Ján Jakubík

О графическом изоморфизме структур

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 4 (1954), No. 2, 131–142

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100104

Чехословацкий математический журнал, т. 4 (79) 1954

О ГРАФИЧЕСКОМ ИЗОМОРФИЗМЕ СТРУКТУР

ЯН ЯКУБИК (Ján Jakubík), Кошице.

(Поступило в редакцию 7 марта 1953 г.)

В статье решается следующая проблема:

1. найти структуры, графики (неориентированные) которых изоморфны графику данной конечной структуры;

2. найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы всякая структура S', график которой изоморфен графику конечной структуры S, была изоморфна структуре S.

Вопросы 1. и 2. решены в настоящей работе для модулярных структур. Некоторые из полученных результатов обобщены для (бесконечных) дискретных модулярных структур.

При изучении конечных структур выгодно опираться на наглядную диаграмму (диаграмма Хассе) данной структуры. Если диаграмму структуры берем без ориентации (т. е. принимаем во внимание только „соседство" элементов[1])), то называем ее графиком структуры. Может случиться, что две структуры, которые не являются изоморфными , имеют изоморфные графики.[2]) Тривиальным примером служит структура S, которая двойственна себе. Графики этой структуры S и двойственной ей структуры $\tilde{S}$,[3]) очевидно, изоморфны.

Естественно задать себе следующие вопросы: 1. *дана конечная структура S. Найти все структуры S', графики которых изоморфны графику структуры S.*

2. *Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы всякая структура S', график которой изоморфен графику данной конечной структуры S, была сама изоморфна структуре S.*

Проблему 2. предложил Г. Биркгоф.[4]) Достаточное условие для S' из проблемы 1. при условии, что S и S' — дистрибутивные структуры, нашел С. А. Кис.[5]) Обе проблемы для случая, когда S и S' — дистрибутивные

[1]) Смотри определение 1.
[2]) Определение 2.
[3]) Во всей статье будем знаком $\tilde{S}$ обозначать структуру, двойственную S.
[4]) [1], стр. 20, проблема 8.
[5]) [2].

структуры, решены до конца в работе [3].[6]) При доказательстве конечного утверждения в значительной мере используется теорема, которую можем кратко сформулировать следующим образом:

Если существует взаимно однозначное соответствие между S и S', при котором каждому производящему разложению) структуры S соответствует производящее разложение структуры S', то графики структур S и S' изоморфны.*[7])

Наша цель — решить проблемы 1., 2 при условии, что имеем дело с модулярными структурами. Покажем, что конечный результат такой же, как и в случае дистрибутивных сгруктур (следовательно, является обобщением теорем 7.9 и 7.10 [3]).

Но упомянутая теорема 6.2.15, [3] для модулярных структур не справедлива; поэтому доказательство нужно вести другим способом. Новое доказательство проще.

Некоторые результаты можно непосредственно обобщить для случая бесконечных структур, в которых выполняется ,,условие конечных цепей''. Это обобщение проводим только в кратком резюме в конце работы.

Повторим сначала основные определения. Обо всех рассматриваемых структурах будем предполагать, что они конечны.

Определение 1. *Пусть S — структура, a, $b \in S$. Элементы a, b будем называть соседними (обозначение $a \mathrm{s} b$), если либо элемент a покрыт элементом b, либо b покрыт элементом a. Если имеет место $a \mathrm{s} b$, будем пару элементов (a, b) называть элементарной парой (э. пара). Э. пары (a, b), (b, a) будем считать эквивалентными.*

Определение 2. *Пусть S и S' — конечные структуры, пусть существует взаимно однозначное отображение структуры S на S', которое сохраняет отношение соседства. Подробнее: если x, $y \in S$, x', $y' \in S'$, $x \longleftrightarrow x'$, $y \longleftrightarrow y'$, то $x \mathrm{s} y \Longleftrightarrow x' \mathrm{s} y'$. Тогда скажем, что структуры S, S' графически изоморфны (или же, что графики структур S, S' изоморфны), что запишем в виде: $S \overset{g}{\sim} S'$.*

