Eduard Čech

Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами. VIII

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 4 (1954), No. 2, 143–174

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100105`

Чехословацкий математический журнал, т. 4 (79) 1954

ПРОЕКТИВНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРОСТРАНСТВАМИ VIII

ЭДУАРД ЧЕХ (Eduard Čech), Прага.

(Поступило в редакцию 1/II 1954 г.)

Продолжая исследования начатые в статье VII настоящей серии, автор доказывает теоремы существования для задачи специального проективного изгибания слоя гиперповерхностей в S_n. Если $n \geqq 4$, то равно как и для неспециальных изгибаний, изгибаемый слой должен быть параболическим; если же $n = 3$, то существуют также специальные проективные изгибания слоев неразвертывающихся поверхностей.

§ 1. Настоящая статья является непосредственным продолжением статьи VII. В VII § 3 мы видели, что те соответствия между S_n и S'_n, для которых при надлежащем выборе касательной коллинеации K существует K-главная гиперплоскость, получатся интегрированием дифференциальной системы VII, (3,1)—(3,4), выбрав подходящий репер. В частности, репер таков, что

$$KA = B\,, \quad KA_1 = B_1\,, \ldots, KA_n = B_n \tag{1,1}$$

и что K-главная гиперплоскость есть

$$[AA_1 \ldots A_{n-1}]\,. \tag{1,2}$$

В статье VII мы решили нашу задачу для случая VII (3,5), так что остается задача о нахождении тех решений, для которых в VII (3,2) $\varepsilon = 0$. Напомним, что в рассматриваемом теперь случае можно выбрать K (единственным образом) так, что K-сопроводительная гиперплоскость — неопределенна, т. е. что образы всех прямых связки A при K-линеаризирующей коллинеации Λ лежат в K-главной гиперплоскости (1,2). Аналитически, это выражается тем, что в VII (3,2), кроме $\varepsilon = 0$, еще $\eta = 0$. Итак речь идет об интегрировании дифференциальной системы

$$\begin{gathered}\tau_{01} = \tau_{02} = \ldots = \tau_{0n} = 0\,,\\ \tau_{in} = 0 \;(1 \leqq i \leqq n-1)\,, \quad \tau_{nn} - \tau_{00} = 0\,,\\ [\tau_{ii} - \tau_{nn}\omega_n] = [\tau_{ij}\omega_n] = 0 \;(1 \leqq i, j \leqq n-1,\; i \neq j)\,.\end{gathered} \tag{1,3}$$

Выбор репера подчинен теперь *только* высказанным уже условиям [ср. (1,1), (1,2)].

Внешнее дифференцирование всех уравнений системы (1,3) дает следующие условия интегрируемости:

$$[\tau_{ii} - \tau_{00}\omega_i] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} [\tau_{ji}\omega_j] = 0 \quad (1 \leqq i \leqq n-1), \tag{1,4}$$

$$[\tau_{i0}\omega_n] + [\tau_{ii} - \tau_{00}\omega_{in}] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} [\tau_{ij}\omega_{jn}] = 0 \quad (1 \leqq i \leqq n-1), \tag{1,5}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} [\tau_{i0}\omega_i] + \sum_{i=1}^{n-1} [\tau_{ni}\omega_{in}] + 2[\tau_{n0}\omega_n] = 0, \tag{1,6}$$

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n-1} [\tau_{ii} - \tau_{00}\omega_{jn}\omega_j] + \sum_{j=1}^{n-1} [\tau_{j0}\omega_j\omega_n] + \\ + [\tau_{i0}\omega_i\omega_n] + [\omega_{in}\tau_{ni}\omega_n] = 0 \quad (1 \leqq i \leqq n-1), \end{gathered} \tag{1,7}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} [\tau_{ij}\omega_{kn}\omega_k] + [\tau_{i0}\omega_j\omega_n] + [\omega_{in}\tau_{nj}\omega_n] = 0 \quad (1 \leqq i, j \leqq n-1,\ i \neq j). \tag{1,8}$$

Вследствие этого, положим: сперва по (1,3)

$$\tau_{ii} - \tau_{00} = a_{ii}\omega_n, \quad \tau_{ij} = a_{ij}\omega_n \ (1 \leqq i, j \leqq n-1,\ i \neq j), \tag{1,9}$$

затем по (1,4)

$$\tau_{ni} = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ji}\omega_j + 2c_i\omega_n \quad (1 \leqq i \leqq n-1), \tag{1,10}$$

далее по (1,5)

$$\tau_{i0} = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}\omega_{jn} + 2b_i\omega_n \quad (1 \leqq i \leqq n-1) \tag{1,11}$$

и, наконец, по (1,6)

$$\tau_{n0} = \sum_{i=1}^{n-1} (b_i\omega_i + c_i\omega_{in}) + f\omega_n. \tag{1,12}$$

Подставляя найденные выражения в уравнения (1,7) и (1,8), получаем для $1 \leqq i, j \leqq n-1$:

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{n-1} (a_{ij}[\omega_{kn}\omega_k\omega_n] + a_{ik}[\omega_{kn}\omega_j\omega_n] + a_{kj}[\omega_{in}\omega_k\omega_n] = \\ = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ -\sum\limits_{h=1}^{n-1} \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_{hk}[\omega_{kn}\omega_h\omega_n] & \text{при } i = j. \end{cases} \end{gathered} \tag{1,13}$$

§ 2. Как и в VII, будем в настоящей статье изучать лишь *голономный тип* (см. VI, § 3). Аналитическим условием голономного типа является $[\omega_n \, d\omega_n] = 0$ или

$$\sum_{i=1}^{n-1} [\omega_i \omega_{in} \omega_n] = 0\,. \tag{2,1}$$

Геометрически голономный тип характеризирован тем, что K-главные гиперплоскости являются касательными гиперплоскостями ∞^1 (K-главных) гиперповерхностей; рассматриваемое соответствие — *проективное изгибание слоя* (K-главных) *гиперповерхностей*. Напомним еще раз, что предметом настоящей статьи служат только „специальные" проективные изгибания, так как неспециальные проективные изгибания слоя гиперповерхностей были уже изучены в VII.

Предположив, что при данном выборе (1,1) касательной коллинеации K-главная гиперплоскость имеет вид (1,2) и что K-сопроводительная гиперплоскость неопределенна, мы знаем, что K-линеаризирующая коллинеация Λ переводит прямую

$$[A,\ \omega_1 A_1 + \ldots + \omega_n A_n] \tag{2,2}$$

в прямую

$$[A,\ \varphi_1 A_1 + \ldots + \varphi_{n-1} A_{n-1}] \tag{2,3}$$

лежащую в K-главной гиперплоскости (1,2). Из (1,9) и (1,10) следует, что

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ji}\omega_j + c_i\omega_n \quad (1 \leqq i \leqq n-1)\,. \tag{2,4}$$

Мы можем исключить случай, когда отношения

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \ldots : \varphi_{n-1} \tag{2,5}$$

независимы от $\omega_1, \ldots, \omega_n$, так как это не что иное, как случай соответствий с тотально K-линеаризирующей прямой, изученный уже в статье VI. Равным образом, мы исключаем *тривиальный* случай соответствий разложимых на ∞^1 коллинейных соответствий между гиперплоскостями; напомним, что случай, когда K-главные гиперповерхности являются гиперплоскостями, есть тривиальный случай.

§ 3. Из (2,1) нетрудно заключаем, что можно специализировать репер таким образом, что

$$\omega_{in} = \varepsilon_i\omega_i + \eta_i\omega_n \quad (1 \leqq i \leqq n-1)\,, \tag{3,1}$$

где

$$\varepsilon_i \neq 0 \text{ для } 1 \leqq i \leqq r,\ \varepsilon_i = 0 \text{ для } r+1 \leqq i \leqq n-1\,, \tag{3,2}$$

причем $0 \leqq r \leqq n-1$. Случай $r = 0$, очевидно, тривиален; итак, пусть $r \geqq 1$. Докажем, что для $n \geqq 4$ гипотеза $r \geqq 2$ невозможна. Если $n \geqq 4$, то имеются налицо три отличных друг от друга индекса i, j, k ($1 \leqq i, j, k \leqq n-1$). Согласно (1,13) и (3,1), мы имеем для $i \neq j$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_{ik}\varepsilon_k[\omega_k\omega_j\omega_n] + a_{kj}\varepsilon_i[\omega_i\omega_k\omega_n]) = 0\,,$$

так что для $i \neq j \neq k \neq i$

$$a_{ik}\varepsilon_k = 0\,, \quad a_{kj}\varepsilon_i = 0 \tag{*}$$

и, сверх того, для $i \neq j$

$$(a_{ii} + a_{jj})\,\varepsilon_i = 0\,. \tag{**}$$

Если теперь $r \geqq 2$, то из (*) следует, что $a_{ij} = 0$ для $1 \leqq i,\ j \leqq n-1$, $i \neq j$, а из (**), что $a_{ii} = 0$ для $1 \leqq i \leqq n-1$. Но тогда (2,4) даст $\psi_i = c_i\omega_n$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$, значит, отношения (2,5) — независимы от $\omega_1, \ldots, \omega_n$, т. е. получаем только исключенный уже тривиальный случай.

В дальнейшем мы будем прдеполагать $r = 1$, включая, однако, и случай $n = 3$. Условие $r = 1$ означает, очевидно, что *K-главные гиперповерхности — развертывающиеся*, т. е. они являются огибающими ∞^1 (K-главных) гиперплоскостей. В силу предыдущего, *случай неразвертывающихся K-главных гиперповерхностей невозможен, если* $n \geqq 4$; если же $n = 3$, мы его изучим в § 14.

Так как $r = 1$, то

$$\omega_{1n} = \varepsilon_1\omega_1 + \eta_1\omega_n\,, \quad \omega_{in} = \eta_i\omega_n \quad (2 \leqq i \leqq n-1;\ \varepsilon_1 \neq 0) \tag{3,3}$$

и (1,13) перепишется в виде

$$\sum_{k=2}^{n-1} a_{k1}[\omega_1\omega_k\omega_n] = 0\,,$$

$$a_{11}[\omega_1\omega_j\omega_n] + \sum_{k=2}^{n-1} a_{kj}[\omega_1\omega_k\omega_n] = 0 \quad (2 \leqq j \leqq n-1)\,,$$

$$a_{i1}[\omega_1\omega_j\omega_n] = 0 \quad (2 \leqq i,\ j \leqq n-1,\ i \neq j)$$

$$a_{i1}[\omega_1\omega_i\omega_n] + \sum_{k=2}^{n-1} a_{k1}[\omega_1\omega_k\omega_n] = 0 \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,.$$

Из этих соотношений следует, что $a_{i1} = a_{11} + a_{ii} = a_{ij} = 0$ для $2 \leqq i$, $j \leqq n-1$. Полагая $a_{1i} = a_i$ для $1 \leqq i \leqq n-1$, мы можем переписать равенства (1,9)—(1,12) в виде:

$$\tau_{11} - \tau_{00} = a_1\omega_n,\ \tau_{ii} - \tau_{00} = -a_1\omega_n \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,, \tag{3,4}$$

$$\tau_{i1} = 0\,, \quad \tau_{ij} = 0 \quad (2 \leqq i, j \leqq n-1,\ i \neq j)\,, \tag{3,5}$$

$$\tau_{1i} = a_i\omega_n \ (2 \leqq i \leqq n-1)\,, \tag{3,6}$$

$$\tau_{n1} = a_1\omega_1 + 2c_1\omega_n\,, \quad \tau_{ni} = a_i\omega_1 - a_1\omega_i + 2c_i\omega_n \ (2 \leqq i \leqq n-1),$$

$$\tau_{10} = \varepsilon_1 a_1\omega_1 + (2b_1 + \eta_1 a_1 + \sum_{i=2}^{n-1}\eta_i a_i)\,\omega_n\,, \tag{3,8}$$

$$\tau_{i0} = (2b_i - \eta_i a_1)\,\omega_n \quad (1 \leqq i \leqq n-1)\,, \tag{3,9}$$

$$\tau_{n0} = (b_1 + \varepsilon_1 c_1)\omega_1 + \sum_{i=2}^{n-1} b_i\omega_i + c\omega_n\,. \tag{3,10}$$

Заметим, что из соотношений (3,3) видно [как и в предыдущей статье из соотношений VII (3,15)], что каждая K-главная гиперплоскость касается соответствующей (развертывающейся) K-главной гиперповерхности вдоль $(n-2)$-мерного пространства

$$[AA_2 \ldots A_{n-1}]\,, \tag{3,11}$$

которое мы опять назовем *характеристикой* рассматриваемого соответствия.

