Štefan Schwarz

Теория характеров коммутативных полугрупп

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 4 (1954), No. 3, 219–247

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100110`

Чехословацкий математический журнал, т. 4 (79) 1954

ТЕОРИЯ ХАРАКТЕРОВ КОММУТАТИВНЫХ ПОЛУГРУПП

ШТЕФАН ШВАРЦ, (Štefan Schwarz), Братислава

(Поступило в редакцию 14. 1. 1954 г.)

В настоящей работе содержится обобщение классической теории характеров конечных абелевых групп для случая конечных абелевых полугрупп. Эта проблема в предлагаемой читателям работе решена до некоторой степени полностью в приведенных ниже теоремах 2, 4, 6, 7, 8, 9.

Полугруппой называется непустое множество элементов $S = \{a, b, c, \dots\}$, если имеется правило, которое позволяет построить для каждых двух элементов их произведение, причем выполняется ассоциативный закон: $(ab)\,c = a(b\,c)$.

Нулевым элементом (нулем) полугруппы называется такой элемент z, который при каждом $a \in S$ удовлетворяет условию $az = za = z$. Если существует в полугруппе нулевой элемент, то он будет единственным.

Все полугруппы, рассматриваемые в этой работе, конечны и коммутативны.

Определение 1. *Характером полугруппы S называется комплексная функция $\chi(a)$, определенная для каждого $a \in S$ и удовлетворяющая условию*

$$\chi(a)\,.\,\chi(b) = \chi(ab) \quad \textit{для любых} \quad a, b \in S\,.$$

Два характера полугруппы будем считать различными, если их значения отличаются друг от друга хоть при одном $a \in S$.

Каждая полугруппа имеет характер χ_0, определенный следующим образом:

$$\chi_0(a) = 0 \quad \text{для каждого} \quad a \in S\,.$$

Такой характер назовем нулевым характером. Далее каждая полугруппа S имеет характер χ_1, данный уравнением:

$$\chi_1(a) = 1 \quad \text{для каждого} \quad a \in S\,.$$

Этот характер называется единичным. Характер χ_1 единственный характер, для которого $\chi(z) \neq 0$. Действительно, если $\chi(x) \neq \chi_1(x)$, то существует по крайней мере одно $a \in S$ такое, что $\chi(a) \neq 1$. Из соотношения $az = z$ тогда следует $\chi(a)\,.\,\chi(z) = \chi(z)$, т. е. $\chi(z)[\chi(a) - 1] = 0$, $\chi(z) = 0$.

Кроме нулевого и единичного характера полугруппа может не иметь уже других характеров. Например, нильпотентная полугруппа S, т. е. полугруппа, которая для некоторого целого $\varrho \geq 1$ удовлетворяет условию $S^\varrho = \{z\}$, не имеет, очевидно, иных характеров, кроме нулевого и единичного.

Множество всех характеров полугруппы S будем в дальнейшем обозначать через S^*.

Если же S есть группа, то нам известно, что при подходящем(впрочем весьма естественном) определении умножения в S^*, S^* будет группой с нулем. Это значит, что S^* является полугруппой, которую можно представить в виде суммы двух дизьюнктных слагаемых $S^* = G^* + \chi_0$, где $\chi_0^2 = \chi_0$, $\chi\chi_0 = \chi_0$ для каждого $\chi \in G^*$, и G^* есть группа. Известно также, что $G^* \cong S$.

Целью настоящей работы является исследование строения множетсва S^* в том случае, когда S — общая конечная (коммутативная) полугруппа. Помещенные ниже теоремы польностью решают этот вопрос. Результаты весьма наглядны, и вряд ли можно представить лучшую гармоничность результатов чем та, с которой мы встречаемся в нижеследующих теоремах. Одновременно указан и конструктивный метод для нахождения всех характеров данной полугруппы.

Целый ряд теорем, доказанных в дальнейшем, имеет место и в случае некоторых типов бесконечных коммутативных полугрупп. Но это послужит материалом для другой работы.

I.

Пусть S — полугруппа, χ_1, χ_2—два ее характера. Произведением характеров $\chi_1 \cdot \chi_2$ называется функция, определенная следующим образом:

$$\chi_1 \cdot \chi_2(a) = \chi_1(a) \cdot \chi_2(a) \quad \text{для каждого } a \in S\,.$$

Функция $\chi_1\chi_2$ является также характером, так как

$$\chi_1\chi_2(a) \cdot \chi_1\chi_2(b) = \chi_1(a) \cdot \chi_2(a) \cdot \chi_1(b) \cdot \chi_2(b) = \chi_1(ab) \cdot \chi_2(ab) = \chi_1\chi_2(ab)\,,$$

для любых a, $b \in S$.

Следовательно:

Лемма 1. *Если умножение характеров определить выше указанным образом, то множество S^* будет полугруппой.*

Элемент χ_0 является при этом нулевым элементом полугруппы S^*, то—есть $\chi\chi_0 = \chi_0$ для каждого $\chi \in S^*$. Это следует из того, что для каждого $a \in S$ и для каждого $\chi \in S^*$

$$\chi\chi_0(a) = \chi(a)\,\chi_0(a) = \chi(a)\,.\,0 = 0\,.$$

Далее, элемент $\chi_1 \in S^*$ является, очевидно, единицей в полугруппе S^*, т. е. $\chi\chi_1 = \chi$ для каждого $\chi \in S^*$.

Очевидно также:

Лемма 2. *Если χ есть характер полугруппы S, то и сопряженная с ним функция $\bar{\chi}$ есть характер полугруппы S.*

Определение 2. *Идеал J полугруппы S называется простым идеалом, если множество $S - J$ является полугруппой.*

По причинам чисто формального характера договоримся еще на следующем, что нам в дальнейшем часто сгодится:

Определение 2а. *Пустое множество $\emptyset$ и всю полугруппу S назовем также простым идеалом полугруппы S.*

Лемма 3. *Пусть χ — характер полугруппы S; пусть J — множество тех элементов $a \in S$, для которых $\chi(a) = 0$. Тогда J будет простым идеалом в S.*

Доказательство. а) Если J — пустое множество или $J = S$, то теорема справедлива в силу определения 2а.

б) Пусть $J \neq \emptyset$, $J \neq S$. Пусть $a \in J$, $s \in S$. Тогда $\chi(as) = \chi(a) \, . \, \chi(s) = 0 \, . \, \chi(s) = 0$, следовательно и $as \in J$, т. е. J является идеалом в S. Пусть далее $a \in S - J$, $b \in S - J$, т. е. $\chi(a) \neq 0$, $\chi(b) \neq 0$. Тогда $\chi(ab) = \chi(a) \, . \, \chi(b) \neq 0$, т. е. $ab \in S - J$. Значит, $S - J$ есть полугруппа, т. е. J является простым идеалом в S.

Следовательно, каждый характер полугруппы S порождает разложение S в сумму двух дизъюнктных слагаемых

$$S = J + (S - J) \, ,$$

где J — простой идеал, и $S - J$ — полугруппа.

Лемма 4. *Пусть e — идемпотент; тогда либо $\chi(e) = 1$, либо $\chi(e) = 0$.*

Доказательство. Так как $e^2 = e$, то $\chi(e)^2 = \chi(e)$, то—есть $\chi(e) \, [\chi(e) - 1] = 0$. Из этого уже следует утверждение леммы.

Теперь используем условие конечности полугруппы. Пусть $a \in S$. Тогда последовательность элементов

$$a, a^2, a^3, \ldots \tag{1}$$

имеет только конечное число элементов. Пусть m будет наименьшее целое число такое, что a^m в последовательности (1) повторается. Пусть далее $a^m = a^n$, $n > m$ и n есть наименьший показатель степени, обладающий этим свойством. Известно, что в таком случае последовательность (1) имеет только $n - 1$ различных элементов. Это следующие элементы из последовательности (1):

$$a, a^2, \ldots, a^{m-1} \mid a^m, a^{m+1}, \ldots, a^{n-1} \, .$$

Элементы $\{a^m, \ldots, a^{n-1}\}$ образуют при этом (циклическую) группу $\mathfrak{g}_a$. Ее единицей будет элемент $a^{\tau(n-m)}$, где τ — наименьшее целое число, удовлетворящее неравенствам $m \leqq \tau(n - m) \leqq n - 1$.[1]) Для нас будет в дальнейшем важно только то, что для каждого $a \in S$ существует $\varrho \geqq 1$ такое, что a^{ϱ} есть идемпотент.

Лемма 5. *Функциональными значениями каждого характера являются или нуль или некоторый корень из единицы.*

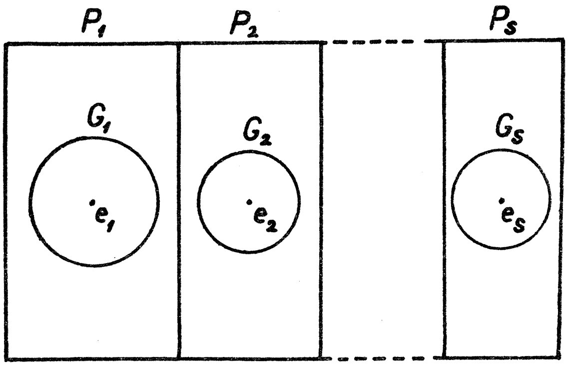
Доказательство. Пусть χ — любой характер, a — любой элемент $\in S$. Тогда для соответствующего ϱ, $a^{\varrho} = e$, где e — идемпотент. Значит, по лемме 4, $\chi(a)^{\varrho}$ равно или нулю или единице. Это значит: или же $\chi(a) = 0$, или же $\chi(a) = \cos\dfrac{2\pi l}{\varrho} + i \sin\dfrac{2\pi l}{\varrho}$, где l — целое число.

Теперь приведем несколько теорем, доказательство которых читатель найдет в работе Шварц [1][2]).

Пусть полугруппа S имеет в качестве идемпотентов элементы

$$e_1, e_2, \ldots, e_s. \tag{2}$$

Если S содержит нулевой элемент z, то он находится среди элементов (2).



Черт. 1.

Скажем, что элемент a принадлежит к идемпотенту e_i, если найдется такое $\varrho \geqq 1$, что $a^{\varrho} = e_i$. Каждый элемент $a \in S$ принадлежит лишь к одному единственному идемпотенту e_i. Множество всех элементов $a \in S$, которые принадлежат к идемпотенту e_i, образует полугруппу P_i. Эту полугруппу назовем „максимальной полугруппой", принадлежащей к идемпотенту e_i.[3])

[1]) Единичным элементом группы $\mathfrak{G}_a$ является, конечно, также всякий элемент вида $a^{t(n-m)}$ для $t \geqq \tau$, например $a^{m(n-m)}$. Легко доказать, что для $t \geqq \tau$ $a^{t(n-m)} = a^{\tau(n-m)}$.

[2]) Наш случай конечных коммутативных полугрупп является лишь частным случаем рассматриваемых там полугрупп; высказанные здесь теоремы можно, конечно, для этих полугрупп доказать и непосредственно.