Отношение $\overset{g}{\sim}$, очевидно, обладает свойством рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Лемма 1. *Пусть a, b, c, d — взаимно различные элементы в S, пусть (1) $a \mathrm{s} b \mathrm{s} c \mathrm{s} d \mathrm{s} a$. Тогда элементы a, b, c, d образуют в S подструктуру, два и только два элемента которой несравнимы.*

Доказательство. Сначала докажем, что элементы a, b, c, d не могут образовать цепь. Если бы они составляли цепь, можем, не умоляя общности, предположить, что элемент a есть наименьший элемент цепи (ибо в соотно-

[6]) Теоремы 7.9, 7.10. *) Смотри [3], стр. 1.
[7]) Теорема 6.2.15.

шении 1. можем отдельные элементы циклически заменять). Потом было бы $a < b < c < d$, т. е. не имело бы места $a \mathrm{s} d$, что противоречит предположению. Следовательно, среди элементов a, b, c, d должна встретиться по крайней мере одна пара несравнимых элементов. После возможных изменений обозначения можно достичь того, что как раз элемент a принадлежит такой паре несравнимых элементов. Так как $a \mathrm{s} b$, $d \mathrm{s} a$, то вторым элементом этой пары должен быть элемент c.

Так как $a \mathrm{s} b \mathrm{s} c$, то элемент b сравним с обоими элементами a, c. Но эти элементы несравнимы, так что либо 1. $a < b, c < b$, либо 2. $a > b$, $c > b$. Исследуем первый случай. Справедливо соотношение $a < a \cup c \leqq b$. Из условия $a \mathrm{s} b$ потом вытекает $a \cup c = b$.

Аналогично из условия $c \mathrm{s} d \mathrm{s} a$ следует, что либо $a < d$, $c < d$, либо $a > d$, $c > d$. Однако, в первом случае получаем $a \cup c = d$, следовательно $d = b$, что противоречит предполложению. Второй случай приводит нас к результату $a > a \cap c \geqq d$. Потому что $a \mathrm{s} d$, будет $a \cap c = d$.

Исследование случая 2. двойственно тому, что мы сейчас проделали. В результате получаем $a \cup c = d$, $a \cap c = b$.

Лемма 2. *Имеет место*: *а*) $S \overset{g}{\sim} \tilde{S}$, *б*) $S_1 \times S_2 \overset{g}{\sim} \tilde{S}_1 \times S_2$.[8])

Доказательство обоих утверждений ясно.

Определение 3. *Пусть S — модулярная структура, пусть $a \mathrm{s} b \mathrm{s} c \mathrm{s} d \mathrm{s}$ $\mathrm{s}\, a$. Тогда скажем, что э. пары (a, b), (c, d) взаимно просто транспонированы. Э. пары (a, b), (c, d) будем называть взаимно проективными, если либо 1. $(a, b) = (c, d)$, либо 2. существует конечная последовательность э. пар $(a_0, b_0) = (a, b)$, $(a_1, b_1) \dots (a_n b_n) = (c, d)$ такая, чро соседние пары этой последовательности взаимно просто транспонированы.*[9])

Возьмем множество всех э. пар модулярной структуры S. Отношение проективности, определенное для этого множества, очевидно, обладает свойством рефлексивности, симметричности и транзитивности. При помощи этого соотношения можем, следовательно, множество всех э. пар разложить в сумму дизьюнктных классов $T_1, T_2, \dots, T_n$ так, что одному классу принадлежат все взаимно проективные э. пары структуры S.

Замечание. Пусть $S \overset{g}{\sim} S'$. Буквами $a, b, c, \dots$ будем везде в дальнейшем обозначать элементы структуры S, буквами $a', b', c', \dots$ будем обозначать те элементы структуры S', которые в отображении, посредством которого дан графический изоморфизм, соответствуют элементам $a, b, c, \dots$

Лемма 3. *Пусть S, S' — модулярные структуры, $S \overset{g}{\sim} S'$. Пусть (a, b), (c, d) — взаимно проективные э. пары. Тогда и э. пары (a', b'), (c', d') взаимно проективны.*

---

[8]) $S_1 \times S_2$ обозначает прямое произведение структур S_1 S_2, $\tilde{S}$ означает структуру, двойственную структуре S.