Из (3,3) следуют соотношения $[\omega_{in}\omega_n] = 0$ $(2 \leqq i \leqq n-1)$, внешнее дифференцирование которых дает $[\omega_{i1}\omega_1\omega_n] = 0$ или же $[\omega_{i1} - \lambda_i\omega_1\omega_n] = 0$ $(2 \leqq i \leqq n-1)$. Но это означает, что на всякой K-главной гиперповерхности, состоящей из ∞^1 $(n-2)$-мерных характеристик (3,11), $(n-3)$-мерное линейное подпространство (точка для $n = 3$)

$$[A_2 - \lambda_2 A, \ldots, A_{n-1} - \lambda_{n-1}A] \tag{3,12}$$

является ребром возврата на соответствующей характеристике (3,11); как и в VII, назовем пространство (3,12) *основанием* рассматриваемого соответствия. Нетрудно доказать, что всегда можно специализировать репер таким образом, что основанием служит пространство

$$[A_2 \ldots A_{n-1}]\,, \tag{3,13}$$

т. е. что $\lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$; другими словами, можно считать, что

$$[\omega_{i1}\omega_n] = 0 \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,. \tag{3,14}$$

Дифференцируя внешним образом равенства (3,5), а также равенство $\tau_{11} + \tau_{ii} - 2\tau_{00} = 0$ $(2 \leqq i \leqq n-1)$, вытекающее из (3,4), получаем

$$[\tau_{i0}\omega_1] - \eta_i[\tau_{n1}\omega_n] = 0\,, \quad [\tau_{i0}\omega_j] - \eta_i[\tau_{nj}\omega_n] = 0\,,$$
$$3[\tau_{10}\omega_1] + 3[\tau_{i0}\omega_i] + 2\sum_j [\tau_{j0}\omega_j] + [\omega_{1n}\tau_{n1}] + [\omega_{in}\tau_{ni}] + [\tau_{n0}\omega_n] = 0$$
$$(2 \leqq i, j \leqq n-1,\ i \neq j)\,,$$

так что

$$b_i = \eta_i a_1 = \eta_i a_j = 0 \quad (2 \leqq i, j \leqq n-1,\ i \neq j)\,, \tag{3,15}$$

$$4(b_1 + \eta_1 a_1 + \eta_i a_i - \varepsilon_1 c_1) + 3\sum_j \eta_j a_j = 0 \quad (2 \leqq i, j \leqq n-1,\ i \neq j). \tag{3,16}$$

Если

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0\,, \tag{3,17}$$

то сопоставляя (1,9) с соотношениями (3,4), (3,5), (3,6), мы видим, что (2,4) перепишется просто: $\varphi_i = c_i\omega_n$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$; значит, отношения (2,5) независят от $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Поэтому *гипотезу* (3,17) *надо отвергнуть*.

Если $a_1 \neq 0$, то из (3,15) непосредственно заключаем, что

$$b_i = \eta_i = 0 \quad (2 \leqq i, j \leqq n-1)\,. \tag{3,18}$$

Докажем, что (3,18) справедливо также для $a_1 = 0$. Если это не так, то существует такой индекс r $(2 \leqq r \leqq n-1)$, что $\eta_r \neq 0$. Из (3,15) следует потом, что $a_i = 0$ для $2 \leqq i \leqq n-1$, $i \neq r$, а поскольку (3,17) исключено, то должно быть $a_r \neq 0$. В случае $n \geqq 4$ мы легко видим, что это невозможно, так как (3,16) дает для $i = r$

$$b_1 - \varepsilon_1 c_1 + \eta_r a_r = 0$$

а для $i \neq r$, $2 \leqq i \leqq n-1$,

$$b_1 - \varepsilon_1 c_1 + \tfrac{3}{4}\eta_r a_r = 0 ,$$

так что получится противоречие: $\eta_r a_r = 0$. Остается доказать, что для $n = 3$ предположение

$$a_1 = 0 , \quad b_2 = 0 , \quad a_2 \neq 0 , \quad \eta_2 \neq 0 , \tag{3,19}$$

влечет за собой противоречие. Если же (3,19) имеет место для $n = 3$, то мы сперва заметим, что, согласно (3,16), $b_1 = \varepsilon_1 c_1 - \eta_2 a_2$; далее, по (3,4), (3,7), (3,8), (3,9), (3,10) и (3,19), мы имеем

$$\tau_{11} - \tau_{00} = 0 , \quad \tau_{20} = 0 , \quad \tau_{10} = (2\varepsilon_1 c_1 - \eta_2 a_2)\omega_3 ,$$
$$\tau_{31} = 2c_1\omega_3 , \quad \tau_{30} = (2\varepsilon_1 c_1 - \eta_2 a_2)\omega_1 + c\omega_3 ,$$

так что внешнее дифференцирование равенства $\tau_{11} - \tau_{00} = 0$ дает нужное противоречие $\eta_2 a_2 = 0$.

Итак мы доказали, что (3,18) должно всегда иметь место. Учитывая (3,16) и (3,18), мы можем переписать $(3,3_2)$, (3,8), (3,9) и (3,10) в упрощенном виде:

$$\omega_{in} = 0 \quad (2 \leqq i \leqq n-1) , \tag{3,20}$$
$$\tau_{i0} = 0 \quad (2 \leqq i \leqq n-1) , \tag{3,21}$$
$$\tau_{10} = \varepsilon_1 a_1 \omega_1 + (2\varepsilon_1 c_1 - \eta_1 a_1)\omega_n , \tag{3,22}$$
$$\tau_{n0} = (2\varepsilon_1 c_1 - \eta_1 a_1)\omega_1 + c\omega_n . \tag{3,23}$$

В виду (3,20), основание (3,13) можно определить и другим путем: (3,13) является тем пространством, вдоль которого (для $n = 3$: той точкой, в которой) K-главная гиперплоскость (1,2) касается огибающей системы всех ∞^2 K-главных гиперплоскостей. Но это означает, что результат, полученный в VII § 5 для неспециальных проективных изгибаний, именно, что *только параболические слои гиперповерхностей допускают проективное изгибание*, без изменения остается в силе, *пока* $n \geqq 4$, также для *специальных* проективных изгибаний, которые и являются предметом настоящей статьи. Для $n = 3$, напротив, имеются налицо еще специальные проективные изгибания известных частных слоев *неразвертывающихся поверхностей*, как мы увидим ниже в § 14.

§ 4. Из предыдущего вытекает, что за исключением для $n = 3$ слоя неразвертывающихся поверхностей, специальное проективное изгибание возможно лишь для *параболических* слоев гиперповерхностей. Резюмируя полученные результаты, мы видим, что такое изгибание аналитически дано дифференциальной системой

$$\omega_{1n} = \varepsilon_1\omega_1 + \eta_1\omega_n\,, \quad \omega_{in} = 0 \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,, \tag{4,1}$$

$$[\omega_{i1}\omega_n] = 0 \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,, \tag{4,2}$$

$$\tau_{01} = \ldots = \tau_{0n} = 0\,; \quad \tau_{1n} = \ldots = \tau_{n-1n} = 0\,; \quad \tau_{nn} - \tau_{00} = 0, \tag{4,3}$$

$$\tau_{i0} = \tau_{i1} = \tau_{ij} = 0 \quad (2 \leqq i, j \leqq n-1;\ i \neq j)\,, \tag{4,4}$$

$$\tau_{11} - \tau_{00} = a_1\omega_n\,; \quad \tau_{ii} - \tau_{00} = -a_1\omega_n \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,, \tag{4,5}$$

$$\tau_{1i} = a_i\omega_n \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,, \tag{4,6}$$

$$\tau_{10} = \varepsilon_1 a_1\omega_1 + (2\varepsilon_1 c_1 - \eta_1 a_1)\omega_n\,, \tag{4,7}$$

$$\tau_{n1} = a_1\omega_1 + 2c_1\omega_n\,, \tag{4,8}$$

$$\tau_{ni} = a_i\omega_1 - a_1\omega_i + 2c_i\omega_n \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,, \tag{4,9}$$

$$[\tau_{n0} - (2\varepsilon_1 c_1 - \eta_1 a_1)\,\omega_1\,\omega_n] = 0\,, \tag{4,10}$$

причем

$$\varepsilon_1 \neq 0\,. \tag{4,11}$$

Напомним, что неравенство (4,11) означает, что мы исключили *тривиальный случай* соответствий между S_n и S'_n разложимых на ∞^1 коллинейных соответствий между гиперплоскостями.

Репер выбран таким образом, что: касательная коллинеация K дана посредством

$$KA = B\,, \quad KA_1 = B_1\,, \ldots, KA_n = B_n\,; \tag{4,12}$$

[2] K-главной гиперплоскостью служит

$$[AA_1 \ldots A_{n-1}]\,; \tag{4,13}$$

[3] характеристикой, т. е. местом точек касания K-главной гиперплоскости с (развертывающейся) K-главной гиперповерхностью, служит

$$[AA_2 \ldots A_{n-1}]\,; \tag{4,14}$$

[4] основанием, т. е. местом точек касания K-главной гиперплоскости (4,12) с огибающей всех ∞^2 K-главных гиперплоскостей, служит

$$[A_2 \ldots A_{n-1}]\,; \tag{4,15}$$

так как слой K-главных гиперповерхностей — параболический, то основание (4,15) является одновременно местом точек касания характеристики (4,14) с огибающей системы ∞^1 характеристик соответствующей движении точки A вдоль K-главной гиперповерхности.

Кроме того, касательная коллинеация K выбрана таким образом, что K-линеаризирующая коллинеация Λ переводит всю всязку A в гиперплоскость (4,13); такой выбор касательной коллинеации возможен потому, что мы рассматриваем специальные проективные изгибания. Напомним еще, что образом прямой

$$[A,\ \omega_1 A_1 + \ldots + \omega_n A_n] \tag{4,16}$$

связки A при коллинеации Λ является прямая

$$[A,\ \varphi_1 A_1 + \ldots + \varphi_{n-1} A_{n-1}]\,, \tag{4,17}$$

где

$$\varphi_1 = a_1\omega_1 + c_1\omega_n\,, \quad \varphi_i = a_i\omega_1 - a_1\omega_i + c_i\omega_n \ (2 \leqq i \leqq n-1). \tag{4,18}$$

Нужно также не терять из виду, что мы исключаем случай, когда отношения (2,5) независимы от $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

§ 5. При решении задачи отыскания специальных проективных изгибаний параболических слоев необходимо различать ряд случаев. С целью большей наглядности удобно рассмотреть, наряду с пространством S_n, дуальное пространство Σ_n. Дуальным образом K-главной гиперплоскости (4,13) пространства S_n является точка Δ пространства Σ_n; имеется всего ∞^2 таких точек Δ, которые образуют поверхность (Δ) в пространстве Σ_n. Касательная плоскость Σ_2 поверхности (Δ) в точке Δ является дуальным образом основания (4,15).

Поверхность (Δ), конечно, содержится в пространстве Σ_n; но может случиться, что она содержится в линейном подпространстве меньшей размерности. Пусть Σ_d обозначает линейное подпространство наименьшего числа измерений пространства Σ_n, содержащее поверхность (Δ), так что

$$2 \leqq d \leqq n\,. \tag{5,1}$$

Число d мы назовем *классом* рассматриваемого параболического слоя. Очевидно, что Σ_d содержит также все касательные плоскости поверхности (Δ); наоборот, конечно, подпространство, содержащее все касательные плоскости к (Δ), должно содержать самоё (Δ). Если $d < n$, то Σ_d является дуальным образом линейного подпространства S_{n-d-1} $n-d-1$ измерений пространства S_n. Из предыдущего вытекает, что S_{n-d-1} является местом общих точек всех оснований. В частности, если $d = 2$, то основание неподвижно. Если $d = n$, то не существует общей точки всех ∞^2 оснований.

Так как слой K-главных гиперповерхностей — параболический, то (см. определение параболического слоя в VI § 10) поверхность (Δ) содержит систему ∞^1 *асимптотических* кривых (не прямых) γ, являющихся дуальным образом развертывающихся K-главных гиперповерхностей. Движения точки Δ вдоль асимптотической кривой γ отвечают движениям точки A в пространстве S_n вдоль K-главной гиперповерхности, т. е. движениям, которые в силу нашего выбора репера определены уравнением $\omega_n = 0$; мы будем коротко говорить о движениях $\omega_n = 0$.

Пусть текущая точка Δ поверхности (Δ) дана как функция от двух параметров t_1, t_2 выбранных таким образом, что $\mathrm{d}t_2 = 0$ равносильно с $\omega_n = 0$, т. е. что $t_2 = \text{const.}$ вдоль асимптотических кривых γ. Тогда [см. VI (9,1)] имеет место уравнение в частных производных вида

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t_1^2} = a\frac{\partial \Delta}{\partial t_1} + b\frac{\partial \Delta}{\partial t_2} + \Delta c\,, \tag{5,2}$$

причем

$$b \neq 0\,, \tag{5,3}$$

так как кривые γ — не прямые. Ясно, что каждая из ∞^1 кривых γ содержится в пространстве Σ_d; покажем, что она (кроме, пожалуй, некоторых исключительных значений параметра t_2) не может содержаться в линейном пространстве меньшего чем d числа измерений. Пусть напротив линейное подпространство $\pi(t_2)$ наименьшей размерности, которое заключает в себе кривую $\gamma = \gamma(t_2)$, имеет (при любом t_2) размерность $h < d$. Пространство $\pi(t_2)$ дуально линейному подпространству $E(t_2)$ $n - h - 1$ измерений пространства S_n. Пусть в пространстве $E(t_2)$ выбраны линейно независимые точки

$$C_i(t_2) \quad (1 \leqq i \leqq n - h) \tag{5,4}$$

(независимые от t_1). Связь между S_n и Σ_n дана билинейной формой $X \,.\, \Xi$ такой, что $X \,.\, \Xi = 0$ тогда и только тогда, если точка X пространства S_n лежит в гиперплоскости Ξ того же пространства. По предположению имеем тождества

$$C_i(t_2) \,.\, \Delta = 0 \quad (1 \leqq i \leqq n - h)\,; \tag{5,5}$$

так как точки (5,4) не зависят от t_1, то мы имеем также

$$C_i \,.\, \frac{\partial \Delta}{\partial t_1} = 0, \quad C_i \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t_1^2} = 0 \quad (1 \leqq i \leqq n - h).$$

Но тогда из (5,2) и (5,3) следует, что

$$C_i \,.\, \frac{\partial \Delta}{\partial t_2} = 0 \quad (1 \leqq i \leqq n - h)\,.$$

С другой стороны из (5,5) вытекает

$$C \,.\, \frac{\partial \Delta}{\partial t_2} + \frac{\mathrm{d}C_i}{\mathrm{d}t_2} \,.\, \Delta = 0 \quad (1 \leqq i \leqq n - h).$$

Следовательно

$$\frac{\mathrm{d}C_i}{\mathrm{d}t_2} \,.\, \Delta = 0 \quad (1 \leqq i \leqq n - h),$$

так что точки

$$\frac{\mathrm{d}C_i}{\mathrm{d}t_2} \quad (1 \leqq i \leqq n - h)$$

являются точками пространства $E = E(t_2)$. Нетрудно видеть, что это означает, что пространство E — неподвижно; следовательно, неподвижно и пространство $\pi = \pi(t_2)$ дуальное к E. Итак, вся поверхность (Δ) содержится в линейном пространстве π $h < d$ измерений, что противоречит определению класса d.