[3]) Полугруппа „максимальна" в том смысле, что она является наиболее широкой частичной полугруппой в S, имеющей единственный идемпотент e_i.

Полугруппы P_i взаимно дизьюнктны, так что S можно разложить в сумму дизьюнктных слагаемых

$$S = P_1 + P_2 + \ldots + P_s\,. \qquad (3)$$

Каждая из полугрупп P_i содержит только одну единственную, так называемую „*максимальную группу*" G_i, единичным элементом которой является e_i.

Множество G_i может быть охарактеризованно тем, что оно является наибольшей частичной полугруппой в S, содержащей идемпотент e_i и являющейся одновременно группой. Очевидно $G_i \subseteqq P_i$. Если в S содержится нулевой элемент z, то P_z есть множество нильпотентных элементов $\in S$, а G_z состоит из одного единственного элемента, а именно $G_z = \{z\}$.

Положение схематически представлено на чертеже 1.

Чтобы выяснить разницу между элементами группы G_i и элементами множества $P_i - G_i$, введем следующее понятие:[4]) скажем, что элемент a имеет предпериод длины $m-1 \geqq 1$, если a^m есть нисшая степень a, которая повторяется в последовательности (1). Если же $m = 1$, говорим, что a не имеет предпериода. Элементы, которые не имеют предпериода,называем *регулярными*. Справедливо утверждение: Каждый элемент $\in G_i$ является регулярным, ни один из элементов множества $P_i - G_i$ не является регулярным, т. е. имеет предпериод длины $\geqq 1$. Из этого вытекает следующая теорема (смотри [1], теорема 9), которую приведем как особую лемму:

Лемма 6. *Для того, чтобы полугруппа S была соединением дизьюнктных групп, необходимо и достаточно, чтобы каждый элемент $a \in S$ был регулярным.*

Элементы $\in G_i$ можно охарактеризовать еще немного по — другому. Для элементов $a \in P_i$, которые содержатся в G_i, и только для этих элементов, выполняется равенство $ae_i = a$. Следовательно, для элемента $a \in P_i - G_i$ всегда $ae_i \neq a$.

Укажем еще одну лемму, которая не была сформулирована в работе [1]:

Лемма 7. *Пусть S_0 — множество регулярных элементов полугруппы S. Тогда S_0 является полугруппой, которая может быть представлена в виде суммы дизьюнктных максимальных групп.*

Доказательство. Пусть $a \in S_0$, $b \in S_0$. Тогда $a \in G_i$, $b \in G_j$ при i, j, выбранных надлежащим образом. Достаточно доказать, что ab будет элементом какой — то максимальной группы из S. Пусть e_i, e_j — идемпотенты максимальных групп G_i соотв. G_j. Произведение e_ie_j будет, очевидно, тоже определенный идемпотент $e_ie_j = e_k$. Соответствующую максимальную группу обозначим через G_k. Покажем, что ab будет элементом максимальной

[4]) Может, конечно, случиться, что для некоторых i, $P_i = G_i$, следовательно, множество $P_i - G_i$ пусто.

группы G_k. Прежде всего видно, что $ab \in P_k$. Далее $ab \,.\, e_k = abe_ie_j = (ae_i)(be_j) = ab$. Следовательно, $abe_k = ab$, т. е. $ab \in G_k$, ч. т. д.

Лемма 8. *Пусть χ — характер полугруппы S; пусть a — любой элемент $\in P_i$. Если $\chi(a) = 0$, то и $\chi(P_i) = 0$.*[5])

Доказательство. Так как полугруппа S конечна, то найдется такое $\varrho \geqq 1$, что $a^\varrho = e_i$. Значит $\chi(e_i) = [\chi(a)]^\varrho = 0$. Пусть b будет теперь произвольный элемент $\in P_i$. Следовательно, найдется опять натуральное число $\tau \geqq 1$, такое, что $b^\tau = e_i$. Отсюда $[\chi(b)]^\tau = \chi(e_i) = 0$, т. е. $\chi(b) = 0$, ч. т. д. Из леммы 3 и леммы 8 вытекает:

Лемма 9. *Пусть χ — произвольный характер. В разложении полугруппы из леммы 3: $S = J + (S - J)$ являются и простой идеал J и полугруппа $S - J$ суммой определенного числа максимальных полугрупп P_i из S.*

Если существует нулевой элемент z, то всегда $P_z \subseteqq J$. В общем случае может быть, конечно, одно из слагаемых J или $S - J$ и пустым множеством.

Теперь займемся исследованием всевозможных идемпотентов множества S^*, т. е. всевозможных идемпотентных характеров данной полугруппы.

Пусть S состоит из элементов $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Пусть χ — фиксированный характер. Тогда $\chi(a_1) = c_1$, $\chi(a_2) = c_2, \ldots, \chi(a_n) = c_n$, где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ либо нули, либо корни из единицы. Для того, чтобы χ был идемпотентным характером, необходимо, чтобы выполнялись равенства $c_1^2 = c_1$, $c_2^2 = c_2, \ldots, c_n^2 = c_n$. Этому условию можно удовлетворить лишь в том случае, когда числа c_i или нули или единицы.

По лемме 3 может любой характер принимать нулевые значения только на простом идеале J из S. Единственные возможные идемпотентные характеры даны поэтому соотношением

$$\chi(a) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad a \in J, \\ 1 & \text{для} \quad a \in S - J, \end{cases} \tag{4}$$

где J_1 — какой-то простой идеал.

Ясно, что и обратно: функция, определенная соотношением (4) является характером полугруппы S; J есть произвольный простой идеал полугруппы S.

Идемпотентный характер, равный нулю точно[6]) на J, будем обозначать через ε_J. По определению $\varepsilon_J^2 = \varepsilon_J$. Далее видно: если $J = \emptyset$, то $\varepsilon_J = \chi_1$, если $J = S$, то $\varepsilon_J = \chi_0$.

Полученные результаты сформулируем в лемму:

Лемма 10. *Всякий идемпотентный характер ε_J полугруппы S можно получить следующим образом: взяв произвольный простой идеал J из S, положим*

$$\varepsilon_J(a) = \begin{cases} 0 & \textit{для } a \in J, \\ 1 & \textit{для } a \in S - J\,. \end{cases}$$

[6]) Т. е. равный нулю на J и отличный от нуля на $S - J$.

[5]) Символ $\chi(P_i) = 0$ означает, что для каждого $b \in P_i$, $\chi(b) = 0$.

Следствие: Существует ровно столько идемпотентных характеров полугруппы S^*, сколько существует в S простых идеалов. Далее: число нетривиальных идемпотентных характеров полугруппы S (т. е. $\neq \chi_0$ и $\neq \chi_1$) равно в точности числу нетривиальных простых идеалов в S (т. е. $\neq \emptyset$, $\neq S$).

Замечание. Существуют, конечно, полугруппы, которые кроме $\emptyset$ и S не имеют никаких других простых идеалов. Пусть дана, например, циклическая полугруппа

$$S = \{a, a^2, a^3, \ldots, a^6, a^7\} ,$$

где $a^8 = a^5$. Эта полугруппа не имеет других идеалов, кроме

$$S \supset \{a^2, \ldots, a^7\} \supset \{a^3, \ldots, a^7\} \supset \{a^4, \ldots, a^7\} \supset \{a^5, a^6, a^7\} \supset \emptyset \,. \text{ [6a]}$$

Существует единственная максимальная группа (множество $\{a^5, a^6, a^7\}$), имеющая в качестче единицы элемент a^6. Ни один из этих идеалов, за исключением S и $\emptyset$, не является простым идеалом. Следовательно, существуют только тривиальные идемпотентные характеры χ_0 и χ_1.

Очевидно, что это утверждение справедливо вообще для каждой циклической полугруппы.

Это, конечно, не значит, что полугруппа S не имеет другых характера. Наоборот наща полугруппа имеет следующие характеры (ϱ — корень третьей степени из единицы):

	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7
χ_0	0	0	0	0	0	0	0
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	ϱ^2	ϱ	1	ϱ^2	ϱ	1	ϱ^2
χ_3	ϱ	ϱ^2	1	ϱ	ϱ^2	1	ϱ .

Дальнейшие рассуждения покажут, что это уже все характеры данной полугруппы S.

„Практическое" нахождение простых идеалов из S значительно облегчает следующая лемма:

Лемма 11. *Пусть E — множество всех идемпотентов из S. Пусть E_1 есть простой идеал из E. Тогда соединение максимальных полугрупп из S, принадлежащих к идемпотентам из E_1, образует простой идеал в S. Наоборот, каждый простой идеал в S можно получить таким способом.*

Доказательство. а) Пусть

$$E_1 = \{e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, \ldots\}, \quad E - E_1 = \{e'_\xi, e'_\eta, e'_\zeta, \ldots\} \,.$$

Максимальные полугруппы, принадлежащие к $e_\alpha, \ldots, e'_\xi, \ldots$, обозначим соответственно через $P_\alpha, \ldots, P'_\xi, \ldots$

[6a]) Знак $\subset$ (в отличие от знака $\subseteq$) обозначает во всей работе собственное подмножество.

Положим

$$J = P_\alpha + P_\beta + P_\gamma + \ldots, \quad S - J = P'_\xi + P'_\eta + P'_\zeta + \ldots$$

Прежде всего покажем, что J является идеалом в S. Пусть $a \in J$, значит, например $a \in P_\alpha$. Требуется доказать, что для каждого $s \in S$, $sa \in J$. Для этого достаточно показать, что sa принадлежит к некоторому идемпотенту $\in E_1$. По предположению существует число $\varrho \geqq 1$ такое, что $s^\varrho = e_\nu$, где $e_\nu \in E$. Далее найдется $\sigma \geqq 1$ такое, что $a^\sigma = e_\alpha$. Значит, $(as)^{\varrho\sigma} = e_\nu e_\alpha$. Так как E_1 есть идеал из E, то $e_\nu e_\alpha \in EE_1 \subseteqq E_1$, ч. т. д.

Далее покажем, что $S - J$ есть полугруппа, т. е. что J есть простой идеал. Пусть $a \in S - J$, $b \in S - J$. Нам нужно доказать, что $ab \in S - J$. Это будет доказано, если покажем, что ab принадлежит к некоторому идемпотенту $\in S - J$. По предположению для определенных целых $\varrho \geqq 1$, $\sigma \geqq 1$, справедливо $a^\varrho = e'_\xi \in E - E_1$, $b^\sigma = e'_\eta \in E - E_1$. Следовательно, $(ab)^{\varrho\sigma} = e'_\xi e'_\eta$. Но $E - E_1$ — полугруппа, следовательно $e'_\xi e'_\eta \in E - E_1$. Это значит, что элемент ab принадлежит к идемпотенту $e'_\xi e'_\eta \in E - E_1$, ч. т. д.

б) Обратно, можно доказать следующее: пусть J — какой — нибудь из простых идеалов полугруппы S. Пусть E_1 — множество всех идемпотентов из J. Тогда E_1 является простым идеалом в E. Отсюда следует, что каждый простой идеал J из S можно образовать при помощи конструкции, указанной в пункте а).