[9]) Ясно, что определение проективности в [1] стр. 72 отличается от данного только формально.

Доказательство следует непосредственно из того, что мы проективность определили при помощи отношения s, которое при графическом изоморфизме сохраняется.

В дальнейшем будем предполагать, что структуры S, S' — модулярные структуры и что $S \overset{g}{\sim} S'$.

Лемма 4. *Пусть R — производящее разложение*[10]) *структуры S. Определим R' следующим образом: $a' \equiv b'(R') \Leftrightarrow a \equiv b(R)$. Тогда R' есть производящее разложение структуры S'.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 10, [1] стр. 77, которую для нашей цели можем сформулировать иным, более подходящим способом: возьмем определенные классы $T_1, T_2, \ldots$ проективных э. пар и положим $a \equiv b$ тогда и только тогда, если либо 1. $a = b$ либо 2. каждая э. пара интервала $\langle a \cap b, a \cup b \rangle$ принадлежит какому-нибудь из классов $T_1, \ldots, \ldots, T_k$. Потом отношение $\equiv$ определяет производящее разложение структуры S. Далее, справедливо утверждение: каждое производящее разложение структуры S можно получить таким способом.[10a])

Итак, пусть теперь производящее разложение R образовано классами $T_1, \ldots, T_k$. Так как проективность и соотношение s инвариантны относительно графического изоморфизма, то разложение R' соответствует классам $T'_1, \ldots, T'_k$ проективных э. пар. структуры S', следовательно, R' есть производящее разложение структуры S'.

Определение 4. *Пусть $a \mathrm{s} b$, $a < b$.* Если будет $a' < b'$ $(a' > b')$, *то скажем, что э. пара (a, b) при данном графическом изоморфизме сохраняет проядок (меняет порядок) элементов.*

Лемма 5. *Пусть (a, b), (c, d) — просто транспонированные э. пары. Если одна из них при трафическом изоморфизме сохраняет (меняет) порядок, то и вторая сохраняет (меняет) порядок.*

Доказательство. Так как мы считаем, что пары (a, b), (b, a) эквивалентны, можем предполагать, что $a < b$. Согласно определению 2, $a \mathrm{s} b \mathrm{s} c \mathrm{s} d \mathrm{s} a$, следовательно, и $a' \mathrm{s} b' \mathrm{s} c' \mathrm{s} d' \mathrm{s} a'$. В силу леммы 1 может наступить один из двух следующих случаев: 1. $a \cap c = d$, $a \cup c = b$, 2. $b \cap d = a$, $b \cup d = c$. Предположим, что (a, b) сохраняет порядок, т. е. $a' < b'$. По лемме 1 должно быть и для S' справедливо одно из соотношений 1. или 2. (если подставить элементы со штрихами). Однако, в обоих случаях 1., 2. $d < c$ и одновременно $d' < c'$, значит, э. пара (c, d) тоже сохраняет порядок.

Теперь предположим, что (a, b) изменит порядок. Если бы э. пара (c, d) осталась сохраняющей порядок, должна была бы, по предыдущему, сохранить порядок и э. пара (a, b), что противоречит предположению.

---

[10]) Смотри [1], стр. 21—22.

[10a]) Эквивалентность обоих формулировок можно легко доказать.

Следствие. *Пусть (a, b), (c, d) — проективные э. пары. Если одна из них при графическом изоморфизме сохраняет (меняет) порядок, то и вторая пара сохраняет (меняет) порядок.*

Знаком M_1 (M_2) обозначим множество всех классов взаимно проективных э. пар структуры S, которые при данном графическом изоморфизме сохраняют (меняют) порядок. Производящее разложение, порожденное классами $T_i \in M_1$ ($T_i \in M_2$), обозначим через R_1 (R_2).[10b])

Лемма 6. *Пересечение разложений R_1, R_2 есть наименьшее разложение (каждый элемент структуры S образует особый класс). Соединение R_1, R_2 есть наибольшое разложение (все элементы структуры S образуют лишь один класс).*[11])

Доказательство. Пусть (a, b) — э. пара структуры S. Если (a, b) сохраняет порядок, то $a \equiv b(R_1)$, $a \not\equiv b(R_2)$; если (a, b) меняет порядок, то $a \not\equiv b(R_1)$, $a \equiv b(R_2)$.