Мы показали, что кривые γ не могут содержаться в линейных пространствах меньшего чем d числа измерений, так что их соприкасающиеся линейные подпространства

$$\Sigma_i \quad (2 \leqq i \leqq d) \tag{5,6}$$

i измерений пространства Σ_n однозначно определены; пусть

$$S_{n-i-1} \quad (2 \leqq i \leqq d) \tag{5,7}$$

линейные подпространства (числа измерений данного индексом) дуальные к (5,6). Очевидно, пространство S_{n-3} совпадает с основанием (4,15); пространство S_{n-d-1} неподвижно и мы его ввели уже в начале этого параграфа.

Из определения пространств (5,7) видно, что при движении $\omega_n = 0$ пространство S_{n-i-1} $(2 \leqq i \leqq d - 1)$ касается своей огибающей вдоль пространства S_{n-i}.

§ 6. С помощью пространств (5,7) введем теперь в пространстве S_n специализацию репера, в силу которой будет

$$S_{n-i-1} = [A_i \ldots A_{n-1}] \quad (2 \leqq i \leqq d)\,; \tag{6,1}$$

так как S_{n-2} — основание рассматриваемого слоя, то (6,1) имеет место для $i = 2$ согласно с (4,15). Так как пространство S_{n-d-1} неподвижно, то мы можем требовать и неподвижность точек A_r $(d \leqq r \leqq n - 1)$, т. е.

$$\omega_{rs} = 0 \quad (d \leqq r \leqq n - 1,\ 0 \leqq s \leqq n)\,; \tag{6,2}$$

в случае $d = n$ соотношения (6,2) отпадут. Из определения пространств (6,1) следует далее, что

$$[\omega_{j0}\omega_n] = 0 \quad (3 \leqq j \leqq d - 1)\,, \tag{6,3}$$

$$[\omega_{jk}\omega_n] = 0 \quad (4 \leqq j \leqq d - 1,\ 2 \leqq k \leqq j - 2)\,; \tag{6,4}$$

(6,3) отпадет для $d = 2$ и для $d = 3$, (6,4) — для $d = 2, 3, 4$. Так как для $2 \leqq i \leqq d - 1$ пространство (6,1) не может оставаться неизменным при движениях $\omega_n = 0$, то мы имеем

$$[\omega_{20}\,\omega_n] \neq 0 \quad \text{для} \quad d \geqq 3\,, \tag{6,5}$$

$$[\omega_{j,j-1}\omega_n] \neq 0 \quad \text{для} \quad 3 \leqq j \leqq d - 1\,; \tag{6,6}$$

(6,6) отпадет в случаях $d = 2$ и $d = 3$. Очевидно, что соотношения (4,1), (4,2), (4,11), (6,2)—(6,6) вполне выражают все условия, наложенные на выбор репера в S_n.

Внешним дифференцированием можно добиться для $d \geqq 4$ новых соотношений. Прежде всего докажем, что для $d \geqq 4$:

$$\omega_{j1} = 0 \quad (3 \leqq j \leqq d - 1)\,. \tag{6,7}$$

В самом деле, по (4,1) имеется $\omega_{jn} = 0$. Внешнее дифференцирование дает, учитывая (4,1) и (6,3): $[\omega_{j1}\omega_{1n}] = 0$. Но кроме того $[\omega_{j1}\omega_n] = 0$ по (4,2), так что получим (6,7) заметив, что $[\omega_{1n}\omega_n] \neq 0$ по (4,1) и (4,11).

Далее докажем, что для $d \geqq 5$:

$$\omega_{k0} = 0 \quad (4 \leqq k \leqq d-1)\,. \tag{6,8}$$

Действительно, из соотношения $\omega_{k1} = 0$ [см. (6,7)] получаем внешним дифференцированием, учитывая (4,1), (6,2) и (6,7)

$$[\omega_{k0}\omega_1] + [\omega_{k2}\omega_{21}] = 0\,. \tag{*}$$

Но $[\omega_{k2}\omega_n] = 0$ по (6,4) и $[\omega_{21}\omega_n] = 0$ по (4,2), так что (*) дает $[\omega_{k0}\omega_1] = 0$. Сопоставляя с $[\omega_{k0}\omega_n] = 0$ [см. (6,3)], мы и получаем (6,8).

Затем докажем, что для $d \geqq 6$:

$$\omega_{h2} = 0 \quad (5 \leqq h \leqq d-1)\,. \tag{6,9}$$

Внешним дифференцированием соотношения $\omega_{h0} = 0$ [см. (6,8)] получаем, учитывая (4,1), (6,2), (6,3) и (6,7), $[\omega_{h2}\omega_{20}] = 0$. С другой стороны, имеется также $[\omega_{h2}\omega_n] = 0$ по (6,4), и (6,9) вытекает из (6,5).

Наконец докажем, что для $d \geqq 5$:

$$\omega_{kr} = 0 \quad (4 \leqq k \leqq d-1,\ 0 \leqq r \leqq\ k-3)\,. \tag{6,10}$$

В случаях $r = 0, 1, 2$ справедливость (6,10) нам уже известна. Завершим доказательство индуктивно. При данном r, где $2 \leqq r \leqq d-5$, пусть нам уже известно, что

$$\omega_{ks} = 0 \quad \text{для} \quad 5 \leqq k \leqq d-1,\ 0 \leqq s \leqq \min.\ (r, k-3)\,. \tag{α}$$

Надо доказать, что

$$\omega_{k,r+1} = 0 \quad \text{для} \quad r+4 \leqq k \leqq d-1\,. \tag{*}$$

Из уравнения $\omega_{kr} = 0$ [см. (α)] следует внешним дифференцированием, учитывая (4,1) и (6,2):

$$\sum_{\lambda=0}^{d-1} [\omega_{k\lambda}\omega_{\lambda r}] = 0\,.$$

Но в силу (α) будет во-первых $\omega_{k\lambda} = 0$ для $0 \leqq \lambda \leqq r$, и во-вторых, $\omega_{\lambda r} = 0$ для $r+3 \leqq \lambda \leqq d-1$. Итак

$$[\omega_{k,r+1}\omega_{r+1,r}] + [\omega_{k,r+2}\omega_{r+2,r}] = 0\,. \tag{β}$$

Но из (6,4) заключаем, что $[\omega_{k,r+2}\omega_n] = 0$, $[\omega_{r+2,r}\omega_n] = 0$, так что $[\omega_{k,r+2}\omega_{r+2,r}] = 0$, откуда

$$[\omega_{k,r+1}\omega_{r+1,r}] = 0 \tag{γ}$$

по (β). Кроме того, в силу (6,4) имеем $[\omega_{k,r+1}\omega_n] = 0$. Сопоставляя с ($\gamma$), получаем (*), так как $[\omega_{r+1,r}\omega_n] \neq 0$ по (6,6).

§ 7. Специализации репера введенные в § 6 имеют простое геометрическое значение. С целью упрощения дальнейших выкладок введем теперь чисто аналитическим путем еще другие специализации репера, геометрическое значение которых мы в этой статье разбирать не будем. Заметим лишь, что новые специализации, подобно предыдущим, зависят только от параболического слоя заданного в пространстве S_n, специальные проективные изгибания которого являются целью наших исследований.

Из уравнений (4,1) вытекает внешним дифференцированием [с учетом (4,2)]

$$[\mathrm{d}\varepsilon_1 + \varepsilon_1(\omega_{00} + 2\omega_{11} + \omega_{nn})\,\omega_1] - \varepsilon_1 \sum_{i=2}^{n-1} [\omega_{i1}\omega_i] +$$
$$+ [\mathrm{d}\eta_1 + \eta_1(\omega_{00} - \omega_{11}) - \omega_{10} - \varepsilon_1\omega_{n1} + \eta_1^2\omega_1\,\omega_n] = 0\,,$$
$$\varepsilon_1[\omega_{i1}\omega_1] + [\omega_{i0}\omega_n] = 0 \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,. \tag{7,2}$$

В силу (4,2) и (7,2) можно положить

$$\omega_{i1} = \lambda_i\omega_n\,, \quad \omega_{i0} = \varepsilon_1\lambda_i\omega_1 + \mu_i\omega_n \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,. \tag{7,3}$$

Если класс d изгибаемого слоя равен двум, то из (6,2) вытекает, что $\lambda_i = \mu_i = 0$ для $2 \leqq i \leqq n-1$; если же $d \geqq 3$, то $\lambda_2 \neq 0$ по (6,5), в то время как $\lambda_j = 0$ для $3 \leqq j \leqq n-1$ по (6,2) и (6,7); кроме того, $\mu_k = 0$ для $4 \leqq k \leqq n-1$ по (6,2) и (6,8). В случае $d = 3$ будет $\mu_3 = 0$ по (6,2). Если же $d \geqq 4$, то мы покажем, что $\mu_3 \neq 0$. Действительно, если $d \geqq 4$, то $[\omega_{32}\omega_n] \neq 0$ по (6,6) и так как $\omega_{21} = \lambda_2\omega_n$, $\lambda_2 \neq 0$, то $[\omega_{32}\omega_{21}] \neq 0$; с другой стороны, из $\omega_{31} = 0$ вытекает внешним дифференцированием $[\omega_{30}\omega_1] + [\omega_{32}\omega_{21}] = 0$, так что $[\omega_{30}\omega_1] \neq 0$ или же $\mu_3 \neq 0$. Итак мы показали, что в (7,3):

$$\lambda_i = \mu_i = 0 \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,, \quad \text{если } d = 2\,, \tag{7,4}$$
$$\lambda_2 \neq 0\,, \quad \lambda_j = 0 \quad (3 \leqq j \leqq n-1)\,, \quad \text{если } d = 3\,, \tag{7,5}$$
$$\lambda_2 \neq 0\,, \quad \mu_3 \neq 0\,, \quad \lambda_j = 0 \quad (3 \leqq j \leqq n-1)\,, \quad \mu_k = 0 \quad (4 \leqq k \leqq n-1), \quad \text{если } d \geqq 4\,. \tag{7,6}$$

Из (7,1) следует ,что

$$\delta\varepsilon_1 + \varepsilon_1(e_{00} - 2e_{11} + e_{nn}) = 0\,, \quad \delta\eta_1 + \eta_1(e_{00} - e_{11}) - e_{10} - \varepsilon_1 e_{n1} = 0\,.$$

Учитывая (4,11), мы видим, что возможна специализация репера, вследствие которой $\varepsilon_1 = 1$, $\eta_1 = 0$ или

$$\omega_{1n} = \omega_1\,. \tag{7,7}$$

Окончательно имеем

$$\omega_{1n} = \omega_1\,, \quad \omega_{ir} = 0 \quad (2 \leqq i \leqq n-1,\ 0 \leqq r \leqq n) \quad \text{если} \quad d = 2\,. \tag{7,8}$$

Внешнее дифференцирование дает

$$[\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{nn}\omega_1] - [\omega_{10} + \omega_{n1}\omega_n] = 0\,, \quad \text{если} \quad d = 2\,. \tag{7,9}$$

Перейдем к случаю $d = 3$. Здесь имеем $\omega_{21} = \lambda_2\omega_n$, $\omega_{20} = \lambda_2\omega_1 + \mu_2\omega_n$, причем $\lambda_2 \neq 0$. Внешнее дифференцирование дает

$$\delta\lambda_2 + \lambda_2(2e_{00} - e_{11} - e_{22}) = 0\,, \quad \delta\mu_2 + \mu_2(2e_{00} - e_{22} - e_{nn}) - 2e_{10} = 0\,,$$

так что после дальнейшей специализации репера будет $\lambda_2 = 1$, $\mu_2 = 0$. Все вместе, будет

$$\begin{gathered}\omega_{1n} = \omega_1\,, \quad \omega_{2n} = 0\,, \quad \omega_{21} = \omega_n\,, \quad \omega_{20} = \omega_1\,, \\ \omega_{jr} = 0 \quad (3 \leqq j \leqq n - 1, \quad 0 \leqq r \leqq n)\,, \\ \text{если} \quad d = 3\,.\end{gathered} \tag{7,10}$$

Внешнее дифференцирование дает

$$\begin{aligned}&[\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{nn}\omega_n] = 0\,, \\ &[\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{nn}\omega_1] - [\omega_{10} + \omega_{n1} - \omega_2\omega_n] = 0\,, \\ &[2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22}\omega_1] + [\omega_{10} - \omega_{n1} + \omega_2\omega_n] = 0\,, \text{ если } d = 3.\end{aligned} \tag{7,11}$$

Если $d \geqq 4$, то будет $\omega_{1n} = \omega_1$, $\omega_{21} = \lambda_2\omega_n$, $\omega_{30} = \mu_3\omega_n$, $\omega_{20} = \lambda_2\omega_1 + \mu_2\omega_n$, причем $\lambda_2 \neq 0$, $\mu_3 \neq 0$. Внешнее дифференцирование дает

$$\begin{aligned}&\delta\lambda_2 + \lambda_2(e_{00} + e_{11} - e_{22} - e_{nn}) = 0\,, \\ &\delta\mu_3 + \mu_3(2e_{00} - e_{33} - e_{nn}) = 0\,, \\ &\delta\mu_2 + \mu_2(2e_{00} - e_{22} - e_{nn}) + 2\lambda_2 e_{10} - \mu_3 e_{23} = 0\,,\end{aligned}$$

так что после дальнейшей специализации репера будет $\lambda_2 = 1$, $\mu_3 = 1$, $\mu_2 = 0$. Если $d = 4$, то специализация уже завершена. Имеем

$$\begin{aligned}&\omega_{1n} = \omega_1\,, \quad \omega_{21} = \omega_n\,, \quad \omega_{20} = \omega_1\,, \quad \omega_{30} = \omega_n\,, \\ &\omega_{2n} = \omega_{3n} = \omega_{31} = 0\,, \\ &\omega_{rs} = 0 \quad (4 \leqq r \leqq n - 1\,, \quad 0 \leqq s \leqq n) \quad \text{если } d = 4\,.\end{aligned} \tag{7,12}$$

Внешнее дифференцирование дает

$$\begin{aligned}&[\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{nn}\omega_n] = 0\,, \\ &[\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{nn}\omega_1] - [\omega_{10} + \omega_{n1} - \omega_2\omega_n] = 0\,, \\ &[2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22}\omega_1] + [\omega_{10} - \omega_{n1} - \omega_{23} + \omega_2\omega_n] = 0\,, \\ &[\omega_{32} - \omega_1\omega_n] = 0\,, \\ &[\omega_{32}\omega_1] - [2\omega_{00} - \omega_{33} - \omega_{nn}\omega_n] = 0\,, \quad \text{если} \quad d = 4\,.\end{aligned} \tag{3,13}$$

Случай $d \geqq 5$ будет подробно изучен в § 8.