Так как $E_1 \subseteqq J$, то $EE_1 \subseteqq SE_1 \subseteqq SJ \subseteqq J$. Так как EE_1 состоит только из идемпотентов, то $EE_1 \subseteqq E_1$. Следовательно, E_1 является идеалом в E.

Пусть далее $e'_\xi \in E - E_1 \subseteqq S - J$, $e'_\eta \in E - E_1 \subseteqq S - J$. Так как $S - J$ есть полугруппа, то $e'_\xi e'_\eta \in S - J$. Так как $e'_\xi e'_\eta$ есть идемпотент, то $e'_\xi e'_\eta \in E - E_1$, следовательно, $E - E_1$ есть также полугруппа. Поэтому E_1 является даже простым идеалом в E, ч. т. д.

Теорема 1. *Пусть J — простой идеал из S. Множество характеров, которые равны нулю точно на J, образует группу, единичным элементом которой является ε_J.*

Доказательство. Данное множество характеров обозначим через G_J^*. Множество G_J^* есть полугруппа, ибо, если χ_1, χ_2, — два характера, равные нулю точно на J, то и характер $\chi_1\chi_2$ будет обладать тем же свойством. Далее, ε_J содержится в G_J^* и является, очевидно, единицей в G_J^*. В силу леммы 10 множество G_J^* не содержит никаких других идемпотентов. Наконец, если $\chi \in G_J^*$, то в G_J^* содержится и $\bar{\chi}$ и $\chi\bar{\chi} = \varepsilon_J$. Это значит, что к каждому элементу $\in G_J^*$ существует в G_J^* обратный элемент. Значит, G_J^* есть группа.

Замечание. Легко видно, что при условии $J = S$, G_J^* равно нулевому характеру χ_0. Следовательно, G_J^* есть группа, состоящая лишь из одного элемента.

Если $J = \emptyset$ и полугруппа S содержит нуль, то G_J^* (ввиду замечания, помещенного за определением 1) есть также группа, содержащая только один элемент, а именно χ_1.

Если $J = \emptyset$, но полугруппа S не содержит нуля, то группа G_J^* может содержать более одного элемента. (Смотри, например, пример в замечании перед леммой 11.)

Из теоремы 1 как следствие вытекает:

Теорема 2. *Множество S^* есть полугруппа, которую можно представить в виде соединения дизъюнктных групп.*

Доказательство. Каждый характер $\chi \in S^*$ равен нулю на каком-то простом идеале J. По теореме 1 характеры, равные нулю точно на простом идеале J, образуют группу G_J^*. Следовательно, каждый элемент из $\in S^*$ содержится в какой-то группе, являющейся, конечно, подмножеством S^*. Если $J \neq J'$, то очевидно $G_{J'}^* \cap G_J^* = \emptyset$. (Не существует характера, который равнялся бы нулю точно на J и одновременно точно на J'.) Этим теорема доказана.

В дальнейшем будем часто пользоваться записью $S^* = \sum\limits_J G_J^*$. Группы G_J^* будем называть групповыми *компонентами* полугруппы S^*.

Пусть P — частичная полугруппа из S такая, что $P = S - J$, где J есть простой идеал. Каждый из характеров полугруппы S порождает на P определенный характер полугруппы P. Множество всех характеров полугруппы P обозначим через $[P]^*$. Если J_1 пробегает все простые идеалы из P, можем написать $[P]^* = \sum\limits_{J_1} H_{J_1}^*$, где $H_{J_1}^*$ — все групповые компоненты $[P]^*$.

Покажем, что всякий характер ψ полугруппы P можно естетственным способом дополнить (нулями) так, что он будет характером всей полугруппы S. По выше доказанным теоремам каждый характер полугруппы P можно найти следующим образом: выберем сначала какой-нибудь простой идеал J_1 из P. Потом множество характеров полугруппы P, равных нулю точно на J_1, образует группу $H_{J_1}^*$.

Теперь докажем, что множество $J + J_1$ есть простой идеал из S. Прежде всего $S - (J + J_1) = P - J_1$ является полугруппой. Далее

$$S(J + J_1) = SJ + SJ_1 \subseteqq J + (P + J)\, J_1 \subseteqq J + PJ_1 + JJ_1 \subseteqq J + J_1 + \\ + J = J + J_1 .$$

Поэтому $J + J_1$ есть идеал (следовательно, и простой идеал) из S.

Каждому характеру $\psi \in [P]^*$ поставим в соответствие характер $\chi \in S^*$, положив

$$\chi(a) = \begin{cases} \psi(a) & \text{для } a \in P , \\ 0 & \text{для } a \in S - P = J . \end{cases}$$

Если $\psi(a)$ равно нулю точно на J_1, то $\chi(a)$ равно нулю точно на $J + J_1$.

Таким образом группе $H^*_{J_1}$ поставлена в соответствие группа $G^*_{J+J_1}$. Это соответствие является, очевидно, одно-однозначным. Этим доказана:

Теорема 3. *Пусть P — частичная полугруппа полугруппы S такая, что $S - P$ есть (простой) идеал из S. Тогда полугруппа характеров $[P]^*$ изоморфна определенной частичной полугруппе из S^*, причем групповые компоненты полугруппы $[P]^*$ изоморфны некоторым групповым компонентам полугруппы S^*.*

Это значит: если знаем полугруппу S^*, то мы в сущности знаем и полугруппу $[P]^*$, соответствующую всякой полугруппе P вида $P = S - J$, где J — простой идеал из S.

Необходимо особо отметить, что теорема 3 не должна быть верной для каждой полугруппы $Q \subset S$ (т. е. такой, которую нельзя представить в виде $S - J$). Конечно, всякий раз $[Q]^*$ есть соединение дизьюнктных групп, но групповые компоненты полугруппы $[Q]^*$ не должны быть изоморфны групповым компонентам полугруппы S^*.

II.

Будем теперь заниматься исследованием строения множества S^*. Сначала введем одно вспомогательное понятие. Коммутативную полугруппу E, каждый элемент которой идемпотентен, называем полуструктурой. (Смотри например, Биркгоф [4], стр. 39). В такой полугруппе можно ввести частичное упорядочение, а именно: положим $\alpha \leqq \beta$, если $\alpha\beta = \alpha$.

Если $\alpha = \beta\gamma$, то $\alpha \leqq \beta$, $\alpha \leqq \gamma$. Деиствительно $\alpha = \beta\gamma \to \alpha\beta = \beta^2\gamma = \beta\gamma$. Следовательно, $\alpha = \alpha\beta$, т. е. $\alpha \leqq \beta$. Аналогично $\alpha = \beta\gamma \to \alpha\gamma = \beta\gamma^2 = \beta\gamma$, т. е. $\alpha = \alpha\gamma$, т. е. $\alpha \leqq \gamma$. В упорядоченном таким образом множестве можно к каждым двумя элементам α, β построить их пересечение: $\alpha \wedge \beta = \alpha \,.\, \beta$. (Соединение $\alpha \vee \beta$ может, конечно, и не существовать.)

Если E конечно, то в этой полуструктуре сущесвтует элемент n (называемый „нулем“ полуструктуры), который для каждого $x \in E$ удовлетворяет соотношению $n \leqq x$. Если $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ — элементы полуструктуры, то очевидно, что элемент $n = \alpha \,.\, \beta \ldots \nu$ есть нуль полуструктуры E.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства полуструктуры E, состаящей из всех идемпотентов полугруппы S.[7]) Пусть ее элементами будут

$$E = \{e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, \ldots\}\,.$$

Лемма 12. *Пусть $e_\alpha \geqq e_\beta$ — два идемпотента из S. Пусть P_α, P_β и G_α, G_β максимальные полугруппы, соответственно, группы, принадлежащие к e_α и e_β. Пусть $a \in P_\alpha$. Тогда отображение*

[7]) Если полугруппа S имеет единицу, то эта полуструктура является структурой. (Подробное доказательство этого утверждения дается в лемме 21.)

$$a \to ae_\beta \tag{5}$$

есть гомоморфное отображение полугруппы P_α в группу G_β.

Доказательство: Прежде всего покажем, что элемент ae_β содержится в G_β. По предположению $a \in P_\alpha$; следовательно, существует целое $\varrho \geqq 1$ такое, что $a^\varrho = e_\alpha$. Далее $(ae_\beta)^\varrho = a^\varrho \,.\, e_\beta^\varrho = e_\alpha e_\beta = e_\beta$. Значит, элемент ae_β есть элемент, принадлежащий к идемпотенту e_β, т. е. содержится в P_β.

Элементы $x \in P_\beta$, содержащиеся в G_β, характеризуются тем, что для них выполняется $xe_\beta = x$. (Смотри замечание перед леммой 7.) Элемент ae_β удовлетворяет равенству $ae_\beta \,.\, e_\beta = ae_\beta$. Следовательно, $ae_\beta \in G_\beta$, т. е. $P_\alpha e_\beta \subseteqq G_\beta$.

Отображение (5) есть гомоморфизм, ибо для $a, b \in P_\alpha$ $a \to ae_\beta$, $b \to be_\beta$ влечет за собой $ab \to abe_\beta = ae_\beta \,.\, be_\beta$. Значит, помимо этого, $P_\alpha e_\beta$ есть полугруппа, содержащая элемент e_β в качестче единицы.

Наконец, множество $P_\alpha e_\beta$ есть группа (подгруппа G_β), так как если для некоторого $\tau \geqq 1$ $(ae_\beta)^\tau = e_\beta$, то $(ae_\beta)^{\tau-1} \in P_\alpha e_\beta$ есть обратный элемент к элементу $ae_\beta \in P_\alpha e_\beta$. Этим лемма доказана.

Замечание. Легко доказать, что уже $G_\alpha e_\beta = P_\alpha e_\beta$. Очевидно, что $G_\alpha e_\beta \subseteqq P_\alpha e_\beta$. Обратно: каждый элемент $\in P_\alpha e_\beta$ может быть записан в виде ae_β, $a \in P_\alpha$. Но $ae_\beta = ae_\alpha \,.\, e_\beta$. Так как ae_α лежит в G_α, то ae_β содержится в $G_\alpha e_\beta$, значит $P_\alpha e_\beta \subseteqq G_\alpha e_\beta$, ч. т. д.

Теорема 4. *Пусть J — простой идеал, $J \neq S$. Пусть e — наименьший элемент полуструктуры идемпотентов из $S - J$. Тогда группа характеров G_J^* изоморфна группе G_e, где G_e — максимальная группа, принадлежащая к идемпотенту e.*

Доказательство. Можно писать $S = J + P$, где J — простой идеал, $P \neq \emptyset$. Полугруппа P может быть представлена в виде суммы определенного числа максимальных полугрупп

$$P = P_\alpha + P_\beta + \ldots + P_\mu.$$

Соответсвующие идемпотенты обозначим через $e_\alpha, e_\beta, \ldots e_\mu$. В полуструктуре идемпотентов из $S - J$ $e = e_\alpha \,.\, e_\beta \ldots e_\mu$ есть наименьший элемент.