Значит, во всяком случае либо $a \equiv b(R_1)$, либо $a \equiv b(R_2)$, так что всегда $a \equiv b(R_1 \cup R_2)$. Далее: ни для какой э. пары (a, b) не может одновременно быть $a \equiv b\ (R_1)$, $a \equiv b(R_2)$, т. е. не может $a \equiv b(R_1 \cap R_2)$. Из этого следует, что разложение $R_1 \cup R_2$ ($R_1 \cap R_2$) наибольшее (наименьшее).

Лемма 7. *Пуст $x \equiv u(R_1)$, $u \equiv y(R_2)$. Потом существует елемент v, обладающий следующим свойством:*

$$x \equiv v(R_2)\ , \quad v \equiv y(R_1)\ .$$[12])

Для доказательства нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

7.1. *Пусть S — структура, $x, y \in S$, R — любое производящее разложение структуры S. Обозначим $x \cap y = u$, $x \cap y = v$. Если $x \equiv u(R)$, то $y \equiv v(R)$.*

Доказательство очевидно.

7.2. *Пусть $u \leq a$, $u \equiv a(R_1)$, $u \leq b$, $u \equiv b(R_2)$. Тогда $a \cap b = u$.*

Доказательство. В противном случае было бы $a \cap b = u_1 > u$. Интервал $\langle u, u_1\rangle$ содержался бы в обоих интервалах $\langle u, a\rangle$, $\langle u, b\rangle$, значит, все э. пары интервала $\langle u, u_1\rangle$ должны были бы одновременно сохранить и изменить порядок, что невозможно.

7.3. *Пусть $a \leq b \leq c$, пусть $a \equiv b(R_1)$, $b \equiv c(R_2)$. Тогда $a' \cup c' = b'$.*

Доказательство. Из приведенных предположений следует, что все э. пары[12']) интервала $\langle a, b\rangle$ сохранят порядок, а э. пары интервала $\langle b, c\rangle$

[10b]) Ясен смысл символов R_1', R_2'.

[11]) Наименьшее (наибольшое) разложение принято обозначать через 0 (I).

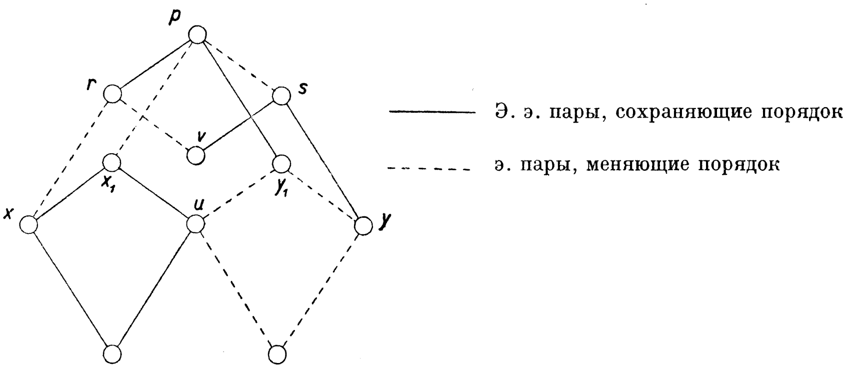
[12]) Такие разложения будем в дальнейшем, в соответствии с *О. Борувкой*, называть дополнительными. *Г. Биркгоф* пользуется для таких разложений названием „permutable“ *П. Дюбрейль* — „associable“.

[12']) Если интервал $\langle a, b\rangle$ соотв. $\langle b, c\rangle$ не содержит никаких э. пар, т. е. $a = b$ соотв. $b = c$, то утверждение 7.3 очевидно.