§ 8. В случае параболического слоя класса $d \geqq 5$ специализации репера введенные в §§ 6 и 7 дадут:

$$\begin{gathered}\omega_{1n} = \omega_1\,, \quad \omega_{21} = \omega_n\,, \quad \omega_{20} = \omega_1\,, \quad \omega_{30} = \omega_n\,, \\ \omega_{in} = 0 \quad (2 \leqq i \leqq d - 1)\,, \quad \omega_{31} = 0\,, \\ \omega_{kr} = 0 \quad (4 \leqq k \leqq d - 1\,, \quad 0 \leqq r \leqq k - 3)\,, \\ [\omega_{k,k-2}\omega_n] = 0 \quad (4 \leqq k \leqq d - 1)\,, \\ \omega_{st} = 0 \quad (d \leqq s \leqq n - 1\,, \quad 0 \leqq t \leqq n)\,.\end{gathered} \tag{8,1}$$

Внешним дифференцированием получаем из (8,1):

$$\begin{aligned}
&[\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{nn}\omega_n] = 0\,,\\
&[\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{nn}\omega_1] - [\omega_{10} + \omega_{n1} - \omega_2\omega_n] = 0\,,\\
&[2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22}\omega_1] + [\omega_{10} - \omega_{n1} - \omega_{23} + \omega_2\omega_n] = 0\,,\\
&[\omega_{32} - \omega_1\,\omega_n] = 0\,,\\
&[\omega_{32}\omega_1] - [2\omega_{00} - \omega_{33} - \omega_{nn}\,\omega_n] = 0\,,
\end{aligned} \tag{8,2}$$

$$[\omega_{k,k-2}\omega_{k-2,r}] + [\omega_{k,k-1}\omega_{k-1,r}] = 0 \quad (4 \leqq k \leqq d-1,\ 0 \leqq r \leqq k-3), \tag{8,3}$$

$$[\omega_{k,k-1}\omega_{k-1,k-2}\omega_n] = 0 \quad (4 \leqq k \leqq d-1)\,. \tag{8,4}$$

В силу (8,1) можно положить

$$\omega_{j,j-2} = p_j\omega_n \quad (3 \leqq j \leqq d-1)\,, \tag{8,5}$$

причем

$$p_3 = 0\,. \tag{8,5}$$

Заметим, что

$$p_4 \neq 0\,. \tag{8,7}$$

В самом деле, в противном случае мы имеем $\omega_{42} = 0$; но потом, дифференцируя внешним образом равенство $\omega_{40} = 0$ [см. (8,1)], получаем $[\omega_{43}\omega_n] = 0$, а это — противоречие с (6,6).

В силу (8,2) имеем $\omega_{31} = \omega_1 + \alpha_3\omega_n$; учитывая (6,6) получаем из (8,4) методом математической ундукции

$$\omega_{j,j-1} = q_j\omega_1 + \alpha_j\omega_n \quad (3 \leqq j \leqq d-1)\,, \tag{8,8}$$

причем

$$q_3 = 1\,,\quad q_k \neq 0 \quad (4 \leqq k \leqq d-1)\,. \tag{8,9}$$

Полагая $k \geqq 5$, $r = k-3$ в (8,3) и применяя (8,5) и (8,8), получаем

$$p_k q_{k-2} = p_{k-1} q_k \quad (5 \leqq k \leqq d-1)\,, \tag{8,10}$$

так что, согласно (8,7) и (8,9),

$$p_k \neq 0 \quad (4 \leqq k \leqq d-1)\,. \tag{8,11}$$

Из равенств $\omega_{k,k-2} = p_k\omega_n$ $(4 \leqq k \leqq d-1)$ и $[\omega_{43} - q_4\omega_1\omega_n] = 0$ получаем внешним дифференцированием

$$[\mathrm{d}p_k + p_k(\omega_{00} + \omega_{k-2,k-2} - \omega_{kk} - \omega_{nn}) + (q_{k-1}\alpha_k - q_k\alpha_{k-1})\,\omega_1\omega_n] = 0$$
$$(4 \leqq k \leqq d-1)\,,$$

$$[\mathrm{d}q_4 + q_4(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{33} + \omega_{44})\,\omega_1\,\omega_n] = 0\,,$$

так что

$$\delta p_k + p_k(e_{00} + e_{k-2,k-2} - e_{kk} - e_{nn}) = 0 \quad (4 \leqq k \leqq d-1)\,,$$
$$\delta q_4 + q_4(e_{00} - e_{11} - e_{33} + e_{44}) = 0\,.$$

Нетрудно заключить [см. в частности (8,9), (8,10) и (8,11)], что возможна специализация репера, дающая $p_k = q_k = 1$ $(4 \leqq k \leqq d - 1)$ или

$$\omega_{k,k-2} = \omega_n \quad (4 \leqq k \leqq d - 1)\,, \tag{8,12}$$

$$\omega_{j,j-1} = \omega_1 + \alpha_j \omega_n \quad (3 \leqq j \leqq d - 1)\,. \tag{8,13}$$

Внешним дифференцированием вытекает из (8,12)

$$[\omega_{00} + \omega_{k-2,k-2} - \omega_{kk} - \omega_{nn} + (\alpha_k - \alpha_{k-1})\,\omega_1 \omega_n] = 0$$

а из (8,13)

$$\begin{gathered}[\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33}\,\omega_1] + \\ + [\mathrm{d}\alpha_3 + \alpha_3(\omega_{00} + \omega_{22} - \omega_{33} - \omega_{nn}) - \omega_{n1} - \omega_{34} + 2\omega_2\omega_n] = 0\,, \\ [\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{k-1,k-1} - \omega_{kk}\omega_1] + \\ + [\mathrm{d}\alpha_k + \alpha_k(\omega_{00} + \omega_{k-1,k-1} - \omega_{kk} - \omega_{nn}) - \omega_{n1} + \omega_{k-2,k-1} - \omega_{k,k+1} + \\ + \omega_2\omega_n] = 0 \\ \text{для} \quad 4 \leqq k \leqq d - 2\,, \\ [\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{d-2,d-2} - \omega_{d-1,d-1}\omega_1] + \\ + [\mathrm{d}\alpha_{d-1} + \alpha_{d-1}(\omega_{00} + \omega_{d-2,d-2} - \omega_{d-1,d-1} - \omega_{nn}) - \\ - \omega_{n1} + \omega_{d-3,d-2} + \omega_2\omega_n] = 0\,.\end{gathered}$$

Нетрудно заключить, что возможна специализация репера дающая $\alpha_j = 0$ или $\omega_{j,j-1} = \omega_1$ $(3 \leqq j \leqq d - 1)$.

Этим завершена специализация репера и в случае $d \geqq 5$. Окончательно имеем

$$\begin{gathered}\omega_{1n} = \omega_1\,, \quad \omega_{21} = \omega_n, \quad \omega_{20} = \omega_1\,, \quad \omega_{30} = \omega_n\,, \\ \omega_{in} = 0 \quad (2 \leqq i \leqq d - 1)\,, \quad \omega_{31} = 0\,, \\ \omega_{kr} = 0 \quad (4 \leqq k \leqq d - 1,\ 0 \leqq r \leqq k - 3)\,, \\ \omega_{k,k-2} = \omega_n \quad (4 \leqq k \leqq d - 1)\,, \quad \omega_{j,j-1} = \omega_1 \ (3 \leqq j \leqq d - 1)\,, \\ \omega_{st} = 0 \quad (d \leqq s \leqq n - 1,\ 0 \leqq t \leqq n)\,.\end{gathered} \tag{8,14}$$

Внешнее дифференцирование этих равенств дает

$$\begin{aligned}&[\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{nn}\omega_n] = 0\,, \\ &[2\omega_{00} - \omega_{33} - \omega_{nn}\omega_n] = 0\,, \\ &[\omega_{00} + \omega_{k-2,k-2} - \omega_{kk} - \omega_{nn}\omega_n] = 0 \quad (4 \leqq k \leqq d - 1)\,, \\ &[\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{nn}\omega_1] - [\omega_{10} + \omega_{n1} - \omega_2\omega_n] = 0\,, \\ &[\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{nn}\omega_1] + [2\omega_{10} - \omega_{23}\omega_n] = 0\,, \\ &[\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33}\omega_1] - [\omega_{n-1} + \omega_{34} - 2\omega_2\omega_n] = 0\,, \\ &[\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{k-1,k-1} - \omega_{kk}\,\omega_1] + \\ &+ [\omega_{k-2,k-1} - \omega_{k,k+1} - \omega_{n1} + \omega_2\omega_n] = 0 \quad (4 \leqq k \leqq d - 2)\,, \\ &[\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{d-2,d-2} - \omega_{d-1,d-1}\,\omega_1] + [\omega_{d-3,d-2} - \omega_{n1} + \omega_2\omega_n] = 0\,.\end{aligned} \tag{8,15}$$

Введем обозначение:

$$\omega_{11} - \omega_{nn} = \vartheta\,. \tag{8,16}$$

Уравнения (8,15) позволяют положить:

$$\begin{aligned}
&\omega_{00} - \omega_{nn} = \gamma \,.\, \omega_1 + \alpha_1 \,.\, \omega_n + 2\vartheta\,,\\
&\omega_{2r,2r} - \omega_{nn} = r\gamma \,.\, \omega_1 + \alpha_{2r}\omega_n + (2r+1)\vartheta \quad \left(1 \leqq r \leqq \frac{d-1}{2}\right),\\
&\omega_{2s-1,2s-1} - \omega_{nn} = s\gamma \,.\, \omega_1 + \alpha_{2s-1}\omega_n + 2s\vartheta \quad \left(2 \leqq s \leqq \frac{d}{2}\right),
\end{aligned} \tag{8,17}$$

$$\begin{aligned}
&\omega_{n1} + \omega_{10} = -\alpha_1\omega_1 + \omega_2 + \beta_1\omega_n\,,\\
&2\omega_{n1} + \omega_{23} = (\alpha_2 - 3\alpha_1)\,\omega_1 + 2\omega_2 + \beta_2\omega_n\,,\\
&\omega_{n1} + \omega_{34} = (\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2)\,\omega_1 + 2\omega_2 + \beta_3\omega_n\,,\\
&\omega_{n1} + \omega_{k,k+1} - \omega_{k-2,k-1} = (\alpha_k - \alpha_{k-1} - \alpha_1)\,\omega_1 + \omega_2 + \beta_k\omega_n\\
&\qquad\qquad (4 \leqq k \leqq d-2)\,,\\
&\omega_{n1} - \omega_{d-3,d-2} = (\alpha_{d-1} - \alpha_{d-2} - \alpha_1)\,\omega_1 + \omega_2 + \beta_{d-1}\omega_n\,.
\end{aligned} \tag{8,18}$$

Из (8,18) нетрудно вывести, что:

$$\begin{aligned}
(\delta+1)(\omega_{n1} - \omega_2) = (\alpha_{d-1} - \alpha_{d-2} + \ldots - \alpha_3 + \alpha_2 - \overline{\delta+2}\,.\,\alpha_1)\,\omega_1 + \\
+ (\beta_{d-1} + \beta_{d-3} + \ldots + \beta_2)\,\omega_n, \quad \text{если} \quad d = 2\delta + 1 \quad \text{нечетно},
\end{aligned} \tag{8,19}$$

$$\begin{aligned}
(\delta-1)\,\omega_{n1} - \delta\omega_2 = (\alpha_{d-1} - \alpha_{d-2} + \ldots + \alpha_3 - \alpha_2 - \overline{\delta-1}\,.\,\alpha_1)\,\omega_1 + \\
+ (\beta_{d-1} + \beta_{d-3} + \ldots + \beta_3)\,\omega_n\,, \quad \text{если} \quad d = 2\delta \quad \text{четно}.
\end{aligned} \tag{8,20}$$

§ 9. Вернемся к вопросу о специальных проективных изгибаниях параболических слоев. Предметом этого параграфа является классификация таких изгибаний. Напомним прежде всего, что при изучении специальных изгибаний мы решили выбрать касательную коллинеацию K таким образом, что K-линеаризирующая коллинеация Λ переводит всю связку A в K-главную гиперплоскость (1,2). Пусть, как обычно, d $(2 \leqq d \leqq n)$ — класс изгибаемого параболического слоя. Введем пространства (5,7) и обозначим через

$$AS_{n-i-1} \quad (2 \leqq i \leqq d)$$

линейное пространство $n - i$ измерений соединяющее точку A с пространством (5,7) [в случае $i = 2$ (9,1) есть характеристика (3,11), в случае $i = d = n$ — точка A]. Назовем *рангом* специального проективного изгибания параболического слоя класса d неотрицательное целое число H $(0 \leqq H \leqq d)$ определенное следующим образом:

$H = 0$ означает, что в связке A существует прямая z, содержащаяся в K-главной гиперплоскости (1,2), образ Λz которой при K-линеаризирующей коллинеации Λ не содержится в характеристике AS_{n-3};

$H = 1$ означает, что Λ переводит часть связки A, заключенную в K-главной гиперплоскости (1,2), в характеристику AS_{n-3}, причем, однако, в связке A существует прямая z, образ Λz которой при Λ не содержится в AS_{n-3};

$H \geqq 2$ означает, стало быть, что Λ переводит всю связку A в характеристику AS_{n-3}; дальнейшая классификация зависит от множества M, которое является образом при Λ части связки A заключенной в K-главной гиперплоскости (1,2):

если $2 \leqq H \leqq d - 1$, то M является частью пространства AS_{n-H-1}, причем, однако, M не является частью пространства AS_{n-H-2};

$H = d$ означает, что M является частью пространства AS_{n-d-1} ($H = d = n$ означает, стало быть, что Λ вырождается таким образом, что образы Λz всех прямых z связки A содержащихся в K-главной гиперплоскости — неопределенны).

