{2}{i\varepsilon}\{\sqrt{1 + i\varepsilon z} - 1\} . \tag{2,6}$$

Mann kann sich leicht durch direkte Berechnung überzeugen, daß

$$A(r) = \operatorname{Max} \mathrm{R}\,(f_\varepsilon(re^{i\varphi})) = r ,$$

solange $r < 1 : |\varepsilon|$, dass heißt im ganzen Konvergenzkreise der Reihe (2,6).

Wenn aber der Winkel $\varphi_1(r)$ anders gewählt wird, z. B. durch

$$e^{i\varphi_1(r)} = \frac{1 + i\varepsilon r}{1 - i\varepsilon r}, \qquad r < 1 : |\varepsilon| ,$$

so berechnet man leicht die zugehörigen Funktionen mit Hilfe der Formel

$$f'_\varepsilon(z) = \frac{1}{2i\varepsilon z}\{\sqrt{1 + 6i\varepsilon z - \varepsilon^2 z^2} - (1 + i\varepsilon z)\} . \tag{2,7}$$

Alle diese Funktionen $f_\varepsilon(z)$ besitzen wiederum die Charakteristik $A(r) = r_1$ im ganzen Konvergenzkreise, dessen Radius $(3 - 2\sqrt{2}) : |\varepsilon|$ ist. Das wird natürlich nicht immer der Fall sein. Wenn die Funktion $A(r)$ in Form eines Polynoms oder einer unendlichen Reihe in r vorgeschrieben ist oder wenn der Winkel $\varphi_1(r)$ durch die allgemeine Reihe (2,2) gegeben ist, so wird die dadurch definierte Potenzreihe $f(z)$ die Charakteristik $A(r)$ nur für genügend kleine Werte von r besitzen. Für grössere r kann die Charakteristik $A(r)$ andere Form annehmen, in voller Übereinstimmung mit den bekannten Untersuchungen von Blumenthal.

§ 3. Andere Charakteristiken. Ist eine andere Charakteristik z. B. $B(r)$, $M(r)$ oder $m(r)$ in der Form einer Potenzreihe vorgeschrieben, dann ist es regelmäßig möglich die Aufgabe auf das schon gelöste Problem zurückzuführen. Wenn z. B.

$$B(r) = -r + C_2 r^2 + C_3 r^3 + \dots$$

sein soll, dann konstruieren wir eine Potenzreihe $f(z)$, welche $A(r) = -B(r)$ besitzt. Die gesuchte Funktion ist dann $-f(-z)$.

Ist $M(r)$ in der Form

$$M(r) = 1 + C_1 r + C_2 r^2 + \dots ,$$

wo $C_1 > 0$, gegeben, dann konstruktieren wir zuerst die Funktion $f(z)$ mit der Charakteristik $A(r) = \log M(r)$ und die gesuchte Reihe ist dann $e^{f(z)}$. So besitzen z. B. alle Funktionen

$$F_\varepsilon(z) = e^{f_\varepsilon(z)} ,$$

wo $f_\varepsilon(z)$ durch (2,6) oder (2,7) gegeben ist, die Charakteristik $M(r) = e^r$ und gleichzeitig $m(r) = e^{-r}$, sogar im ganzen Konvergenzkreise. Das geschieht natürlich nur ausnahmsweise. Im allgemeinen Falle wird das vorgegebene

$M(r)$ nur für genügend kleine r erreicht. Unsere Säzte über die Charakteristiken $A(r)$ und $M(r)$ sind also in allgemeinem Falle nur lokale Sätze. In ähnlicher Weise kann mann ein vorgegebenes $m(r)$ behandeln.

§ 4. Ein Allgemeiner Abbildungsatz. Die Methode, welche zur Konstruktion von Potenzreihen mit vorgegebenem $A(r)$ benützt wurde, ist nur eine Folge eines lokalen Abbildungsatzes.

Durch die Reihe

$$z = \beta_1\zeta + \beta_2\zeta^2 + \beta_3\zeta^3 + \ldots = \psi(\zeta), \qquad |\beta_1| = 1 \tag{4,1}$$

sei eine schlichte Abbildung des Kreises $|\zeta| \leqq r_1$ in der ζ Ebene auf ein Gebiet der z Ebene gegeben. Wenn $\zeta = r$ reell ist, so wird der Teil der Realachse $-r_1 < < r < +r_1$ in der ζ Ebene durch (4,1) auf einen einfachen sich nicht schneidenden Bogen o_1 in der z Ebene abgebildet. Des weiteren sei in der Ebene $w = u + iv$ ein beliebiger analytischer Bogen O durch die parametrischen Gleichungen

$$u = \mathrm{R}(r) = \sum_0^\infty C r^k_k, \quad v = J(r) = \sum_0^\infty D_k r^k \tag{4,2}$$

wo C_k, D_k und r reelle Zahlen sind, definiert. Dann gibt es eine einzige Potenzreihe

$$w = F(z) = \sum_0^\infty (a_k + ib_k) z^k\,, \tag{4,3}$$

durch welche die r-Punkte des Bogens o_1 auf die r-Punkte des Bogens O abgebildet werden, solange r genügend klein gewählt wird. Es sei noch ausdrücklich betont, daß der Bogen O (4,2) keineswegs schlicht zu sein braucht.