изменят порядок. Следовательно, в структуре S' будет $a' \leq b'$, $c' \leq b'$, $a' \cup c' = b_1' \leq b'$. Если бы было $b_1' < b'$, то интервал $\langle b_1', b' \rangle$ был бы одновременно частью обоих интервалов $\langle a', b' \rangle$, $\langle c', b' \rangle$. Э. пары интервала $\langle b_1', b' \rangle$ должны были бы сохранить и одновременно изменить порядок. Отсюда следует равенство $b_1' = b'$.

Замечание. Таким же способом мы доказали бы утверждения, двойственные приведенным утверждениям **7.1**, **7.2**, **7.3**.

Доказательство леммы 7. Смотри черт. 1. Обозначим $x \cup u = x_1$, $y \cup u = y_1$. Очевидно, что $x_1 \equiv u(R_1)$, $y_1 \equiv u(R_2)$. Согласно **7.2**, $x_1 \cap y_1 = u$.



Черт. 1.

Далее обозначим $x_1 \cup y_1 = p$. Согласно **7.1**, $p \equiv y_1(R_1)$, $p \equiv x_1(R_2)$. Возьмем элементы x, x_1, p. Потому что $x \equiv x_1(R_1)$, $p \equiv x_1(R_2)$ будет также $x' \equiv x_1'(R_1')$, $p' \equiv x_1'(R_2')$, значит, согласно **7.1**, $x' \cup p' = x_1'$. Обозначим $x' \cap p' = r'$. По **7.1**

$$x' \equiv r'(R_2'), \quad r' \equiv p'(R_1').$$

Значит, также

$$x \equiv r(R_2), \quad r \equiv p(R_1).$$

Далее возьмем элементы y, y_1, p. По утверждению, двойственному **7.3**, $y' \cap p' = y_1'$. Обозначим $p' \cup y' = s'$. В силу **7.1** (очевидно, что условия нашего утверждения выполнены) будет

$$y' \equiv s'(R_1'), \quad \text{значит также} \quad y \equiv s(R_1),$$
$$p' \equiv s'(R_2'), \quad \text{значит также} \quad p \equiv s(R_2).$$

Возьмем, наконец, элементы r, p, s. По предыдущему $r' \leq p'$, $r' \equiv p'(R_1')$; следовательно, все э. пары при данном графическом изоморфизме сохранят порядок, и будет иметь место неравенство $r \leq p$. Аналогичным способом получим $s \leq p$. Согласно утверждению, двойственному **7.2**, $r \cup s = p$. Обозначим $r \cap s = v$. Согласно **7.1** $r \equiv v(R_2)$, $v \equiv s(R_1)$.

Итак, в итоге мы получили:

$$x \equiv r \equiv v(R_2) \,,$$
$$v \equiv s \equiv y(R_1) \,,$$

ч. т. д.

Лемма 8. *Структуру классов разложения R_1 (R_2) структуры S обозначим через A_1 (A_2). Потом $S \sim A_1 \times A_2$.*[13])

Доказательство. По лемме **6** $R_1 \cap R_2 = 0$, $R_1 \cup R_2 = I$. По лемме **7** разложения R_1, R_2 взаимно дополнительны. Применим теперь теорему 4, [1], стр. 87, которую для ясности приведем полностью: *Пусть Θ_1, Θ_2 — дополнительные*[14]) *разложения алгебры A, для которых $\Theta_1 \cap \Theta_2 = 0$, $\Theta_1 \cup \Theta_2 = I$. Тогда A изоморфна прямому произведению $A_1 \times A_2$, причем A_i является гомоморфным образом алгебры A* mod Θ_i ($i \times 1, 2$).

Теперь уже доказательство леммы 8 очевидно.

Лемма 9. *Пусть $a \in S$, R_1, R_2 — дополнительные разложения S, для которых $R_1 \cap R_2 = 0$, $R_1 \cup R_2 = I$. Знаком $\bar{a}^1$ ($\bar{a}^2$) обозначим класс разложения R_1 (R_2), в котором находится элемент a. Множества $\bar{a}^1$, $\bar{a}^2$ рассматриваем в том же частичном упорядочении, что и S. Пусть A_1 (A_2) есть структура классов разложения R_1 (R_2). Имеет место $A_1 \sim \bar{a}^2$, $A_2 \sim \bar{a}^1$.*

Доказательство очевидно.