В результате следующих исследований покажется, что если ранг H меньше класса d, то при данных значениях чисел H и d проективные изгибания ранга H всевозможных параболических слоев класса d зависят только от некоторого числа произвольных функций одного переменного. Так как параболические слои произвольно заданного класса d ($2 \leqq d \leqq n - 1$) в пространстве S_n ($n \geqq 3$) зависят, очевидно, от одной произвольной функции *двух* переменных, то мы видим, что специальные проективные изгибания параболических слоев с рангом H меньшем чем класс d слоя имеются налицо, при любом заданном d ($2 \leqq d \leqq n$), только для параболических слоев удовлетворяющих определенным условиям, изучение которых кажется весьма сложным.

Дело обстоит совсем иначе, если ранг H равен классу d. В случае $d = n$ покажется, что такие специальные проективные изгибания невозможны; если же $d < n$, то они существуют для всякого параболического слоя класса d.

Учитывая с одной стороны аналитическое выражение (4,16)—(4,18) K-линеаризирующей коллинеации Λ, а с другой — введенную выше специализацию репера (6,1), мы видим [см. также (4,5)—(4,7)], что

$$\tau_{11} - \tau_{00} \neq 0 \quad \text{в случае } H = 0\,, \tag{9,2}$$

$$\tau_{11} - \tau_{00} = 0\,, \quad \tau_{10} \neq 0 \quad \text{в случае } H = 1\,, \tag{9,3}$$

$$\tau_{11} - \tau_{00} = \tau_{10} = \tau_{1r} = 0 \quad (2 \leqq r \leqq d - 1) \quad \text{в случае } H = d\,, \tag{9,4}$$

$$\tau_{11} - \tau_{00} = \tau_{10} = \tau_{1r} = 0 \quad (2 \leqq r \leqq H - 1)\,, \quad \tau_{1H} \neq 0 \quad \text{в случае } 2 \leqq H \leqq d - 1\,. \tag{9,5}$$

§ 10. Из предыдущих соображений нетрудно вытекает, что специальные проективные изгибания произвольно заданного параболического слоя в пространстве S_n даны дифференциальной системой

$$\begin{aligned}
&\tau_{01} = \tau_{02} = \ldots = \tau_{0n} = 0\,,\\
&\tau_{1n} = \ldots = \tau_{n-1,n} = 0\,, \quad \tau_{nn} - \tau_{00} = 0\,,\\
&\tau_{i0} = \tau_{i1} = \tau_{ij} = 0 \quad (2 \leqq i,\ j \leqq n - 1,\ i \neq j)\,,\\
&[\tau_{11} - \tau_{00}\omega_n] = 0\,, \quad [\tau_{1i}\omega_n] = 0 \quad (2 \leqq i \leqq n - 1)\,,\\
&\tau_{10} = \tau_{n1}\,, \quad \tau_{11} + \tau_{ii} - 2\tau_{00} = 0 \quad (2 \leqq i \leqq n - 1)\,.
\end{aligned} \tag{10,1}$$

Используя введенные выше соотношения [см. (4,1) ,(4,2) и (7,7)], мы видим, что внешним дифференцированием равенств (10,1) получается:

$$\begin{aligned}
&[\tau_{11} - \tau_{00}\omega_1] + [\tau_{10}\omega_n] = 0 \\
&[\tau_{11} - \tau_{00}\omega_i] = [\tau_{1i}\omega_1] + [\tau_{ni}\omega_n] \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,, \\
&[\omega_{i1}\tau_{10}] + [\omega_{i0}\tau_{11} - \tau_{00}] = 0 \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,, \\
&[\tau_{10}\omega_1] + [\tau_{n0}\omega_n] = 0\,, \\
&[2\tau_{10} + \omega_{10} + \omega_{n1}\tau_{11} - \tau_{00}] - [\tau_{10}\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{nn}] + \\
&\qquad + 2[\tau_{n0}\omega_1] + \sum_{i=2}^{n-1}([\omega_{i0}\tau_{1i}] - [\omega_{i1}\tau_{ni}]) = 0\,.
\end{aligned} \tag{10,2}$$

Приступим последовательно к изучению отделных случаев $d = 2$, $d = 3$, $d = 4$ и $d \geqq 5$. В этом параграфе мы ограничимся случаем $d = 2$. Если $d = 2$, то в силу (7,8) соотношения (10,2) перепишутся в виде:

$$\begin{aligned}
&[\tau_{11} - \tau_{00}\omega_1] + [\tau_{10}\omega_n] = 0\,, \\
&[\tau_{11} - \tau_{00}\omega_i] = [\tau_{1i}\omega_1] + [\tau_{ni}\omega_n] \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,, \\
&[\tau_{10}\omega_1] + [\tau_{n0}\omega_n] = 0\,, \\
&[2\tau_{10} + \omega_{10} + \omega_{n1}\tau_{11} - \tau_{00}] - [\tau_{10}\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{nn}] + \\
&\qquad\qquad + 2[\tau_{n0}\omega_1] = 0\,.
\end{aligned} \tag{10,3}$$

Уравнения (7,9) и (10,3) показывают, что система (7,8) + (10,1) находится в инволюции с решением зависящим от $2n + 1$ функций одного переменного, пока $\tau_{11} - \tau_{00} \neq 0$. Пусть

$$\tau_{11} - \tau_{00} = 0\,. \tag{10,4}$$

Внешнее дифференцирование равенства (10,4) не дает ничего нового. Нетрудно видеть, что система (7,8) + (10,1) + (10,4) находится в инволюции с решением зависящим от $2n$ функций одного переменного, пока $\tau_{10} \neq 0$. Если же $\tau_{10} = 0$, то из (10,3) следует $[\tau_{n0}\omega_1] = [\tau_{n0}\omega_n] = 0$, так что

$$\tau_{10} = \tau_{n0} = 0\,. \tag{10,5}$$

Внешнее дифференцирование равенств (10,5) не дает ничего нового. В силу (10,4) и (10,5) соотношения (10,3) дают только

$$[\tau_{1i}\omega_1] + [\tau_{ni}\omega_n] = 0 \quad (2 \leqq i \leqq n-1)$$

и мы видим, что при произвольно заданном параболическом слое класса 2 система (10,1) + (10,4) + (10,5), т. е. система

$$\begin{aligned}
&\tau_{01} = \tau_{02} = \ldots = \tau_{0n} = 0\,, \\
&\tau_{1n} = \ldots = \tau_{n-1,n} = 0\,, \quad \tau_{00} = \tau_{11} = \ldots = \tau_{nn}\,, \\
&\tau_{10} = \tau_{20} = \ldots = \tau_{n0} = 0\,, \quad \tau_{n1} = 0\,, \\
&\tau_{i1} = \tau_{ij} = [\tau_{1i}\omega_n] = 0 \quad (2 \leqq i \leqq n-1)
\end{aligned}$$

находится в инволюции с решением зависящим от $2n - 4$ функций одного переменного.

Итак мы показали [см. (9,2)—(9,4)]:

Специальные проективные изгибания ранга $H = 0$ параболических слоев класса 2 зависят от $2n + 1$ функций одного переменного. Специальные проективные изгибания ранга $H = 1$ параболических слоев класса 2 зависят от $2n$ функций одного переменного. Всякий параболический слой класса 2 допускает специальные проективные изгибания ранга $H = 2$, зависящие от $2n - 4$ функций одного переменного.

§ 11. Если $d = 3$, то в силу (7,10) соотношения (10,2) перепишутся в виде:

$$\begin{aligned}
&[\tau_{11} - \tau_{00}\omega_1] + [\tau_{10}\omega_n] = 0 \, , \\
&[\tau_{11} - \tau_{00}\omega_i] = [\tau_{1i}\,\omega_1] + [\tau_{ni}\omega_n] \quad (2 \leqq i \leqq n-1) \, , \\
&[\tau_{10}\omega_1] + [\tau_{n0}\omega_n] = 0 \, , \\
&[2\tau_{10} + \omega_{10} + \omega_{n1}\tau_{11} - \tau_{00}] - [\tau_{10}\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{nn}] + \\
&\qquad + [2\tau_{n0} - \tau_{12}\omega_1] + [\tau_{n2}\omega_n] = 0 \, .
\end{aligned} \tag{11,1}$$

Уравнения (7,11) и (11,1) показывают, что система (7,10)+ (10,1) находится в инволюции с решением зависящим от $2n + 3$ функций одного переменного, пока $\tau_{11} - \tau_{00} \neq 0$. Пусть

$$\tau_{11} - \tau_{00} = 0 \, . \tag{11,2}$$

Внешнее дифференцирование равенства (11,2) не дает ничего нового. Нетрудно видеть, что система (7,10) + (10,1) + (11,2) находится в инволюции с решением зависящим от $2n + 2$ функций одного переменного, пока $\tau_{10} \neq 0$. Если же $\tau_{10} = 0$, то из (10,1) и (11,1) следует $[\tau_{n0} - \tau_{12}\omega_1] \doteq = [\tau_{n0} - \tau_{12}\omega_n] = 0$, так что

$$\tau_{10} = \tau_{n0} - \tau_{12} = 0 \, . \tag{11,3}$$

Внешнее дифференцирование равенств (11,3) дает $[\tau_{n2}\omega_1] = 0$; так как $[\tau_{12}\omega_n] = [\tau_{12}\omega_1] + [\tau_{n2}\omega_n] = 0$, то мы положим

$$\tau_{12} = a_2\omega_n \, , \quad \tau_{n2} = a_2\omega_1 \, ; \tag{11,4}$$

дифференцируя внешним образом, получаем

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{d}a_2 + a_2(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{nn})\,\omega_n] = 0 \, , \\
&[\mathrm{d}a_2 + a_2(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{nn})\,\omega_1] - 2a_2[\omega_{n1} - \omega_2\,\omega_n] = 0 \, .
\end{aligned} \tag{11,5}$$

Уравнения (7,11) + (11,1) + (11,5) показывают, что система (7,10) + + (10,1) + (11,2) + (11,3) + (11,4) находится в инволюции с решением зависящим от $2n - 1$ функций одного переменного, пока $a_2 \neq 0$ или $\tau_{12} \neq 0$. Если $\tau_{12} = 0$, то

$$\tau_{10} = \tau_{n0} = \tau_{12} = \tau_{n2} = 0 \, , \tag{11,6}$$

откуда внешним дифференцированием ничего нового не получаем. При данном параболическом слое класса 3 система (10,1) + (11,2) + (11,6) имеет условия интегрируемости

$$[\tau_{1j}\omega_1] + [\tau_{nj}\omega_n] = 0 \quad (3 \leqq j \leqq n-1) \, ,$$

так что для $n \geqq 4$ она находится в инволюции с решением зависящим от $2n - 6$ функций одного переменного; если же $n = 3$, то дело сводится к *коллинейному* соответствию между S_3 и S'_3.

Итак мы показали [см. (9,2)—(9,5)]:

Специальные проективные изгибания ранга $H = 0$ или $H = 1$ или $H = 2$ параболических слоев класса 3 зависят от

$2n + 3$ *функций одного переменного в случае* $H = 0$,
$2n + 2$ *функций одного переменного в случае* $H = 1$,
$2n - 1$ *функций одного переменного в случае* $H = 2$.

В пространстве S_3 не существуют специальные проективные изгибания ранга $H = 3$; напротив, если $n \geqq 4$, то всякий параболический слой класса 3 допускает специальные проективные изгибания ранга 3 зависящие от $2n - 6$ функций одного переменного.