По лемме 12 $Pe = (P_\alpha + P_\beta + \ldots + P_\mu)\, e$ есть множестчо, лежащее в G_e, и потому что одно из слагаемых есть P_e, то даже $P \,.\, e = G_e$.

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_g$ — все взаимно различные элементы группы G_e. Пусть A_i $(i = 1, 2, \ldots, g)$ — множество тех элементов $a \in P$, для которых $ae = b_i$. Следовательно, имеет место разложение P в сумму дизьюнктных слагаемых

$$P = A_1 + A_2 + \ldots + A_g\ ,$$

причем всякий раз $A_i e = b_i$. Ни одно из множеств A_i не является пустым, ибо в A_i содержится по крайней мере элемент b_i.

Если χ — произвольный характер, равный нулю точно на J, то для каждого $a_i \in A_i$

$$a_i e = b_i ,$$
$$\chi(a_i) . \chi(e) = \chi(b_i) ,$$

и так как (по лемме 4) $\chi(e) = 1$, то

$$\chi(a_i) = \chi(b_i) ,$$

откуда $\chi(A_i) = \chi(b_i)$. Значит, каждый характер $\in G_J^*$ на всем множестве A_i необходимо принимает одно и то же значение, а именно $\chi(b_i)$.

Итак, если два характера, которые равны нулю точно на J, принимают на G_e те же значения, то они необходимо принимают те же значения на всей полугруппе $S - J$ и, следовательно, на всей полугруппе S. Значит, в группе G_J^* существует *не больше* характеров, чем сколько характеров имеет группа G_e, т. е. g.

Что таких характеров будет равно g и что группа G_J^* следовательно изоморфна группе G_e, докажем следующим образом: пусть ψ — произвольный (ненулевой) характер группы G_e. Определим следующим образом комплексную функцию $\varphi(a)$ на S:

$$\varphi(a) = \begin{cases} 0 & \text{для } a \in J , \\ \psi(ae) & \text{для } a \in S - J . \end{cases}$$

Функция $\varphi(a)$ обладает следующим свойством: если $a \in S - J$, $b \in S - J$, то

$$\varphi(ab) = \psi(abe) = \psi(ae) . \psi(be) = \varphi(a) . \varphi(b) .$$

Следовательно, $\varphi(x)$ является характером полугруппы S. Таким образом, для двух различных характеров $\psi(x)$ группы G_e получаем два различных характера $\varphi(x)$ для полугруппы S (потому что они принимают различные значения по крайней мере для одного элемента $\in G_e$). Так как на место $\psi(x)$ можно подставить любой характер группы G_e, то очевидно $G_J^* \cong G_e$. Этим теорема доказана.

Замечание. Если $J = \emptyset$, то G_J^* очевидно изоморфна G_e, где e — наименьший идемпотент всей полугруппы S. Если S имеет нуль z, то $e = z$, откуда $G_J^* \cong \{z\}$, где $\{z\}$ — группа, состоящая из одного элемента. В этом случае G_J^* есть просто-напросто единичный характер χ_1. В теореме 4 мы предполагали $J \neq S$. Для $J = S$ (как мы заметили уже выше) G_J^* есть нулевой характер χ_0.

Следствие 1. Полугруппу S^* можно записать в виде суммы дизъюнктных групп, из которых каждая изоморфна некоторой максимальной группе данной полугруппы S.

Это следствие позже существенным образом усилим (см. теорему 6).

Следствие 2. Пусть S — полугруппа, содержащая единственный идемпотент e. Пусть G — максимальная группа полугруппы S. Тогда множество ненулевых характеров полугруппы S образует группу, причем $S^*_{-}\chi_0 \cong G$.

Замечание. В частности, следствие 2 справедливо также для случая циклических полугрупп. Отсюда, например, следует что характеры из примера за леммой 10 будут уже все характеры рассматриваемой там полугруппы.

На примере циклической полугруппы можно элементарным способом показать, что соответствие между данной полугруппой и полугруппой ее характеров далеко не однозначно. Это ясно из следующий теоремы:

Пусть G — произвольная конечная циклическая группа. Существует бесконечно много циклических полугрупп, группой ненулевых характеров которых является группа G.

Доказательство. Пусть G имеет порядок g. Построим полугруппу

$$S = \{a, a^2, \ldots, a^s, a^{s+1}, \ldots, a^{s+g}\}\ .$$

которая состоит из $s + g$ элементов, причем $a^{s+1} = a^{s+g+1}$, и a^{s+1} есть первый элемент среди степеней элемента a, который повторяется. Полугруппа S этим определена однозначно. При различных $s \geqq 0$ получаем различные полугруппы. Каждая из этих полугрупп имеет (в силу наших теорем) группу ненулевых характеров, которая изоморфна группе G.

III.

Изложенная здесь теория позволяет нам указать непосредственно конструктивный метод для нахождения всех характеров данной полугруппы. Этот процесс нахождения последних заключается в следующем:

а) Найдем множество всех идемпотентов E.

б) Найдем все простые идеалы в E, а затем по лемме 11 все простые идеалы в S.

в) К каждому простому идеалу J из S, $J \neq S$, найдем наименьший идемпотент e из полугруппы $S - J$ и соответствующую максимальную группу $G_e \subseteqq S$; простому идеалу $J = S$ поставим в соответствие нулевой характер χ_0.

г) Найдем множества $A_1, A_2, \ldots, A_g$.

Если характеры группы G_e будем считать известными, то задача уже решена.

Применение найденных результатов проиллюстрируем на одном примере.

Требуется найти все характеры мультипликативной полугруппы вычетов (mod 12)!

Элементы нашей полугруппы обозначим через $S = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{11}\}$.

Идемпотенты данной полугруппы — это элементы $E = \{t_0, t_1, t_4, t_9\}$. Мультипликативная таблица идемпотентов имеет вид:

	t_0	t_1	t_4	t_9
t_0	t_0	t_0	t_0	t_0
t_1	t_0	t_1	t_4	t_9
t_4	t_0	t_4	t_4	t_0
t_9	t_0	t_9	t_0	t_9 .

Полуструктура идемпотентов изображена на следующем графике (в данном случае она является даже структурой).

$$\begin{tikzcd} & t_1 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ t_4 \arrow[dr, dash] & & t_9 \arrow[dl, dash] \\ & t_0 & \end{tikzcd}$$

Максимальные полугруппы следующие:

$$P_0 = \{t_0, t_6\}\,, \quad P_1 = \{t_1, t_5, t_7, t_{11}\}\,, \quad P_4 = \{t_4, t_8, t_2, t_{10}\}\,,$$
$$P_9 = \{t_9, t_3\}\,.$$

Максимальные группы следующие:

$$G_0 = \{t_0\}\,, \quad G_1 = \{t_1, t_5, t_7, t_{11}\}\,, \quad G_4 = \{t_4, t_8\}\,, \quad G_9 = \{t_9, t_3\}\,.$$

Простые идеалы из E имеют вид:

$$i' = \{t_0, t_9\}\,, \quad i'' = \{t_0, t_4\}\,, \quad i''' = \{t_0, t_4, t_9\}\,.$$

Следовательно, простые идеалы из S (кроме S и $\emptyset$) имеют вид:

$$J' = \{t_0, t_6, t_3, t_9\}\,,$$
$$J'' = \{t_0, t_6, t_4, t_8, t_2, t_{10}\}\,,$$
$$J''' = \{t_0, t_6, t_3, t_9, t_4, t_8, t_2, t_{10}\}\,.$$

Соответствующие дополнительные полугруппы имеют вид

$$P' = \{t_1, t_2, t_4, t_5, t_7, t_8, t_{10}, t_{11}\}\,,$$
$$P'' = \{t_1, t_3, t_5, t_7, t_9, t_{11}\}\,,$$
$$P''' = \{t_1, t_5, t_7, t_{11}\}\,.$$

Следовательно $S = P' + J' = P'' + J'' = P''' + J'''$.

а) Полугруппа P' имеет два идемпотента $t_4 \leqq t_1$, причем $P' \,.\, t_4 = \{t_4, t_8\}$. Множества A_1', A_2' определяются соотношениями $A_1' \,.\, t_4 = \{t_4\}$, $A_2' \,.\, t_4 = \{t_8\}$. Имеем

$$A_1' = \{t_1, t_4, t_7, t_{10}\}\,, \quad A_2' = \{t_2, t_5, t_8, t_{11}\}\,;$$

это дает нам характеры

	J'	A_2'	A_1'
χ_2	0	1	1
χ_3	0	-1	1 .

б) P'' имеет также два идемпотента $t_9 \leqq t_1$, причем $P'' . t_9 = \{t_3, t_9\}$. Множества A_1'', A_2'' даны соотношениями $A_2''t_9 = t_3$, $A_1''t_9 = t_9$. Имеем $A_1'' = \{t_1, t_9, t_5\}$, $A_2'' = \{t_3, t_7, t_{11}\}$. Это дает характеры

	J''	A_2''	A_1''
χ_4	0	1	1
χ_5	0	—1	1 .

в) P''' есть группа с идемпотентом t_1 и $P''' . t_1 = \{t_1, t_5, t_7, t_{11}\}$. Множества A_i''' $(i = 1, 2, 3, 4)$ определены соотношениями $A_1'''t_1 = t_1$, $A_2'''t_1 = t_5$, $A_3'''t_1 = t_7$, $A_4'''t_1 = t_{11}$. Следовательно, $A_1''' = t_1$, $A_2''' = t_5$, $A_3''' = t_7$, $A_4''' = t_{11}$. Это дает характеры

	J	A_2'''	A_3'''	A_4'''	A_1'''
χ_6	0	1	1	1	1
χ_7	0	—1	—1	1	1
χ_8	0	—1	1	—1	1
χ_9	0	1	—1	—1	1 .

Все характеры (включая нулевой и единичный) помещены в следующей таблице:

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}
χ_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
χ_3	0	1	—1	0	1	—1	0	1	—1	0	1	—1
χ_4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
χ_5	0	1	0	—1	0	1	0	—1	0	1	0	—1
χ_6	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
χ_7	0	1	0	0	0	—1	0	—1	0	0	0	1
χ_8	0	1	0	0	0	1	0	—1	0	0	0	—1
χ_9	0	1	0	0	0	—1	0	1	0	0	0	—1 .

IV.

Целью этой части является доказательство теоремы 6.

Лемма 13. *Если в простом идеале J содержится идемпотент α, то в J содержится также всякий идемпотент $\leqq \alpha$.*

Доказательство. Идемпотент β будет $\leqq \alpha$, если $\beta = \beta\alpha$. Множество J есть идеал, следовательно, если $\alpha \in J$, то и $S\alpha$ лежит в J. Тем более в J лежит элемент $\gamma\alpha$, где γ — любой идемпотент $\in S$. Следовательно, если вообще существует идемпотент β, обладающий свойством $\beta = \beta\alpha$, то он будет содержаться в J, ч. т. д.