Der Beweis ist im wesentlichen derselbe wie im zweiten Abschnitte dieser Abhandlung. Die Inverse Reihe von (4,1)

$$\zeta = t(z) = \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \gamma_3 z^3 + \ldots \tag{4,4}$$

ist schlicht, solange $|z| < r_2$. Es ist also identisch $t(\psi(r)) = r$ für $r < r_2$. Die gesuchte Funktion ist dann

$$F(z) = \mathrm{R}(t(z)) + \mathrm{i}J(t(z))\,, \tag{4,5}$$

da für genügend kleine $|z| = r$

$$F(\psi(r)) = \mathrm{R}(r) + \mathrm{i}J(r) \text{ ist}.$$

Daß (4,5) für solche z in der Form (4,3) geschrieben werden kann, ist nur eine Folge des Weierstraßschen Doppelreihensatzes.

Резюме

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

МИЛОШ КЕССЛЕР (Miloš Kössler), Прага

(Поступило в редакцию 24/II 1954 г.)

Степенной ряд

$$w = f(z) = z + \sum_{2}^{\infty}(a_k + \mathrm{i}b_k)\, z^k \tag{1}$$

с положительным радиусом сходимости отображает круг $|z| = r$ на некоторую замкнутую кривую $w = f(r\mathrm{e}^{i\varphi})$ в плоскости w, поскольку r меньше радиуса сходимости. При этом, очевидно, абсолютная величина w, действительная часть w и мнимая часть w являются функциями действительного переменного φ. Максимум абсолютной величины $|f(r\mathrm{e}^{i\varphi})|$ в интервале $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ обозначается обычно через $M(r)$, минимум через $m(r)$, максимум действительной части $\mathrm{Max}\, \mathrm{R}(f(z)) = A(r)$, минимум через $B(r)$. Эти и подобные им функции действительного переменного r мы назовем действительными характеристиками данного степенного ряда. Известно, что эти характеристики однозначно определяются степенным рядом, т. е. его коэффициентами, и являются для достаточно малых r степенными рядами переменного r с действительными коэффициентами. Так, напр., нетрудно доказать, что ряд (1) с действительными коэффициентами $f(z) = z + \sum_{2}^{\infty} a_k z^k$ имеет для достаточно малых $|z| = r$ характеристику $A(r) = f(r)$. Соответствующий угол $\varphi_1(r)$, для которого $\mathrm{R}(f(r\mathrm{e}^{i\varphi_1}))$ принимает свое максимальное или минимальное значение, можно вычислить в общем случае по уравнению (1,2) второго параграфа, т. е. $\mathrm{I}(r\mathrm{e}^{i\varphi_1} f'(r\mathrm{e}^{i\varphi_1})) = 0$, причем соответствующее $A(r)$ определяется по формуле (1,3): $rA'(r) = r\mathrm{e}^{i\varphi_1} f'(r\mathrm{e}^{i\varphi_1})$. Это соотношение позволяет нам решить обратную задачу, т. е. для наперед заданного (в виде степенного ряда с действительными коэффициентами) $A(r)$:

$$A(r) = r + C_2 r^2 + C_3 r^3 + \ldots$$

отыскать соответствующий степенной ряд (1). Эта задача составляет содержание второго параграфа и мы получаем неизвестный до сего времени и довольно неожиданный результат, а именно: таких степенных рядов, которые имеют одно и то же $A(r)$ для достаточно малых r и которые определяют совершенно различные аналитические функции, существует несчетное множество. Так напр., функция $w = z$ имеет, очевидно, характеристику $A(r) = r$ во всей плоскости z. Однако, то же $A(r) = r$ имеют, напр., все функции (2,6)

$$w = f_\varepsilon(z) = \frac{2}{\mathrm{i}\varepsilon}\{\sqrt{1 + \mathrm{i}\varepsilon z} - 1\}\,,$$

где ε — произвольная действительная константа, причем во всем своем круге сходимости $|z| < 1 : |\varepsilon|$. Тем же свойством обладают и функции $f'_\varepsilon(z)$, определенные соотношением (2,7)

$$f'(z) = \frac{1}{2i\varepsilon z}\{\sqrt{1 + 6i\varepsilon z - \varepsilon^2 z^2} - (1 + i\varepsilon z)\},$$

точно так же во всем своем круге сходимости. Однако, этими двумя классами далеко не исчерпываются все ряды (1), для которых $A(r) = r$. Можно построить несчетное множество других таких рядов по общему предписанию (2,5).

В третьем параграфе доказывается подобная теорема для характеристик $B(r)$, $M(r)$ и $m(r)$. Так напр., для наперед заданного

$$M(r) = 1 + C_1 r + C_2 r^2 + \dots,$$

где $C_1 > 0$ и все коэффициенты — действительные числа, существует для достаточно малых r несчетное множество функций $F(z)$, имеющих ту же характеристику $M(r)$ и определяющих совершенно различные аналитические функции. Для этого достаточно построить функции $f(z)$, у которых $A(r) = \log M(r)$ по предписанию второго параграфа. Тогда будет, очевидно,

$$F(z) = e^{f(z)}.$$