§ 12. Если $d = 4$, то в силу (7,12) соотношения (10,2) перепишутся опять таки в виде (11,1). Уравнения (7,13) и (11,1) показывают, что система (7,12) + (10,1) находится в инволюции с решением зависящим от $2n + 5$ функций одного переменного, пока $\tau_{11} - \tau_{00} \neq 0$. Пусть

$$\tau_{11} - \tau_{00} = 0\,. \tag{12,1}$$

Внешнее дифференцирование равенства (12,1) не дает ничего нового. Нетрудно видеть, что система (7,12) + (10,1) + (12,1) находится в инволюции с решением зависящим от $2n + 4$ функций одного переменного, пока $\tau_{10} \neq 0$. Если же $\tau_{10} = 0$, то из (10,1) и (11,1) следует $[\tau_{n0} - \tau_{12}\omega_1] = [\tau_{n0} - \tau_{12}\omega_n] = 0$, откуда опять получаем (11,3). Внешнее дифференцирование равенств (11,3) дает $[\tau_{n2} - \tau_{13}\omega_1] = 0$; так как $[\tau_{12}\omega_n] = [\tau_{12}\omega_1] + [\tau_{n2}\omega_n] = [\tau_{13}\omega_n] = 0$, то мы положим

$$\tau_{12} = a_2\omega_n, \quad \tau_{n2} - \tau_{13} = a_2\omega_1\,; \tag{12,2}$$

дифференцируя внешним образом, получаем

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{d}a_2 + a_2(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{nn})\,\omega_n] = 0\,,\\
&[\mathrm{d}a_2 + a_2(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{nn})\,\omega_1] +\\
&\quad + [a_3(\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33} - \omega_{nn}) - a_2(2\omega_{n1} + \omega_{23} - 2\omega_2) +\\
&\quad + (4c_3 - ta_3)\,\omega_1\omega_n] = 0\,,
\end{aligned} \tag{12,3}$$

где мы положили, согласно (7,13), (10,1), (11,1) и (12,1),

$$\omega_{32} = \omega_1 + t\omega_n\,, \quad \tau_{13} = a_3\omega_n\,, \quad \tau_{n3} = a_3\omega_1 + 2c_3\omega_n\,. \tag{12,4}$$

Уравнения (7,13) + (11,1) + (12,3) + (12,4) показывают, что система (7,12) + (10,1) + (12,1) + (11,3) + (12,2) находится в инволюции с решением зависящим от $2n + 1$ функций одного переменного. пока $a_2 \neq 0$ или $\tau_{12} \neq 0$. Если $\tau_{12} = 0$, то

$$\tau_{10} = \tau_{n0} = \tau_{12} = \tau_{n2} - \tau_{13} = 0\,. \tag{12,5}$$

Нетрудно видеть, что система (7,12) + (10,1) + (12,1) + (12,5) находится в инволюции с решением зависящим от $2n$ функций одного переменного, пока $\tau_{13} \neq 0$. Если $\tau_{13} = 0$, то в (12,3) имеется $a_2 = a_3 = 0$ и, стало быть, $c_3 = 0$, т. е.

$$\tau_{13} = \tau_{n3} = 0 \,. \tag{12,6}$$

Внешнее дифференцирование не дает ничего нового. При данном параболическом слое класса 4 система (10,1) + (12,1) + (12,5) + (12,6) имеет условия интегрируемости

$$[\tau_{1k}\omega_1] + [\tau_{nk}\omega_n] = 0 \quad (4 \leqq k \leqq n - 1)\,,$$

так что для $n \geqq 5$ она находится в инволюции с решением зависящим от $2n - 8$ функций одного переменного; если же $n = 4$, то дело сводится к *коллинейному* соответствию между S_4 и S'_4.

Итак мы показали [см. (9,2)—(9,5)]:

Специальные проективные изгибания ранга $H = 0$ или $H = 1$ или $H = 2$ или $H = 3$ параболических слоев класса 4 в пространстве S_n $(n \geqq 4)$ зависят от

$2n + 5$ *функций одного переменного в случае* $H = 0$,
$2n + 4$ *функций одного переменного в случае* $H = 1$,
$2n + 1$ *функций одного переменного в случае* $H = 2$,
$2n$ *функций одного переменного в случае* $H = 3$.

В пространстве S_4 не существуют специальные проективные изгибания ранга $H = 4$; напротив, если $n \geqq 5$, то всякий параболический слой класса 4 допускает специальные проективные изгибания ранга 4 зависящие от $2n - 8$ функций одного переменного.

§ 13. Если $d \geqq 5$, то в силу (8,14) соотношения (10,2) снова можно переписать в виде (11,1). Уравнения (8,15) и (11,1) показывают, что система (8,14) + (10,1) находится в инволюции с решением зависящим от $2n + 2d - 3$ функций одного переменного, пока $\tau_{11} - \tau_{00} \neq 0$. Пусть

$$\tau_{11} - \tau_{00} = 0 \,. \tag{13,1}$$

Внешнее дифференцирование равенства (13,1) не дает ничего нового. Нетрудно видеть, что система (8,14) + (10,1) + (13,1) находится в инволюции с решением зависящим от $2n + 2d - 4$ функций одного переменного, пока $\tau_{10} \neq 0$. Если же $\tau_{10} = 0$, то из (10,1) и (11,1) следует $[\tau_{n0} - \tau_{12}\omega_1] = [\tau_{n0} - \tau_{12}\,\omega_n] = 0$ и мы снова получаем (11,3). Внешнее дифференцирование равенств (11,3) дает, как и прежде, $[\tau_{n2} - \tau_{13}\omega_1] = 0$, и мы снова имеем равенства (12,2), внешнее дифференцирование которых дает

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{d}a_2 + a_2(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{nn})\,\omega_n] = 0\,,\\
&[\mathrm{d}a_2 + a_2(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{nn})\,\omega_1] + \\
&\quad + [a_3(\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33} - \omega_{nn}) - a_2(2\omega_{n1} + \omega_{23} - 2\omega_2) + \\
&\quad + 2(2c_3 - a_4)\,\omega_1\omega_n] = 0\,,
\end{aligned} \tag{13,2}$$

где мы положили, согласно (10,1), (11,1) и (13,1),

$$\tau_{13} = a_3\omega_n\,, \quad \tau_{n3} = a_3\omega_1 + 2c_3\omega_n\,, \quad \tau_{14} = a_4\omega_n\,. \tag{13,3}$$

Уравнения (8,15) + (11,1) + (13,2) + (13,3) показывают, что система (8,14) + (10,1) + (13,1) + (11,3) + (12,2) находится в инволюции с решением зависящим от $2n + 2d - 7$ функций одного переменного, пока $a_2 \neq 0$ или $\tau_{12} \neq 0$. Если $\tau_{12} = 0$, то опять получаем (12,5). Нетрудно видеть, что система (8,14) + (10,1) + (13,1) + (12,5) находится в инволюции с решением зависящим от $2n + 2d - 8$ функций одного переменного, пока $a_3 \neq 0$ или $\tau_{13} \neq 0$.

Предположим теперь, что при определенном H, где $4 \leqq H \leqq d - 2$, мы имеем

$$\tau_{11} - \tau_{00} = \tau_{10} = \tau_{n0} = 0\,, \quad \tau_{1r} = 0 \quad (2 \leqq r \leqq H - 1)\,, \tag{13,4}$$

в то время как

$$\tau_{1H} \neq 0\,. \tag{13,5}$$

Внешнее дифференцирование равенств (13,4) дает $[\tau_{1,r+1} - \tau_{nr}\omega_1] = 0$ $(2 \leqq r \leqq H - 1)$; с другой стороны мы имеем $[\tau_{nr}\omega_n] = 0$, $[\tau_{1,r+1}\omega_n] = 0$, так что $\tau_{1,r+1} - \tau_{nr} = 0$ $(2 \leqq r \leqq H - 1)$ или

$$\tau_{ns} = 0 \quad (2 \leqq s \leqq H - 2)\,, \tag{13,6}$$

$$\tau_{n,H-1} = \tau_{1,H}\,. \tag{13,7}$$

Внешнее дифференцирование равенств (13,6) не дает ничего нового; из (13,7) получается внешним дифференцированием

$$2[\tau_{1,H+1} - \tau_{nH}\omega_1] + [\omega_{11} + \omega_{H-1,H-1} - \omega_{HH} - \omega_{nn}\,\tau_{1H}] = 0\,. \tag{13,8}$$

Теперь мы должны различать два случая. Пусть сперва H нечетно. Тогда из (8,16) и (8,17) вытекает

$$\omega_{11} + \omega_{H-1,H-1} - \omega_{HH} - \omega_{nn} = -\gamma\omega_1 + (\alpha_{H-1} - \alpha_H)\,\omega_n\,,$$

так что при нашем обычном обозначении:

$$\tau_{1H} = a_H\omega_n\,, \quad \tau_{nH} = a_H\omega_1 + 2c_H\omega_n\,, \quad \tau_{1,H+1} = a_{H+1}\omega_n$$

(13,8) дает

$$\gamma a_H + 2(a_{H+1} - 2c_H) = 0\,.$$

Дифференциальная система (8,14) + (10,1) + (13,4) + (13,6) + (13,7) имеет условия интегрируемости (8,15) + (11,1) + (13,8) и нетрудно заключить, что при условии (13,5) она находится в инволюции с решением зависящим от $2(n + d - H - 1)$ функций одного переменного. Перейдем к случаю, когда H четно. Тогда из (8,16) и (8,17) вытекает

$$\omega_{11} + \omega_{H-1,H-1} - \omega_{HH} - \omega_{nn} = (\alpha_{H-1} - \alpha_H)\,\omega_n$$

и (13,8) перепишется в виде

$$[\tau_{1,H+1} - \tau_{nH}\omega_1] = 0\,;$$

так как

$$[\tau_{1H}\omega_n] = [\tau_{1H}\omega_1] + [\tau_{nH}\omega_n] = [\tau_{1,H+1}\omega_n] = 0\,,$$

то мы положим

$$\tau_{1H} = a_H\omega_n\,, \quad \tau_{nH} - \tau_{1,H+1} = a_H\omega_1\,. \tag{13,9}$$

Из (13,9) следует внешним дифференцированием

$$[\mathrm{d}a_H + a_H(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{HH} - \omega_{nn})\,\omega_n] = 0\,, \tag{13,10}$$

$$\begin{aligned}&[\mathrm{d}a_H + a_H(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{HH} - \omega_{nn}) + \\ &+ (\omega_{11} + \omega_{HH} - \omega_{H+1,H+1} - \omega_{nn})\,\tau_{1,H+1} + 2\varphi\omega_1] + \\ &+ a_H[\omega_{H-1,H} - \omega_{H,H+1} - 2\omega_{n1} + \omega_2\omega_n] = 0\,,\end{aligned} \tag{13,11}$$

где

$$\varphi = \tau_{1,H+2} - \tau_{n,H+1}\,, \quad \text{если } 4 \leqq H \leqq d - 3\,,$$

$$\varphi = -\tau_{n,H+1}\,, \quad \text{если } H = d - 2\,.$$

Положим

$$\tau_{1,H+1} = a_{H+1}\omega_n\,, \quad \varphi = f_1\omega_1 + f_2\omega_n$$

и, согласно (13,10),

$$\mathrm{d}a_H + a_H(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{HH} - \omega_{nn}) = \lambda\omega_n\,.$$

Так как H четно, то из (8,16) и (8,17) можно вывести, что

$$\omega_{11} + \omega_{HH} - \omega_{H+1,H+1} - \omega_{nn} = -\gamma\omega_1 + (\alpha_H - \alpha_{H+1})\,\omega_n\,,$$

и затем из (8,18), что

$$\begin{aligned}\omega_{H-1,H} - \omega_{H,H+1} - 2\omega_{n1} + \omega_2 = (-\alpha_H + 2\,.\,\overline{\alpha_{H-1} - \alpha_{H-2} + \ldots - \alpha_2} + 3\alpha_1)\omega_1 - \\ - (\beta_H - \beta_{H-1} + \ldots + \beta_2)\,\omega_n\,.\end{aligned}$$

В результате всех этих формул получаем из (13,11):

$$\lambda + a_{H+1}(\alpha_H - \alpha_{H+1}) + 2f_2 = a_H[\alpha_H - 2(\alpha_{H-1} - \alpha_{H-2} + \ldots + \alpha_2) - 3\alpha_1]\,.$$

Теперь уже нетрудно видеть, что система (8,14) + (10,1) + (13,4) + + (13,6) + (13,7) + (13,9) при условии (13,5) находится в инволюции с решением завсящим от $2(n + d - H - 2)$ функций одного переменного.

Пусть теперь

$$\tau_{11} - \tau_{00} = \tau_{10} = \tau_{n0} = 0\,, \quad \tau_{1r} = 0 \quad (2 \leqq r \leqq d - 2)\,, \tag{13,12}$$

в то время как

$$\tau_{1,d-1} \neq 0\,. \tag{13,13}$$

Внешнее дифференцирование равенств (13,12) дает $[\tau_{ns}\omega_1] = 0$ $(2 \leqq s \leqq \leqq d - 3)$, $[\tau_{n,d-2} - \tau_{1,d-1}\,\omega_1] = 0$; так как $[\tau_{nr}\omega_n] = 0$ $(2 \leqq r \leqq d - 2)$, $[\tau_{1,d-1}\omega_n] = 0$, то получаем

$$\tau_{ns} = 0 \quad (2 \leqq s \leqq d-3)\,, \tag{13,14}$$

$$\tau_{n,d-2} = \tau_{1,d-1}\,. \tag{13,15}$$

Внешнее дифференцирование равенств (13,14) не дает ничего нового; из (13,15) получаем внешним дифференцированием

$$2[\tau_{n,d-1}\,\omega_1] - [\omega_{11} + \omega_{d-2,d-2} - \omega_{d-1,d-1} - \omega_{nn}\,\tau_{1,d-1}] = 0\,. \tag{13,16}$$

Пусть сперва d четно. Тогда из (8,16) и (8,17) вытекает

$$\omega_{11} + \omega_{d-2,d-2} - \omega_{d-1,d-1} - \omega_{nn} = -\gamma\omega_1 + (\alpha_{d-2} - \alpha_{d-1})\,\omega_n\,,$$

так что при обычном обозначении

$$\tau_{1,d-1} = a_{d-1}\omega_n\,, \quad \tau_{n,d-1} = a_{d-1}\omega_1 + 2c_{d-1}\omega_n$$

(13,16) дает

$$\gamma a_{d-1} + 4c_{d-1} = 0\,.$$

Дифференциальная система (8,14) + (10,1) + (13,12) + (13,14) + (13,15) с условиями интегрируемости (8,15) + (11,1) + (13,8), очевидно, при условии (13,13) находится в инволюции с решением зависящим от $2n$ функций одного переменного. Пусть теперь d нечетно. Из (8,16) и (8,17) следует

$$\omega_{11} + \omega_{d-2,d-2} - \omega_{d-1,d-1} - \omega_{nn} = (\alpha_{d-2} - \alpha_{d-1})\,\omega_n$$

и (13,16) дает $[\tau_{n,d-1}\omega_1] = 0$, так что можно положить

$$\tau_{1,d-1} = a_{d-1}\omega_n\,, \qquad \tau_{n,d-1} = a_{d-1}\omega_1\,. \tag{13,17}$$

Внешнее дифференцирование дает

$$[\mathrm{d}a_{d-1} + a_{d-1}(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{d-1,d-1} - \omega_{nn})\,\omega_n] = 0\,,$$

$$[\mathrm{d}a_{d-1} + a_{d-1}(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{d-1,d-1} - \omega_{nn})\,\omega_1] + \tag{13,18}$$

$$+ a_{d-1}[\omega_{d-2,d-1} - 2\omega_{n1} + \omega_2\,\omega_n] = 0\,. \tag{13,1)}$$

Так как d нечетно, то из (8,18) и (8,19) можно вывести

$$\omega_{d-2,d-1} - 2\omega_{n1} + \omega_2 = (-\alpha_{d-1} + 2\,.\,\overline{\alpha_{d-2} - \alpha_{d-3} + \ldots - \alpha_2} - d\alpha_1)\,\omega_1 -$$
$$- (\beta_{d-1} - \beta_{d-2} + \ldots + \beta_2)\,\omega_n,$$

так что по (13,18) и (13,19)

$$\mathrm{d}a_{d-1} + a_{d-1}(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{d-1,d-1} - \omega_{nn}) = \lambda\omega_n\,,$$
$$\lambda + a_{d-1}[\alpha_{d-1} - 2(\alpha_{d-2} - \alpha_{d-3} + \ldots - \alpha_2) + d\alpha_1] = 0\,.$$

Теперь уже нетрудно заключить, что система (8,14) + (10,1) + (13,12) + + (13,14) + (13,15) + (13,17) при условии (13,14) находится в инволюции с решением зависящим от $2(n-1)$ функций одного переменного.