В теореме 1 мы поставим в соответствие каждому простому идеалу J

определенную группу характеров G_J^*. В теореме 4 мы доказали, что если $J \neq S$, то $G_J^* \cong G_e$, где e — наименьший идемпотент $\epsilon\, S - J$. Поставив в соответствие каждому простому идеалу $J \neq S$ упомянутую группу G_e, скажем, что группа G_e соответствует простому идеалу J, и напишем

$$J \to G_e\,. \tag{6}$$

Лемма 14. *Двум различным простым идеалам из S в соответствии* (6) *соответствуют две различные максимальные группы из S.*

Доказательство. От противного. Пусть J_1 и J_2 — два различных простых идеала. Предположим, что им обеим соответствует одна и та же группа G_e. Это значит: в полуструктуре идемпотентов из $S - J_1$ и идемпотентов из $S - J_2$, e есть наименьший элемент.

Так как $J_1 \neq J_2$, то (по лемме 9) существует хоть одна максимальная полугруппа и, следовательно, хоть один идемпотент, который не содержится в $J_1 \cap J_2$, но содержится в одном из них.

Пусть e_1 идемпотент, обладающий этим свойством. Не умаляя общности, можно предполагать, что e_1 содержится в J_1 и не содержится в J_2. (В случае $J_2 \supset J_1$ наши рассуждения были бы аналогичны.)

Так как группа G_e в соответствии (6) поставлена в соответствие простому идеалу J_2, то e есть наименьший идемпотент $\epsilon\, S - J_2$. Далее: так как e_1 лежит в $S - J_2$, то в частности, $e \leqq e_1$. Потому что $e_1 \in J_1$, должно быть в силу леммы 13 также и $e \in J_1$. Следовательно, e non $\epsilon\, S - J_1$, и группа G_e не может в соответствии (6) соответствовать простому идеалу J_1. Это противоречит предположению.

По лемме 14 число простых идеалов полугруппы S отличных от S, не может превосходить числа всех существующих взаимно различных максимальных групп в S. По теореме 2 в полугруппе S^* существует *ровно* столько групповых компонент G_J^*, сколько существует простых идеалов в S. Следовательно, из предыдущих результатов вытекает: если не считать нулевого характера, то число групповых компонент полугруппы S^* не превосходит числа максимальных групп полугруппы S.[8])

Этот результат еще усилим в теореме 6. Для этого нам понадобится еще следующая лемма:

Лемма 15. *Пусть G_e — произвольная максимальная группа из S. Тогда существует один и только один простой идеал J из S, которому в соответствии* (6) *соответствует группа G_e.*

Доказательство. а) В лемме 14 мы доказали, что не может существовать больше одного простого идеала, обладающего этим свойством.

б) Пусть E — множество всех идемпотентов из S. Пусть дана группа G_e; e — единица группы G_e.

[8]) Или (что то же) числа групповых компонент множества S_0 регулярных элементов из S (смотри лемму 7).

Построим множество E_2 всех идемпотентов α из S, для которых $\alpha e = e$. Последние образуют, очевидно, полугруппу, ибо если $\alpha e = e$, $\beta e = e$, то также $\alpha\beta e = \alpha e = e$. ($E_2$ может содержать и все идемпотенты из S.)

Далее рассмотрим множество E_1 всех идемпотентов $\gamma \in S$, для которых $\gamma e \neq e$. (Может случиться, что это множество пусто, если e — наименьший идемпотент из S.) Множество E_1 является идеалом в множестве E всех идемпотентов из S. Пусть γ — такой идемпотент, что $\gamma e \neq e$. Утверждаю, что тогда для каждого $\delta \in E$, $\delta\gamma e \neq e$. Если бы для какого — нибудь $\delta \in E$ было $\delta\gamma e = e$, то было бы также $\gamma(\delta\gamma e) = e\gamma$, т. е. $\gamma\delta e = e\gamma$, откуда $e = e\gamma$, что противоречит предположению.

Потому что $E - E_1 = E_2$ есть полугруппа, то E_1 есть простой идеал в E.

По лемме 11 соединение максимальных полугрупп, принадлежащих к идемпотентам из E_1, является простым идеалом в S. Обозначим его через J. Множество $S - J$ есть полугруппа. Она не пуста, ибо содержит по крайней мере e. Одновременно, ввиду нашего построения, e есть наименьший идемпотент из $S - J$. Значит, J есть простой идеал, которому в соответствии (6) соответствует группа G_e. Этим лемма доказана.

Из леммы 14 и 15 вытекает

Теорема 5. *Число простых идеалов полугруппы S, отличных от S равно в точности числу максимальных групп полугруппы S.*

Учитывая остальные теоремы, получаем наконец:

Теорема 6. *Полугруппа S^* является соединением групп: $S^* = \sum_J G_J^*$. При этом число групп G_J^* в точности на единицу больше числа максимальных групп в S. Групповые компоненты G_J^*, соответствующие простым идеалам $J \neq S$, и максимальные полугруппы из S при подходящем упорядочении взаимно изоморфны. Групповая компонента G_S^* есть группа, содержащая лишь один элемент, а именно нулевой характер.*

Замечание 1. Нулевой характер не можем исключить из наших рассуждений, хотя казалось бы, что этим достигнем большей гармоничности результатов, ибо ненулевые характеры в общем случае *не образуют* полугруппу.

Замечание 2. Напишем разложение частичной полугруппы S_0, состоящей из регулярных элементов данной полугруппы S, в сумму максимальных групп:

$$S_0 = G_1 + G_2 + \ldots + G_s .$$

Разложение полугруппы S^* на (максимальные) группы пусть имеет вид

$$S^* = G_1^* + G_2^* + \ldots + G_s^* + G_{s+1}^* ,$$

где G_{s+1}^* — нулевой характер. Наши теоремы нам показывают, что при подходящем упорядочении $G_i^* \cong G_i$ ($i = 1, 2, \ldots, s$).

Но из этого никаким образом не следует, что полугруппы S_0 и $S^* - G_{s+1}^*$ взаимно изоморфны, даже в том случае, если $S^* - G_{s+1}^*$ есть полугруппа.

Что полугруппы S_0 и $S^* - G^*_{s+1}$ действительно не должны быть изоморфны, можно показать и на нашем рассмотреном выше примере $S = \{t_0, t_1, \ldots, \ldots, t_{11}\}$. Мультипликативная таблица характеров нашей полугруппы имеет вид:

	χ_0	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	χ_7	χ_8	χ_9
χ_0	χ_0	χ_0	χ_0	χ_0	χ_0	χ_0	χ_0	χ_0	χ_0	χ_0
χ_1	χ_0	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5	χ_6	χ_7	χ_8	χ_9
χ_2	χ_0	χ_2	χ_2	χ_3	χ_6	χ_8	χ_6	χ_7	χ_8	χ_9
χ_3	χ_0	χ_3	χ_3	χ_2	χ_9	χ_7	χ_9	χ_8	χ_7	χ_6
χ_4	χ_0	χ_4	χ_6	χ_9	χ_4	χ_5	χ_6	χ_7	χ_8	χ_9
χ_5	χ_0	χ_5	χ_8	χ_7	χ_5	χ_4	χ_8	χ_9	χ_6	χ_7
χ_6	χ_0	χ_6	χ_6	χ_9	χ_6	χ_8	χ_6	χ_7	χ_8	χ_9
χ_7	χ_0	χ_7	χ_7	χ_8	χ_7	χ_9	χ_7	χ_6	χ_9	χ_8
χ_8	χ_0	χ_8	χ_8	χ_7	χ_8	χ_9	χ_8	χ_7	χ_6	χ_7
χ_9	χ_0	χ_9	χ_9	χ_6	χ_9	χ_7	χ_9	χ_8	χ_7	χ_6.

Если бы было $S_0 \cong S^* - G^*_{s+1}$, то полугруппы идемпотентных элементов из S и $S^* - \{\chi_0\}$ должны были бы быть взаимно изоморфны. Таблица идемпотентов из S помещена в начале III-ьей части.

Таблица идемпотентов из S^*, если отбросить χ_0, будет иметь вид:

	χ_1	χ_2	χ_4	χ_6
χ_1	χ_1	χ_2	χ_4	χ_6
χ_2	χ_2	χ_2	χ_6	χ_6
χ_4	χ_4	χ_6	χ_4	χ_6
χ_6	χ_6	χ_6	χ_6	χ_6.

Эти две таблицы, действительно, изоморфны. Соответствие элементов должно быть такое, что $t_0 \longleftrightarrow \chi_6$, $t_1 \longleftrightarrow \chi_1$.[9])

Но $S_0 = G_0 + G_1 + G_4 + G_9$ и $S^* - \{\chi_0\}$ не могут быть изоморфными полугруппами, потому что t_0 есть нуль полугруппы S_0, в то время как χ_6 не является нулем полугруппы $S^* - \{\chi_0\}$.

V.

В этой части установим взаимные отношения между полугруппами S_0 и S^*.

По теореме 4 каждому простому идеалу $J \neq S$ соответствует определенный идемпотент $e \in S$. Обратно, в силу леммы 15 каждому e соответствует определенный простой идеал J. Это соответствие, которое одно-однозначно, будем обозначать через

$$J \longleftrightarrow e \,. \tag{A}$$

[9]) Существуют два изоморфизма: во-первых, $t_0 \longleftrightarrow \chi_6$, $t_1 \longleftrightarrow \chi_1$, $t_4 \longleftrightarrow \chi_2$, $t_9 \longleftrightarrow \chi_4$ и во-вторых, $t_0 \longleftrightarrow \chi_6$, $t_1 \longleftrightarrow \chi_1$, $t_4 \longleftrightarrow \chi_4$, $t_9 \longleftrightarrow \chi_2$

Далее по теореме 1 каждому простому идеалу J соответствует один и только один идемпотент ε_J полугруппы S^*. Это соответствие будем обозначать через

$$J \longleftrightarrow \varepsilon_J . \tag{B}$$

Множество идемпотентов $e \in S$ образует полуструктуру. Также и множество идемпотентов $\varepsilon_J \in S^*$ образует (относительно того же отношения $\leqq$) полуструктуру. Множество всех простых идеалов J из S является относительно включения частично упорядоченным множеством. В ниже следующих рассуждениях найдем, во — первых, более точное описание упомянутых трех частично упорядоченных множеств; во-вторых, взаимные отношения между ними.

Лемма 16. *Пусть J_1, J_2 — два простых идеала из S. Тогда и множество $J_1 + J_2$ является простым идеалом из S.*

Доказательство. Очевидно, что $J_1 + J_2$ — идеал в S. Если $J_1 + J_2 = S$, лемма справедлива ввиду определения 2а. Предположим поэтому, что $J_1 + J_2 \subset S$. Достаточно доказать, что $S - (J_1 + J_2)$ есть полугруппа. Пусть $a, b \in S - (J_1 + J_2)$. Так как $a \in S - J_1$, $b \in S - J_1$ и J_1 — простой идеал, то $ab \in S - J_1$. Аналогично докажем, что $ab \in S - J_2$. Следовательно, $ab \in S - (J_1 + J_2)$.

Лемма 17. *Пусть J_1 и J_2 — два простых идеала из S. Существует один и только один простой идеал J из S, который обладает следующими свойствами:*

а) $J \subseteqq J_1 \cap J_2$,

б) не существует простой идеал X, который удовлетворял бы условию $J \subset X \subset J_1 \cap J_2$.

Доказательство. Множество идеалов, удовлетворяющих условию а) не пусто, ибо в нем содержится по крайней мере простой идеал $\emptyset$.

Если $J_1 \cap J_2$ — простой идеал, достаточно положить $J = J_1 \cap J_2$.

Итак, будем предполагать, что $J_1 \cap J_2$ не является простым идеалом в S. Тогда (потому что речь идет о конечных полугруппах), очевидно, существует хоть один простой идеал, удовлетворяющий условиям а) и б). Что существует только один такой идеал, докажем от противного. Предположим, что существуют два различных простых идеала J' и J'', удовлетворяющие условиям а) и б), т. е. $J' \subset J_1 \cap J_2$, $J'' \subset J_1 \cap J_2$, но что не существуют простые идеалы X, Y такие, чтобы $J' \subset X \subset J_1 \cap J_2$, $J'' \subset Y \subset J_1 \cap J_2$. По лемме 16 $J' + J''$ есть простой идеал из S, причем $J' + J'' \subseteqq J_1 \cap J_2$. Если бы было $J' + J'' = J_1 \cap J_2$, мы пришли бы к противоречию с высказанным предположением, что $J_1 \cap J_2$ не является простым идеалом из S. Если бы было $J' + J'' \subset J_1 \cap J_2$, то было бы $J' \subset J' + J'' \subset J_1 \cap J_2$, но это противоречит предположению, что J' удовлетворяет условию б). Этим лемма доказана.

Частично упорядоченное множество простых идеалов (упорядоченное относительно включения) обладает, следовательно, тем свойством, что для каждой пары J_1, J_2 найдется один единственный наименьший простой идеал $\supseteqq J_1$ и $\supseteqq J_2$. Это, очевидно, простой идеал $J_1 + J_2$. Одновременно, ввиду леммы 17, каждой паре J_1, J_2 соответствует один единственный простой идеал J такой, что $J \subseteqq J_1$, $J \subseteqq J_2$. Следовательно, справедлива

Лемма 18. *Простые идеалы из S образуют структуру относительно включения.*

Замечание 1. Структурные операции $\wedge$, $\vee$ при этом, очевидно, определены соотношениями $J_1 \vee J_2 = J_1 + J_2$, $J_1 \wedge J_2 = J$, где J — наибольший простой идеал из S, содержащийся в $J_1 \cap J_2$.

Замечание 2. Если из множества всех простых идеалов исключить простой идеал S, получим, конечно, только полуструктуру. В дальнейшем нас будет главным образом интересовать именно эта полуструктура.

Лемма 19. *Пусть в соответствии* (A) $J_1 \longleftrightarrow e_1$, $J_2 \longleftrightarrow e_2$. *Тогда при условии* $J_1 \subset J_2$, *будет* $e_1 < e_2$ *и наоборот.*

Доказательство. По теореме 4 e_1 есть наименьший идемпотент из $S - J_1$ и e_2 — наименьший идемпотент из $S - J_2$. Так как $S - J_1 \supset S - J_2$, то, очевидно, будет $e_2 \geqq e_1$. Равенство $e_1 = e_2$ бы по лемме 14 влекло за собой $J_1 = J_2$. Поэтому $e_2 > e_1$.

Наоборот, пусть $e_1 < e_2$. По доказательству леммы 15 J_1 является суммой максимальных полугрупп, принадлежащих к идемпотентам γ, для которых $\gamma e_1 \neq e_1$. Идеал J_2 является соединением максимальных полугрупп, принадлежащих к идемпотентам γ, для которых $\gamma e_2 \neq e_2$.

Если для некоторого γ, $\gamma e_1 \neq e_1$, то также $\gamma e_2 \neq e_2$. Действительно, если бы было $\gamma e_2 = e_2$, то было бы и $\gamma e_2 e_1 = e_2 e_1$, т. е. $\gamma e_1 = e_1$, что противоречит предположению. Отсюда $J_1 \subseteqq J_2$. Но для элемента e_1 выполняется равенство $e_1 . e_1 = e_1$, однако $e_1 e_2 \neq e_2$. Значит, $e_1 \in J_2$, но e_1 non $\in J_1$. Поэтому $J_1 \subset J_2$. На этом завершается доказательство леммы 19.

Замечание. Если бы мы требовали только, чтобы $J_1 \subseteqq J_2$, было бы, очевидно, $e_1 \leqq e_2$ и наоборот.

Из взаимной однозначности соответствия простых идеалов $\neq S$ идемпотентам $\in S$ (смотри лемму 15), и из леммы 19 обыкновенным способом непосредственно получаем:

Лемма 20. *Полуструктура отличных от S простых идеалов полугруппы S и полуструктура идемпотентов $\in S$ взаимно изоморфны.*

Замечание 1. При этом, очевидно, соответствие $J_1 \longleftrightarrow e_1$, $J_2 \longleftrightarrow e_2$ влечет за собой $J_1 \wedge J_2 \longleftrightarrow e_1 e_2$.

Замечание 2. Покажем еще, что если не выполняется ни $J_1 \subseteqq J_2$, ни $J_2 \subseteqq J_1$, то необходимо выполняется $J = J_1 \wedge J_2 \subset J_1 \cap J_2$.

Прежде всего покажем, что в этом случае $e_1e_2 \in J_1 \cap J_2$. Нам известно, что e_1 — наименьший идемпотент $\in S - J_1$. Идемпотент e_2 не содержится в $S - J_1$, ибо в противном случае было бы $e_1 \leqq e_2$, откуда по лемме 19 следует $J_1 \subseteqq J_2$, что противоречит условию. Следовательно, $e_2 \in J_1$. Аналогично получим $e_1 \in J_2$. Так как $e_1e_2 \leqq e_1$, $e_1e_2 \leqq e_2$, то в силу леммы 13 e_1e_2 содержится и в J_1 и в J_2, значит, в $J_1 \cap J_2$.

Теперь приступим к доказательству нашего утверждения. Идеал J состоит из максимальных полугрупп, принадлежащих к тем и только тем идемпотентам α, для которых $\alpha e_1e_2 \neq e_1e_2$. Если идемпотент $\alpha \in S - J_1$, то $\alpha e_1 = e_1$, откуда $\alpha e_1 e_2 = e_1e_2$. Если идемпотент $\alpha \varepsilon S - J_2$, то $\alpha e_2 = e_2$, откуда $\alpha e_2 e_1 = e_2e_1$. Поэтому ни один элемент $\in S - (J_1 + J_2)$ не может содержаться в J, т. е. $J \subseteqq J_1 \cap J_2$. Также невозможно, чтобы $J = J_1 \cap J_2$, ибо в противном случае было бы — ввиду $e_1e_2 \in J_1 \cap J_2$ — также $e_1e_2 \in J$, что противоречит тому, что e_1e_2 есть наименьший идемпотент $\in S - J$. Поэтому всегда (при условии, что не имеет места ни $J_1 \subseteqq J_2$, ни $J_2 \subseteqq J_1$) $J \subset J_1 \cap J_2$.

Теперь приступим к более подробному изучению соответствия (B).

Множество идемпотентов E^* полугруппы S^* образует, во-первых, полуструктуру. Но в E^* содержится также единичный характер полугруппы S, т. е. χ_1, который обладает тем свойством, что для каждого ε_J, $\varepsilon_J \chi_1 = \varepsilon_J$. Следовательно, в этой полуструктуре существует наибольший элемент. Отсюда непосредственно вытекает, что E^* есть структура. Действительно, пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2$[10]) — два произвольных элемента $\in E^*$. Рассмотрим множество E_1^* всех элементов $\in E^*$, для которых выполняются равенства

$$\varepsilon_1 \xi = \varepsilon_1 , \quad \varepsilon_2 \xi = \varepsilon_2 . \tag{7}$$

Это множество не пусто, ибо в нем содержится по крайней мере χ_1. Если ξ и η удовлетворяют соотношениям (7), то также и $\xi\eta$ обладает этим свойством.[11]) Следовательно, E_1^* есть полугруппа. Наименьший элемент ε полуструктуры E_1^* (мы знаем, что он существует[12])) также удовлетворяет соотношениям (7) и является единственным и наименьшим идемпотентом, для которого $\varepsilon \geqq \varepsilon_1$, $\varepsilon \geqq \varepsilon_2$. Следовательно будет верной

Лемма 21. *Множество E^* идемпотентов полугруппы S^* образует (при нашем определении символа $\leqq$) структуру.*

Лемма 22. *Пусть в соответствии* (B) $J_1 \longleftrightarrow \varepsilon_1$, $J_2 \longleftrightarrow \varepsilon_2$. *Тогда, при условии $J_1 \subseteqq J_2$, имеет место $\varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2$ и наоборот.*

Доказательство. а) Пусть $J_1 \subseteqq J_2$. Характеры ε_1 и ε_2 даны следующим образом:

[10]) Мы изменили немного обозначение, а именно в том смысле, что здесь (и в дальнейшем) вместо ε_{J_K} пишем сокращенно ε_K.

[11]) Потому что $\varepsilon_1(\xi\eta) = (\varepsilon_1\xi)\,\eta = \varepsilon_1\eta = \varepsilon_1$ и аналогично $\varepsilon_2(\xi\eta) = \varepsilon_2$.

[12]) Он равен произведению всех элементов $\in E_1^*$.

$$\varepsilon_1(x) = \left\langle \begin{matrix} 0 & \text{для } x \in J_1\,, \\ 1 & \text{для } x \in S - J_1\,. \end{matrix} \right.$$

$$\varepsilon_2(x) = \left\langle \begin{matrix} 0 & \text{для } x \in J_2\,. \\ 1 & \text{для } x \in S - J_2\,. \end{matrix} \right.$$

Отсюда получаем для характера $\varepsilon_1\varepsilon_2(x)$

$$\varepsilon_1(x)\,\varepsilon_2(x) = \left\langle \begin{matrix} 0 & \text{для } x \in J_2\,, \\ 1 & \text{для } x \in S - J_2\,. \end{matrix} \right.$$

Следовательно $\varepsilon_1 \,.\, \varepsilon_2 = \varepsilon_2$, т. е. $\varepsilon_2 \leqq \varepsilon_1$.

б) Обратно, пусть $\varepsilon_2 \leqq \varepsilon_1$, т. е. $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2$. Пусть в соответствии (B) $\varepsilon_2 \longleftrightarrow J_2$, $\varepsilon_1 \longleftrightarrow J_1$. Простой идеал J_1 есть множество, состоящее из тех элементов $x \in S$, для которых $\varepsilon_1(x) = 0$, и только из этих элементов. Простой идеал J_2 есть множество тех $x \in S$, для которых $\varepsilon_2(x) = 0$. Так как $\varepsilon_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2$, то для каждого y такого, что $\varepsilon_1(y) = 0$, т. е. для каждого $y \in J_1$, необходимо выполняется

$$\varepsilon_2(y) = \varepsilon_1(y) \,.\, \varepsilon_2(y) = 0 \,.\, \varepsilon_2(y) = 0\,,$$

т. е. $y \in J_2$. Значит, $J_1 \subseteqq J_2$, ч. т. д.