Остается случай

$$\tau_{11} - \tau_{00} = \tau_{10} = \tau_{n0} = 0\,, \quad \tau_{1r} = 0 \quad (2 \leqq r \leqq d-1)\,. \tag{13,17}$$

Из (13,17) следует внешним дифференцированием $[\tau_{nr}\omega_1] = 0\ (2 \leqq r \leqq d-1)$; но (11,1) дает $[\tau_{nr}\omega_n] = 0\ (2 \leqq r \leqq d-1)$, так что

$$\tau_{nr} = 0 \quad (2 \leqq r \leqq d-1)\,. \tag{13,18}$$

Если $n > d$, то при произвольно заданном параболическом слое класса d в пространстве S_n дифференциальная система (10,1) + (13,17) + (13,18) имеет условия интегрируемости

$$[\tau_{1s}\omega_1] + [\tau_{ns}\omega_n] = 0 \quad (d \leqq s \leqq n-1)\,,$$

так что система находится в инволюции с решением зависящим от $2(n-d)$ функций одного переменного; если же $n = d$, то дело сводится к *коллинейному* соответствию между S_n и S'_n.

Итак, мы в этом параграфе показали [см. (9,2)—(9,5)]:

Пусть $5 \leqq d \leqq n$. *Специальные проективные изгибания ранга* $H = 0$ *или* $H = 1$ *или* $H = 2$ *или* $H = 3$ *параболических слоев класса* d *в пространстве* S_n *зависят от*

$2(n+d) - 3$ *функций одного переменного в случае* $H = 0$,
$2(n+d) - 4$ *функций одного переменного в случае* $H = 1$,
$2(n+d) - 7$ *функций одного переменного в случае* $H = 2$,
$2(n+d) - 8$ *функций одного переменного в случае* $H = 3$.

Если $4 \leqq H \leqq d-1$, *то специальные проективные изгибания ранга* H *параболических слоев класса* d *зависят при нечетном* H *от* $2(n+d-H-1)$, *при четном* H *от* $2(n+d-H-2)$ *функций одного переменного. В пространстве* S_d *не существуют специальные проективные изгибания ранга* $H = d$; *напротив, если* $n > d$, *то всякий параболический слой класса* d *допускает специальные проективные изгибания ранга* d *зависящие от* $2(n-d)$ *функций одного переменного.*

§ 14. В предыдущих параграфах мы разобрали до конца специальные проективные изгибания *параболических* слоев гиперповерхностей. Как мы узнали в § 3, для $n \geqq 4$ этим и исчерпывается задача настоящей статьи. Для $n = 3$, однако, остается изучать специальные проективные изгибания слоя *неразвертывающихся* поверхностей в пространстве S_3.

В § 3 мы ввели специализацию репера (3,1), где теперь $n = 3$, $\varepsilon_1 \neq 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$. В силу такой специализации уравнение

$$\omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} = 0 \tag{14,1}$$

асимптотических кривых на K-главной поверхности $\omega_3 = 0$ имеет вид $\varepsilon_1\omega_1^2 + \varepsilon_2\omega_2^2 = 0$. Однако, мы теперь предпочитаем другую специализацию, вследствие которой уравнение (14,1) приобретает вид $\omega_1\omega_2 = 0$. Аналитически теперешняя специализация выражается равенствами

$$\omega_{13} = \alpha\omega_2 + \beta_1\omega_3\,, \quad \omega_{23} = \alpha\omega_1 + \beta_2\omega_3\,. \tag{*}$$

[Оба коэффициента α равны друг другу согласно (2,1).] Заметим, что $\alpha \neq 0$.

Внешним дифференцированием равенств (*) получается:

$$\begin{aligned} &\delta\alpha + \alpha(e_{00} - e_{11} - e_{22} + e_{33}) = 0\,, \\ &\delta\beta_1 + \beta_1(e_{00} - e_{11}) - e_{10} - \alpha e_{32} = 0\,, \\ &\delta\beta_2 + \beta_2(e_{00} - e_{22}) - e_{20} - \alpha e_{31} = 0\,, \\ &e_{10} = e_{20} = 0\,. \end{aligned} \tag{14,15}$$

Так как $\alpha \neq 0$, то возможна специализация репера дающая $\alpha = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ или

$$\omega_{13} = \omega_2\,, \quad \omega_{23} = \omega_1\,. \tag{14,2}$$

Изучаемые проективные изгибания даны дифференциальной системой (1,3), условия интегрируемости которой мы привели в вид (1,9)—(1,13), где теперь $n = 3$. Подставляя (14,2) в (1,13), получаем

$$a_{11} = a_{22} = 0\,. \tag{14,3}$$

В силу (14,3) мы перепишем (2,4) в виде

$$\varphi_1 = a_{21}\omega_2 + c_1\omega_3\,, \quad \varphi_2 = a_{12}\omega_1 + c_2\omega_3\,. \tag{14,4}$$

Так как мы должны исключить случай, когда отношение $\varphi_1 : \varphi_2$ независит от $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, то возможны три случая:

$$a_{12} = 0\,, \quad a_{21} \neq 0\,, \tag{14,5}$$
$$a_{12} \neq 0\,, \quad a_{21} = 0\,, \tag{14,5'}$$
$$a_{12} \neq 0\,, \quad a_{21} \neq 0\,. \tag{14,6}$$

Очевидно, что (14,5) и (14,5′) отличаются друг от друга лишь формально, так что речь будет идти только о двух случаях (14,5) и (14,6).

Начнем со случая (14,5) полагая, для краткости, $a_{21} = a$. Равенства (1,9)—(1,12) перепишутся в виде:

$$\tau_{11} - \tau_{00} = \tau_{22} - \tau_{00} = \tau_{12} = 0\,, \tag{14,7}$$
$$\tau_{21} = a\omega_3 \quad (a \neq 0)\,, \tag{14,8}$$
$$\tau_{31} = a\omega_2 + 2c_1\omega_3\,, \quad \tau_{32} = 2c_2\omega_3\,, \tag{14,9}$$
$$\tau_{10} = 2b_1\omega_3\,, \quad \tau_{20} = a\omega_2 + 2b_2\omega_3\,, \tag{14,10}$$
$$\tau_{30} = (b_1 + c_2)\,\omega_1 + (b_2 + c_1)\,\omega_2 + f\omega_3\,. \tag{14,11}$$

Внешнее дифференцирование равенств (14,7) дает с одной стороны

$$[a\omega_{12} - 2b_1\omega_1 + 2b_2\omega_2\,\omega_3] = 0\,, \tag{14,12}$$

а с другой $c_1 = b_2$, $c_2 = b_1$, так что вместо (14,9) и (14,11) мы будем иметь

$$\tau_{31} = a\omega_2 + 2b_2\omega_3\,, \quad \tau_{32} = 2b_1\omega_3\,, \tag{14,13}$$
$$\tau_{30} = 2b_1\omega_1 + 2b_2\omega_2 + f\omega_3\,. \tag{14,14}$$

Из (14,8) следует внешним дифференцированием $\delta a + a(e_{00} + e_{11} - e_{22} - e_{33}) = 0$, так что можно положить $a = 1$ или $\tau_{21} = \omega_3$. Если же $a = 1$, то из (14,9) следует внешним дифференцированием

$$\delta b_1 + b_1(2e_{00} - e_{11} - e_{33}) = 0\,,$$
$$2\,.\,\delta b_2 + 2b_2(2e_{00} - e_{22} - e_{33}) + e_{10} - e_{32} = 0\,.$$

Равенства (14,4) теперь имеют вид

$$\varphi_1 = \omega_1 + b_2\omega_3,\quad \varphi_2 = b_1\omega_3,$$

так что гипотезу $b_1 = 0$ надо отвергнуть; поэтому можно специализацией репера добиться равенств $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = 0$.

Все вместе дает дифференциальную систему

$$\begin{gathered}\omega_{13} = \omega_2\,,\quad \omega_{23} = \omega_1\,,\\ \tau_{01} = \tau_{02} = \tau_{03} = 0\,,\quad \tau_{13} = \tau_{23} = 0\,,\\ \tau_{00} = \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33}\,,\\ \tau_{12} = 0,\quad \tau_{21} = \tau_{10} = \tau_{32} = \omega_2\,,\quad \tau_{20} = \tau_{31} = \omega_2\,.\end{gathered}$$

Внешнее дифференцирование равенств (14,15) дает

$$\begin{gathered}[\omega_{00} - \omega_{33}\omega_3] = 0\,,\quad [\omega_{11} - \omega_{22}\omega_3] = 0\,,\\ [\omega_{12} - \omega_1\omega_3] = 0\,,\qquad [\tau_{30} - \omega_1\omega_3] = 0\,,\\ [\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}\omega_2] + [\omega_{10} - \omega_{32}\omega_3] = 0\,,\\ -2[\omega_{12}\omega_1] + [\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}\omega_2] - [\omega_{10} + \omega_{32}\omega_3] = 0\,,\\ [\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}\omega_1] - 2[\omega_{21}\omega_2] - [\omega_{20} + \omega_{31}\omega_3] = 0\,,\\ [\tau_{30} - \omega_{12}\omega_2] + [\omega_{00} - \omega_{11}\omega_3] = 0\,,\\ [\tau_{30} - \omega_{12}\omega_1] + 2[\omega_{00} - \omega_{22}\omega_2] + [\omega_{10} - \omega_{21} - \omega_{32}\omega_3] = 0\,.\end{gathered} \tag{14,16}$$

Из (14,16) нетрудно вытекает, что система (14,15) находится в инволюции с решением зависящим от 9 функций одного переменного.

Перейдем к случаю (14,6). Равенства (1,9)—(1,12) перепишутся, учитывая (14,2) и (14,3), в виде

$$\tau_{11} - \tau_{00} = 0\,,\quad \tau_{22} - \tau_{00} = 0\,, \tag{14,17}$$
$$\tau_{12} = a_{12}\omega_3\,,\quad \tau_{21} = a_{21}\omega_3\,, \tag{14,18}$$
$$\tau_{31} = a_{21}\omega_2 + 2c_1\omega_3\,,\quad \tau_{32} = a_{12}\omega_1 + 2c_2\omega_3\,, \tag{14,19}$$
$$\tau_{10} = a_{12}\omega_1 + 2b_1\omega_3\,,\quad \tau_{20} = a_{21}\omega_2 + 2b_2\omega_3\,, \tag{14,20}$$
$$\tau_{30} = (b_1 + c_2)\omega_1 + (b_2 + c_1)\omega_2 + f\omega_3\,. \tag{14,21}$$

Дифференцируя (14,2) внешним образом узнаваем, что специализация (14,2) выражается равенствами

$$e_{00} - e_{11} - e_{22} + e_{33} = e_{12} = e_{21} = e_{10} + e_{32} = e_{20} + e_{31} = 0\,.$$

Внешнее дифференцирование равенств (14,18) и (14,19) дает

$$\begin{gathered}\delta a_{12} + a_{12}(e_{00} - e_{11} + e_{22} - e_{33}) = 0\,,\\ \delta a_{21} + a_{21}(e_{00} + e_{11} - e_{22} - e_{33}) = 0\,,\\ \delta c_1 + c_1(e_{00} + e_{11} - 2e_{33}) - a_{21}e_{32} = 0\,,\\ \delta c_2 + c_2(e_{00} + e_{22} - 2e_{33}) - a_{12}e_{31} = 0\,.\end{gathered}$$

Учитывая (14,6), мы заключаем, что возможна специализация репера дающая

$$a_{12} = a_{21} = 1\,, \quad c_1 = c_2 = 0\,.$$

После такой специализации, получаем внешним дифференцированием равенств (14,17)

$$[\omega_{12} - \omega_{21} - 3b_1\omega_1 - b_2\omega_2\omega_3] = 0\,, \quad [\omega_{21} - \omega_{12} - b_1\omega_1 - 3b_2\omega_2\omega_3] = 0\,,$$

так что $b_1 = b_2 = 0$.