Учитывая лемму 22 и одно-однозначность соответствия $J \longleftrightarrow \varepsilon_J$, получаем сразу же:

Лемма 23. *Структура простых идеалов из S и структура идемпотентных характеров E^* антиизоморфны.*

Замечание. Очевидно, что при условии $J_1 \longleftrightarrow \varepsilon_1$, $J_2 \longleftrightarrow \varepsilon_2$, имеет место $J_1 + J_2 \longleftrightarrow \varepsilon_1\varepsilon_2$. В соответствии (B) полугруппе S соответствует нулевой характер χ_0, откуда сразу вытекает: для того, чтобы полугруппа S^* содержала делители нуля, необходимо и достаточно, чтобы в S существовали два таких простых идеала $\neq S$, для которых $J_1 + J_2 = S$. Для того, *чтобы S^* не содержала делителей нуля, необходимо и достаточно: полуструктура S имеет лишь один максимальный простой идеал $\neq S$.* Не трудно доказать, что это условие будет выполняться всегда, когда S содержит единицу.

Наконец, из леммы 20 и 23 и из прежде доказанных теорем следуют две теоремы:

Теорема 7. *Частично упорядоченное множество ненулевых идемпотентов из S^* и полуструктура идемпотентов из S взаимно антиизоморфны.*

Теорема 8. *Если в антиизоморфизме, о котором идет речь в теореме 7, $\varepsilon_J \in S^* \longleftrightarrow e \in S$, то соответствующие группы G_J^* и G_e изоморфны.*

Теоремы 7 и 8 совместно с теоремами 4 и 6 описывают строение полугруппы S^* „в большом“ при помощи строения полугруппы S. Выражение „*в большом*“ означает: нам известно строение структуры идемпотентов из S^*, и мы точно знаем группы G_J^* из S^*, принадлежащие к отдельным идемпотентам $\varepsilon_J \in S^*$, которые вместе дают S^* (в смысле множественного объединения). Пока не знаем „*тонкого строения*" полугруппы S^*, так как не знаем способа нахождения произведения $G^*_{J_1} . G^*_{J_2}$, т. е. не знаем, как получить это произведение, зная группы G_{e_1}, G_{e_2} (если вообще, что либо подобное возможно).

Пример: В рассматриваемой выше полугруппе полуструктура идемпотентов с соответствующими максимальными группами имеет следующий график:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & G_1 = \{t_1, t_5, t_7, t_{11}\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ G_4 = \{t_4, t_8\} \arrow[dr, dash] & & G_3 = \{t_9, t_3\} \arrow[dl, dash] \\ & G_0 = \{t_0\}\ . & \end{tikzcd}$$

Чтобы получить структуру S^* „в большом", достаточно этот график перевернуть и внизу прибавить χ_0 (нулевой характер). Получаем:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & G^*_{\emptyset} = \{\chi_1\} \cong G_0 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ G^*_4 \cong G_4 \arrow[dr, dash] & & G^*_3 \cong G_3 \arrow[dl, dash] \\ & G^*_1 \cong G_1\ . \arrow[d, dash] & \\ & G^*_S = \{\chi_0\}\ . & \end{tikzcd}$$

Из таблицы за теоремой 6 нам известно, что

$$\begin{aligned} G^*_3 &= \{\chi_4, \chi_5\}\ , \\ G^*_4 &= \{\chi_2, \chi_3\}\ , \\ G^*_1 &= \{\chi_6, \chi_7, \chi_8, \chi_9\}\ . \end{aligned}$$

VI.

В этой части приступим, наконец, к исследованию „*тонкого строения*" полугруппы S^*.

Пусть G^*_ν, G^*_μ — две максимальные группы из S^*. Пусть ε_ν, ε_μ — соответствующие идемпотенты. Пусть $\xi \in G^*_\nu$, $\eta \in G^*_\mu$; тогда

$$\xi\eta = \xi\varepsilon_\nu \,.\, \eta\varepsilon_\mu = \xi\eta \,.\, \varepsilon_\nu\varepsilon_\mu\ .$$

Положим $\varepsilon_\nu\varepsilon_\mu = \varepsilon_\lambda$. Очевидно $\varepsilon_\lambda \leqq \varepsilon_\nu$, $\varepsilon_\lambda \leqq \varepsilon_\mu$. Далее

$$\xi \,.\, \eta = \xi\eta \,.\, \varepsilon_\lambda = \xi\varepsilon_\lambda \,.\, \eta\varepsilon_\lambda\ ,$$

откуда

$$G^*_\nu \,.\, G^*_\mu = G^*_\nu\varepsilon_\lambda \,.\, G^*_\mu\varepsilon_\lambda\ .$$

Отображение $\xi \in G^*_\nu \to \xi\varepsilon_\lambda \in G^*_\lambda$ является гомоморфным отображением G^*_ν на определенную подгруппу $G^*_\nu\varepsilon_\lambda$ группы G^*_λ.[13]) Аналогично и отображение

[13]) Это, например, следует непосредственно из леммы 12, если в ней на место S, P_α, P_β, e_α, e_β подставить последовательно S^*, G^*_ν, G^*_λ, ε_ν, ε_λ.

$\eta \in G_\lambda^* \to \eta\, \epsilon_\lambda \in G_\lambda^*$ является гомоморфным отображением G_μ^* на определенную подгруппу $G_\mu^* \varepsilon_\lambda$ группы G_λ^*.

Умножение групп G_μ^* и G_ν^* этим самым переведено *на умножение определенных подгрупп группы* G_λ^*, а именно групп $G_\nu^* \varepsilon_\lambda$, $G_\mu^* \varepsilon_\lambda$. Строение группы G_λ^* нам известно. Итак, будем знать также строение произведения, как только будем знать строение групп $G_\nu^* \varepsilon_\lambda$ и $G_\mu^* \varepsilon_\lambda$.

Значит строение полугруппы S^* будем знать в совершенстве, если для каждой пары идемпотентов $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ будем знать строение группы $G_2^* \varepsilon_1$.[14])

Точнее говоря, будем знать строение S^*, если будем знать, каким образом можно описать строение группы $G_2^* \varepsilon_1$ посредством строения максимальных групп G_1, G_2 данной полугруппы.

Обратимся теперь к этой проблеме. Нашей целью является доказательство нижепомещенной теоремы 9.

Пусть простые идеалы, принадлежащие к e_1 соответственно к e_2, будут J_1 соответственно J_2. Пусть $e_2 < e_1$, следовательно и $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, и $J_2 \subset J_1$.

Прежде всего ясно, что $G_2^* \varepsilon_1$ — характеры полугруппы S, равные нулю точно на J_1; значит, $G_2^* \varepsilon_1 \subseteqq G_1^*$. Множество характеров $G_2^* \varepsilon_1$ (как мы уже отметили) образует группу, которая является в силу только что сказанного, подгруппой G_1^*.

Каждый характер $\in G_2^* \varepsilon_1$ порождает на G_1 определенный характер группы G_1. Но поступая таким образом, получим, конечно, только некоторые характеры $\varphi(x)$ группы G_1 (следовательно, только некоторые характеры полугруппы S, отличные от нуля точно на $S - J_1$). Каждый характер $\varphi(x)$, порожденный таким образом на G_1 обладает тем свойством, что его можно продолжить на характер полугруппы S, отличный от нуля точно на $S - J_2 \supset S - J_1$. В качестве такого характера достаточно взять соответствующий характер из G_2^*.[15])

Теперь рассмотрим отображение

$$G_1 \to G_1 e_2 \subseteqq G_2 \, .$$

Это гомоморфное отображение группы G_1 на группу $G_1 e_2$. Пусть $b_0 = e_2$, $b_1, b_2, \ldots, b_{r-1}$ — все различные элементы группы $G_1 e_2$. Пусть B_0 — множество тех элементов $x \in G_1$, для которых $x e_2 = e_2$. Множество B_0 не пусто, ибо оно определенно содержит e_1. B_0, очевидно, является подгруппой группы G_1. По известным теоремам $G_1 \bmod B_0$ имеет точно r классов, так что можно писать

---

[14]) Рассуждения аналогичные только что проведенным, впервые применил *Клиффорд* в работе [3], но при решении совсем другой проблемы.

[15]) Т. е. такой характер $\chi_2 \in G_2^*$, который для $x \in G_1$ удовлетворяет тождеству $\chi_2 \varepsilon_1(x) \equiv \varphi(x)$.

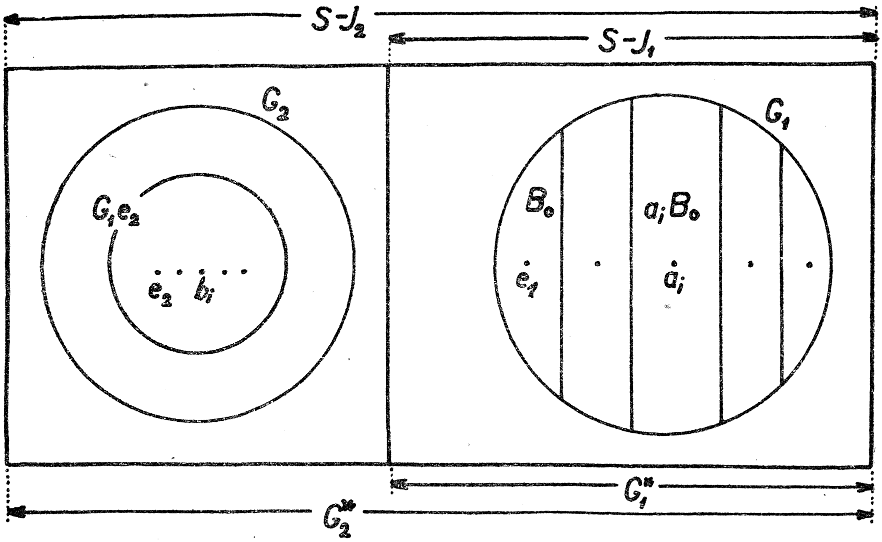
$$G_1 = a_0B_0 + a_1B_0 + a_2B_0 + \ldots + a_{r-1}B_0$$

($a_0 = e_1$, $a_i \in G_1$). При удобном обозначении можно достичь того, что

$$a_ie_2 = b_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, r - 1)\,.$$

При этом очевидно,

$$G_1e_2 \cong G_1/B_0\,.$$



Черт. 2.

Лемма 24. *Множество $G_2^*\varepsilon_1$ состоит из характеров $\chi \in G_1^*$, для которых $\chi(B_0) = 1$, и только из этих характеров.*

Доказательство. 1. Пусть χ_2 — произвольный характер $\in G_2^*$. Тогда учитывая равенство $B_0e_2 = e_2$, получаем

$$\chi_2(B_0e_2) = \chi_2(e_2)\,.$$

$$\chi_2(B_0)\,\chi_2(e_2) = \chi_2(e_2)\,,$$

так как $\chi_2(e_2) \neq 0$, то $\chi_2(B_0) = 1$. Потому что для всей полугруппы $S - J_1$ $\varepsilon_1(S - J_1) = 1$, то тем более $\varepsilon_1(B_0) = 1$, откуда $\chi_2\varepsilon_1(B_0) = 1$. Это значит: каждый характер $\in G_2^*\varepsilon_1$ обладает тем свойством, что на множестве B_0 принимает значение 1.