Все вместе дает дифференциальную систему

$$\begin{gathered}\omega_{13} = \omega_2\,, \quad \omega_{23} = \omega_1\,,\\ \tau_{01} = \tau_{02} = \tau_{03} = 0\,, \quad \tau_{13} = \tau_{23} = 0\,,\\ \tau_{00} = \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33}\,,\\ \tau_{12} = \tau_{21} = \omega_3\,, \quad \tau_{10} = \tau_{32} = \omega_1\,, \quad \tau_{20} = \tau_{31} = \omega_2\,.\end{gathered} \tag{14,22}$$

Внешнее дифференцирование этих равенств дает

$$\begin{gathered}[\omega_{00} - \omega_{33}\omega_3] = 0\,, \quad [\omega_{11} - \omega_{22}\omega_3] = 0\,, \quad [\omega_{12} - \omega_{21}\omega_3] = 0\,,\\ [\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}\omega_2] + [\omega_{10} - \omega_{32}\omega_3] = 0\,,\\ [\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33}\omega_1] + [\omega_{20} - \omega_{31}\omega_3] = 0\,,\\ -2[\omega_{12}\omega_1] + [\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}\omega_2] - [\omega_{10} + \omega_{32}\omega_3] = 0\,,\\ [\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}\omega_1] - 2[\omega_{21}\omega_2] - [\omega_{20} + \omega_{31}\omega_3] = 0\,,\\ [\tau_{30}\omega_3] = 0\,,\\ [\tau_{30} + \omega_{12} - \omega_{21}\omega_1] + [\omega_{10} + \omega_{32} - \omega_1\,\omega_3] = 0\,,\\ [\tau_{30} - \omega_{12} + \omega_{21}\omega_2] + [\omega_{20} + \omega_{31} - \omega_2\,\omega_3] = 0\,.\end{gathered} \tag{14,23}$$

Из (14,23) нетрудно вытекает, что система (14,22) находится в инволюции с решением зависящим от 10 функций одного переменного.

Важно различить геометрически случаи (14,5) и (14,6) друг от друга. Начнем со случая (14,5). При движении точки A вдоль K-главной поверхности $\omega_3 = 0$ прямая $[AA_1]$ описывает конгруенцию L. Из (1,1) и (14,15) следует

$$\begin{gathered}KA = B\,, \quad KA_1 = B_1\,,\\ K\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}B - \tau_{00}B\,, \quad K\,\mathrm{d}A_1 = \mathrm{d}B_1 - \tau_{00}B_1\,,\end{gathered} \tag{14,24}$$

причем дифференцирование органичено условием $\omega_3 = 0$. Рассматриваемая K-главная поверхность определяет соответствие C между S_3 и S_3', при котором образом точки $A_1 + \lambda A$ является точка $B_1 + \lambda B$. Из (14,24) легко вытекает, что K является касательной коллинеацией соответствия C вдоль всей прямой $[AA_1]$. Перейдем к случаю (14,6). При движении точки A вдоль K-главной поверхности $\omega_3 = 0$ прямая $[A, A_1 + A_2]$ описывает конгруенцию L_1, а прямая $[A, A_1 - A_2]$ — конгруенцию L_2. Введем коллинеации K_1, K_2:

$$\begin{gathered}K_1A = B\,, \quad K_1A_1 = B_1\,, \quad K_1A_2 = B_2\,, \quad K_1A_3 = B_3 + B\,;\\ K_2A = B\,, \quad K_2A_1 = B_1\,, \quad K_2A_2 = B_2\,, \quad K_2A_3 = B_3 - B\,.\end{gathered} \tag{14,25}$$

Очевидно, что K_1 и K_2, равно как и K, реализируют проективное изгибание K-главной поверхности. Из (14,22) и (14,25) следует

$$
\begin{gathered}
K_1A = B\,, \quad K_1(A_1 + A_2) = B_1 + B_2\,,\\
K_1\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}B - \tau_{00}B\,, \quad K_1\,\mathrm{d}(A_1 + A_2) = \mathrm{d}(B_1 + B_2) - \tau_{00}(B_1 + B_2)\,;\\
K_2A = B\,, \quad K_2(A_1 - A_2) = B_1 - B_2\,, \qquad (14,26)\\
K_2\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}B - \tau_{00}B\,, \quad K_2\,\mathrm{d}(A_1 - A_2) = \mathrm{d}(B_1 - B_2) - \tau_{00}(B_1 - B_2)\,,
\end{gathered}
$$

где дифференцирование опять-таки ограничено условием $\omega_3 = 0$. Рассматриваемая K-главная поверхность в настоящем случае определяет два соответствия C_1 и C_2 между S_3 и S_3', причем в соответствии C_1 образом точки $A_1 + A_2 + \lambda A$ является точка $B_1 + B_2 + \lambda B$, а в соответствии C_2 образом точки $A_1 - A_2 + \lambda A$ является точка $B_1 - B_2 + \lambda B$. Из (14,26) легко вытекает, что K_1 является касательной коллинеацией соответствия C_1 вдоль всей прямой $[A, A_1 + A_2]$, а K_2 — касательной коллинеацией соответствия C_2 вдоль всей прямой $[A, A_1 - A_2]$.

Применяем теперь определение сопряженной сети проективного изгибания неразвертывающейся поверхности (в смысле Э. Картана), введенное мною в статье III, § 27. Мы видим, что в случае (14,5) проективное изгибание K-главных поверхностей подходит под тип R_0, причем прямая $[AA_1]$ порождает соответствующую конгруенцию R_0, в то время как в случае (14,6) проективное изгивание K-главных поверхностей подходит под тип R, причем прямые $[A, A_1 + A_2]$ и $[A, A_1 - A_2]$ порождают соответствующие конгруенции R.

Заметим, наконец, что K-линеаризирующая коллинеация Λ переводит прямую

$$[A, \omega_1A_1 + \omega_2A_2 + \omega_3A_3] \qquad (14,27)$$

в случае (14,5) в прямую

$$[A, \omega_2A_1 + \omega_3A_2]\,, \qquad (14,28)$$

а в случае (14,6) — в прямую

$$[A, \omega_2A_1 + \omega_1A_2]. \qquad (14,29)$$

Геометрическое описание выровженной коллинеации Λ зависит в случае (14,5) от известного проективного соответствия π между пучком плоскостей с осью $[AA_1]$ и пучком прямых с центром A в плоскости $[AA_1A_2]$; есть

$$\pi[A, A_1\,, \quad \lambda A_2 + \mu A_3] = [A, \lambda A_1 + \mu A_2]\,.$$

Если прямая z связки A отлична от прямой $[AA_1]$, то прямая Λz совпадает с прямой πZ, где Z означает плоскость соединяющую прямые z и $[AA_1]$; прямая $\Lambda[AA_1]$ — неопределенна. В случае (14,6) пусть π означает инволюцию в пучке прямых с центром A в плоскости $[AA_1A_2]$, двойными прямыми которой являются прямые $[A_1 A_1 + A_2]$ и $[A_1 A_1 - A_2]$. Если прямая z связки A отлична от прямой $[AA_3]$, то прямая Λz совпадает с прямой πz_0, где z_0 означает линию пересечения плоскости $[AA_1A_2]$ с плоскостью соединяющей прямые z и $[AA_3]$; прямая $\Lambda[AA_3]$ — неопределенна.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE DES CORRESPONDANCES ENTRE DEUX ESPACES VIII

EDUARD ČECH, Praha.

(Reçu le 1 février 1954.)

Au Mémoire VII de cette série, j'ai donné les théorèmes d'existence pour les déformations projectives des couches d'hypersurfaces de l'espace S_n (définies au Mémoire VI), en excluant les déformations que j'ai nommé *spéciales*, où l'on peut choisir l'homographie tangente K de telle manière que, pour chaque point A de l'espace S_n, l'homographie K-linéarisante Λ transforme chaque droite de l'étoile A (qui ne soit pas K-principale) dans une droite située dans l'hyperplan K-principal. Ce sont précisément les théorèmes d'existence relatifs aux déformations spéciales qui font l'objet du Mémoire présent. J'ai exclu d'ailleurs le cas où les hypersurfaces principales soient des hyperplans ainsi que le cas où, en chaque point A de S_n, il y ait deux hyperplans K-principaux différents, car ces deux cas ont été déjà traités au Mémoire VI. Je donne aussi une classification de tous les cas possibles basée sur la manière dont se comporte l'homographie K-linéarisante Λ (le choix de K étant supposé fait de façon expliquée plus haut).

Commençons par le cas où la couche dont la déformation projective (spéciale) forme le sujet d'investigation (c'est-à-dire la couche d'hypersurfaces K-principales) soit composée d'hypersurfaces enveloppes de ∞^1 hyperplans; pour $n \geqq 4$, c'est l'unique cas possible. Il se trouve que, comme dans le cas de déformations non spéciales, la couche déformée est nécessairement parabolique (au sens expliqué déjà dans le résumé du Mémoire VII).

Étant donnée dans l'espace S_n une couche parabolique Γ, soit S_{n-d-1} l'espace linéaire (de dimension $n - d - 1$) qui est le lieu de points communs à tous les ∞^2 hyperplans tangents aux hypersurfaces constituant la couche. On a $2 \leqq d \leqq n$; si $d = n$, les ∞^2 hyperplans mentionnés tout-à-l'heure ne possèdent aucun point commun. J'appelle *d classe* de la couche Γ envisagée. En chaque point A de S_n, on peut considérer la suite finie

$$S_{n-1},\ S_{n-2}, \ldots, S_{n-d-1} \tag{*}$$

de sous-espaces linéaires de S_n de dimensions indiquées par les indices, où:

(1) le premier terme S_{n-1} de la suite (*) est l'hyperplan tangent en A à l'hypersurface H de la couche passant par A, (2) pour $0 \leqq i \leqq d - 1$, si le point A se déplace sur l'hypersurface H, l'espace S_{n-i-1} touche son enveloppe le long de l'espace S_{n-1}. On montre que, en excluant des positions particulières du point A, la suite (*) est parfaitement déterminée et que son dernier terme coïncide avec l'espace S_{n-d-1} déjà défini.

Les deux premiers termes S_{n-1} et S_{n-2} de la suite (*) sont nécessairement des espaces passant par le point A. En excluant de nouveau des positions particulières de A, ce n'est plus vrai pour les autres termes de la suite (*) et nous désignons par

$$AS_{n-i-1}$$

($2 \leqq i \leqq d$) l'espace linéaire à $n - i$ dimensions qui joint le point A à l'espace S_{n-i-1}; si $i = d = n$, l'espace S_{n-i-1} est vide et l'espace AS_{n-i-1} se réduit au point A.

Ceci étant, si la couche parabolique Γ est l'objet d'une déformation projective spéciale, nous allons définir un entier H de façon suivante. Commençons par fixer l'homographie tangente K de la manière définie au commencement de ce résumé et introduisons l'homographie K-linéarisante Λ. Alors $H = 0$ signifie qu'il existe une droite z_0 passant par A et contenue dans l'hyperplan S_{n-1}, telle que la droite Λz_0 ne soit pas contenue dans S_{n-2}. $H = 1$ signifie que Λz soit contenue dans S_{n-2} pour chaque droite z passant par A et contenue dans S_{n-1}, mais qu'il existe toutefois une droite z_0 passant par A (ne pas contenue dans S_{n-1}) telle que la droite Λz_0 ne soit pas contenue dans S_{n-2}. Évidemment $S_{n-2} = AS_{n-3}$; il s'ensuit que $H \geqq 2$ signifie que Λ transforme toute l'étoile A dans l'espace AS_{n-3}. La classification ultérieure dépend de l'ensemble ΛE, où E désigne la part de l'étoile A contenue dans l'hyperplan S_{n-1}. En cas $2 \leqq H \leqq d - 1$ l'ensemble ΛE est contenu dans AS_{n-H-1}, mais il n'est pas contenu dans AS_{n-H-2}. En cas $H = d$ l'ensemble ΛE est contenu dans AS_{n-d-1}; si $H = d = n$, alors Λ dégénère de telle manière que Λz devienne indéterminée pour chaque droite z de l'étoile A contenue dans S_{n-1}.

Le nombre H soit appelé *rang* de la déformation projective spéciale de la couche parabolique Γ.

On montre que les déformations projectives spéciales du rang d de couches paraboliques de classe d n'existent point si $d = n$. Au contraire, si $d < n$, on montre que chaque couche parabolique de classe d de l'espace S_n est susceptible d'une déformation projective spéciale du rang d, et que des telles déformations dépendent de $2(n - d)$ fonctions arbitraires d'un argument.

Les choses se présentent de manière tout-à-fait différente, si $H < d$. Tandis que les couches paraboliques de classe donné d ($2 \leqq d \leqq n$) dépendent toujours d'une fonction arbitraire de deux arguments, il se trouve que pour des valeurs données de d et H, où $2 \leqq d \leqq n$, $0 \leqq H \leqq d - 1$, les déformations projectives spéciales correspondantes ne dépendent que d'un certain nombre de fonctions arbitraires d'*un* argument, de manière qu'il s'agit toujours de couches paraboliques *exceptionnelles*.

Pour des valeurs données de d et H, où $2 \leqq d \leqq n$, $0 \leqq H \leqq d - 1$, désignons par $N = N(d, H)$ le nombre de fonctions arbitraires d'un argument dont dépendent les déformations projectives de rang H de toutes les couches paraboliques de classe d. On trouve que

$$\begin{aligned} N &= 2(n+d) - 3 \quad \text{pour} \quad H = 0\,, \\ N &= 2(n+d) - 4 \quad \text{pour} \quad H = 1\,, \\ N &= 2(n+d) - 7 \quad \text{pour} \quad 2 = H < d\,, \\ N &= 2(n+d) - 8 \quad \text{pour} \quad 3 = H < d\,. \end{aligned}$$

Si $4 \leqq H \leqq d - 1$, on doit tenir compte de la parité de H. On trouve que

$$\begin{aligned} N &= 2(n + d - H - 1) \quad \text{pour} \quad 4 \leqq H \leqq d - 1,\ H \text{ impair}, \\ N &= 2(n + d - H - 2) \quad \text{pour} \quad 4 \leqq H \leqq d - 1,\ H \text{ pair}. \end{aligned}$$

Enfin, pour $n = 3$ on doit encore étudier les déformations projectives des couches de surfaces non développables. On trouve que de telles déformations existent et qu'on doit distinguer deux cas, car les déformations projectives des surfaces dont se compose la couche peuvent être du type R_0 où du type R en suivant la notation classique de Fubini et Čech. On trouve que dans le cas R_0 les déformations dépendent de *neuf* fonctions arbitraires d'un argument, et dans le cas R de *dix*. Ces derniers résultats seront approfondis plus tard.