2. Наоборот, пусть χ_1 — произвольный характер $\in G_1^*$, для которого $\chi_1(B_0) = 1$. Покажем, что $\chi_1 \in G_2^*\varepsilon_1$.

Характер χ_1 порождает на группе G_1 какой-то частичный характер $\varphi(x)$. Для $x \in G_1$, $\varphi(x) = \chi_1(x)$, откуда для $\varphi(x)$ получаем

$$\varphi(a_iB_0) = \varphi(a_i)\,.\,\varphi(B_0) = \varphi(a_i)\,.$$

$\varphi(x)$ является, следовательно, характером фактор-группы G_1/B_0.

Группа G_1/B_0 изоморфна группе G_1e_2. Определим характер $\psi(x)$ группы G_1e_2 следующим образом:

$$\text{пусть } \psi(b_i) = \varphi(a_i) \quad \text{для} \quad b_i = a_ie_2 .$$

Функция $\psi(x)$, очевидно, является характером группы $G_1e_2 \subseteqq G_2$. Если $G_1e_2 = G_2$, то $\psi(x)$ есть характер всей группы G_2. Если $G_1e_2 \subset G_2$, то известно,[16]) что всегда существует продолженный характер $\psi'(x)$ всей группы G_2, обладающий тем свойством, что для $y \in G_1e_2$, $\psi'(y) = \psi(y)$.

Пусть $\psi'(x)$ — построенный таким образом характер всей группы G_2. Учитывая доказательство теоремы 4, можем построить характер $\chi_2 \in G_2^*$, который для $z \in G_2$, удовлетворяет уравнению $\chi_2(z) = \psi'(z)$. Значит, в частности, для $x \in G_1e_2$ $\psi'(x) = \psi(x) = \chi_2(x)$, откуда $\psi(b_i) = \chi_2(b_i)$. Ввиду определения $\psi(x)$ имеет место $\varphi(a_i) = \psi(b_i)$, следовательно $\varphi(a_i) = \chi_2(b_i)$. Для множества a_iB_0 имеет место

$$\chi_2(a_iB_0) = \chi_2(b_i) = \varphi(a_i) = \varphi(a_iB_0) .$$

Следовательно, характер $\chi_2(x)$ принимает на G_1 те же значения, что и характер $\varphi(x)$, т. е. те же, что и характер $\chi_1(x)$.

Характер $\chi_2(x)\,\varepsilon_1 \in G_2^*\varepsilon_1 \subseteqq G_1^*$ отличен от нуля точно на полугруппе $S - J_1$ и на группе G_1 принимает те же значения, что и характер $\chi_1(x)$. Отсюда, ввиду доказательства теоремы 4, $\chi_1(x) = \chi_2(x)\,.\,\varepsilon_1$, т. е. $\chi_1(x) \in G_2^*\varepsilon_1$. Этим лемма 24 доказана.

Теорема 9. *Пусть $e_2 < e_1$. В остальном сохраняем обозначения, введенные выше. Тогда*

$$G_2^*\varepsilon_1 \cong G_1e_2 .$$

Доказательство.[17]) Пусть $\varphi(x)$ — произвольный характер группы G_1, который на B_0 равен 1, т. е. произвольный характер фактор-группы G_1/B_0. По доказательству теоремы 4 каждый характер $\in G_1^*$, которой на B_0 равен 1, можно получить как комплексную функцию $h(x)$, определенную следующим образом:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in J_1 , \\ \varphi(xe_1) & \text{для } x \in S - J_1 \end{cases}$$

(xe_1 будет находиться в G_1, ибо e_1 есть наименьший идемпотент $\in S - J_1$). Для двух различных функций φ_1, φ_2 получаем два различных характера h_1, h_2 (так как они отличаются друг от друга уже на G_1). Значит, множество всех этих характеров, т. е. $G_2^*\varepsilon_1$, изоморфно группе характеров группы G_1/B_0. Но $G_1/B_0 \cong G_1e_2$, откуда $G_2^*\varepsilon_1 \cong G_1e_2$, ч. т. д.

Пересматривая все результаты, полученные в работе, видим, что теоремы 2, 4, ,6, 7, 8 и 9 полностью характеризуют строение полугруппы S^*.

[16]) Доказательство этого утверждения смотри, например, в книге *Александров-Гопф* [2], приложение I, стр. 592.

[17]) Эта теорема справедлива и при $e_1 = e_2$; мы доказали это уже в теореме 4.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Шт. Шварц:* К теории периодических полугрупп, Чехословацкий математический журнал, т. *3* (*78*), 1953, 7—21.

[2] *P. Alexandrov - H. Hopf*: Topologie I, 1935.

[3] *A. H. Clifford:* On semigroups admitting relative inverses, Ann. of Math. *42* (1941), 1037—1049.

[4] *Г. Биркгоф:* Теория структур, (перевод), Москва, 1952.

Summary

THE THEORY OF CHARACTERS OF FINITE COMMUTATIVE SEMIGROUPS

ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava.
(Received January 14, 1954.)

By a character of a semigroup $S = \{a, b, c, \ldots\}$ we mean a complex valued function $\chi(x)$ satisfying the relation $\chi(a)\chi(b) = \chi(ab)$ for every $a, b \in S$.

Only finite commutative semigroups are treated in this paper, though some of the theorems are valid also for some types of infinite semigroups.

If we define the product of two characters in the natural way, then the totality of all characters of S forms a new semigroup which will be denoted by S^*.

The semigroup S^* contains a zero element χ_0 [i. e. the character χ_0 of S defined by: $\chi_0(a) = 0$ for every $a \in S$] and a unity element χ_1 [i. e. the character χ_1 of S defined by: $\chi_1(a) = 1$ for every $a \in S$].

The paper is devoted to the investigation of the structure of the semigroup S^*. Moreover, in section III a method of constructing all characters of a given semigroup is described.

A finite commutative semigroup can be written in a unique way as a sum of disjoint so called „maximal semigroups" P_i, each P_i containing only one idempotent e_i:

$$S = P_1 + P_2 + \ldots + P_s, \quad P_i \cap P_k = \emptyset .$$

To every e_i there exists a unique „maximal group" G_i, having e_i as its unity element. It is $G_i \subseteqq P_i$, hence $G_i \cap G_k = \emptyset$. The set-theoretical sum of the groups G_i is a subsemigroup S_0 of S: $S_0 = G_1 + G_2 + \ldots + G_s$. (Such theorems — in more general cases — were proved explicitly in the paper [1].)

An ideal J of S is called prime ideal if $S - J$ is a semigroup. It is useful to call also $\emptyset$ and S prime ideals of S.

Let χ be a character of S. Then the set of all $a \in S$ for which $\chi(a) = 0$ holds, is a prime ideals of S. Every prime ideal $J \neq \emptyset$ of S is a set-theoretical sum of a number $r \leqq s$ of maximal semigroups: $J = P_{i_1} + P_{i_2} + \ldots + P_{i_r}$.

Every idempotent ϵS^* can be constructed in the following manner. Take a prime ideal J of S and define

$$\varepsilon_J(x) = \begin{cases} 0 \text{ for } x \in J , \\ 1 \text{ for } x \in S - J . \end{cases}$$

Then ε_J is an idempotent character of S (i. e. an idempotent element ϵS^*).

Theorem 1. *Let J be a prime ideal of S. The set of all characters which vanish just on J forms a group G_J^*, containing ε_J as its unity element.*

Theorem 2. *The set S^* is a semigroup which can be written as a sum of disjoint groups $S^* = \sum_J G_J^*$.*

A commutative semigroup E all elements of which are idempotent is called a semi-lattice. It is known that in E we can define a partial ordering by the statement: $\alpha \leqq \beta$ whenever $\alpha\beta = \alpha$.

An important result is given by:

Theorem 4. *Let J be a prime ideal of S, $J \neq S$. Let e be the least element of the semi-lattice of all idempotents $\epsilon S - J$. Then the group G_J^* is isomorphic to the group G_e, where G_e is the maximal group belonging to the idempotent e.*

To every prime ideal $J \neq S$ corresponds in this way a maximal group G_e of S. Conversely, to every maximal group G_e from S there exists one and only one prime ideal J of S, to which G_e belongs in this correspondence. Hence: The number of different prime ideals $J \neq S$ equals to the number of maximal groups of S.

Theorem 6. *Let $S^* = \sum_J G_J^*$ as in theorem 2. The number of groups G_J^* in S^* is just by one greater than the number of maximal groups in S. The group-components G_J^* belonging to prime ideals $J \neq S$ and the maximal groups of S written in a suitable arrangement are isomorphic together. The group-component G_S^* is a group having one element, namely the zero character.*

It must be noted nevertheless that the sets S_0 and $S^* - \{\chi_0\}$ need not be isomorphic as a whole, not even in the case that the last set is a semigroup.

The set E^* of all idempotents ϵS^* (under the same definition of the relation $\leqq$ as in E) forms a lattice. The set of all prime ideals of S forms (with respect to inclusion) a lattice $\mathfrak{P}$. The semi-lattice of prime ideals $J \neq S$ of S and the semi lattice E of idempotents ϵS are isomorphic semi-lattices. The lattices $\mathfrak{P}$ and E^* are antiisomorphic.

The "gross structure" of S^* is given by the following theorems:

Theorem 7. *The partially ordered set of non zero idempotents of S^* and the semi-lattice E of idempotents ϵS are antiisomorphic.*

Theorem 8. *If in the antiisomorphism of the Theorem 7 the correspondence $\varepsilon_J \in E^* \longleftrightarrow e \in E$ holds, then the groups G_J^* and G_e are isomorphic together.*

Let G_ν^*, G_μ^* be two maximal groups of S^* with idempotents ε_ν, ε_μ. The "fine structure" of S^* will be known if we are able to describe the structure of $G_\nu^* \,.\, G_\mu^*$ in terms of the semigroup S (more precisely in terms of the maximal groups of S). Let us put $\varepsilon_\nu \varepsilon_\mu = \varepsilon_\lambda$. Then it is $G_\nu^* \,.\, G_\mu^* = G_\nu^* \varepsilon_\lambda \,.\, G_\mu^* \varepsilon_\lambda$. It is easy to show that $G_\nu^* \varepsilon_\lambda$, $G_\mu^* \varepsilon_\lambda$ are subgroups of G_λ^* (whose structure is known by theorem 4). Hence the structure of S^* will be known if for every couple $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ the structure of $G_2^* \varepsilon_1$ is known. This question is solved by the following theorem:

Theorem 9. *Let be $e_2 < e_1$, hence $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Other notations have an obvious meaning. Then there holds $G_2^* \varepsilon_1 \cong G_1 e_2$.*