Пускай теперь R_1, R_2, R_1', R_2' имеют то же значение, что и в леммах **6,7**. Ясно также значение символов $A_1', A_2', \bar{a}'^1, \bar{a}'^2$. Леммы **8,9** справедливы и для этих символов со штрихами. Из определения разложений R_1, R_2 вытекает, что каждая э. пара в $\bar{a}^2$ ($\bar{a}^1$) сохраняет (меняет) порядок. Из этого далее получаем: структуры $\bar{a}^2, \bar{a}'^2$ ($\bar{a}^1, \bar{a}'^1$) взаимно изоморфны (двойственно изоморфны).

Теорема 1. *Пусть S, S' — конечные модулярные структуры. Для того, чтобы S и S' были графически изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы существовали структуры A_1, A_2 такие, что $S \sim A_1 \times A_2$, $S' \sim \tilde{A}_1 \times A_2$.*

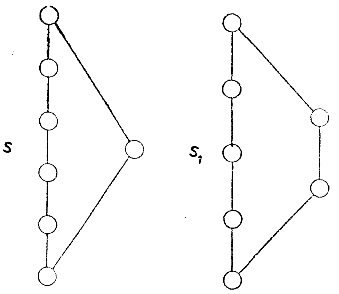
Условие достаточно в силу леммы **2**. Доказательство, что это условие тоже необходимо, вытекает из леммы 8 и замечания, помещенного за леммой **9**.

Теорема 2. *Пусть S — конечная модулярная структура. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы каждая модулярная структура S', график которой изоморфен графику структуры S, была изоморфна струк-*

[13]) Под знаком $\sim$ разумеем изоморфизм структур.
[14]) „permutable“.

туре S, следующее: каждый прямой множитель структуры S двойственен себе.

Доказательство. Из теоремы **1** очевидно, что условие достаточно. Докажем, что оно необходимо. Допустим, что из условия $S \overset{g}{\sim} S'$ следует $S \sim S'$. Пусть A[15] — какой-нибудь прямой множитель[16] структуры S, пусть A_0 — любой из неразложимых множителей структуры A. Очевидно, что потом $S \sim A_0 \times B$ где B — подходящая структура. Построим структуру $S' = \tilde{A}_0 \times B$. По лемме **2** $S \overset{g}{\sim} S'$, следовательно, по предположению, $S \sim S'$, т. е. $A_0 \times B \sim \tilde{A}_0 \times B$. Применяя теорему об однозначности разложения структуры в прямое произведение неразложимых множителей[17] и учитывая, что в нашем случае этих факторов конечное число, получаем $A_0 \sim \tilde{A}_0$, следовательно, стуктура A_0 двойственна себе. Если все неразложимые множители структуры A двойственны себе, то и структура A двойственна себе.



Черт. 2.

Замечание. Для немодулярных структур теорема не справедлива. Например, структура S на черт. 2 двойственна себе, и неразложима (количество элементов есть простое число). Очевидно, что для структуры S' имеет место $S \overset{g}{\sim} S'$, но не $S \sim S'$.

Теперь будем рассматривать бесконечные модулярные структуры.

Определение 5. *Струкутру S будем называть дискретной, если каждая цепь структуры S, которая содержит наибольший и наименьший элемент, конечна.*

Предыдущее определение, очевидно, равносильно следующему требованию: пусть r — любая цепь в S, $a \in r$. Если a не является наименьшим (наибольшим) элементом цепи r, то существует элемент $a'(a'')$ в r, который находится непосредственно над (под) элементом a.

Для случая дискретных структур можем дословно пользоваться определением **1** и **2**. Все рассуждения, которые мы проводили в леммах **1—9** (значит, и теорема **1**) остаются в силе и при условии, что структуры S, S' — дискретны и модулярны.

Однако, теорему **2** и ее доказательство не можем без допольнительных

[15] Структуру A называем прямым множителем структуры S, если существует такая структура B, что $S \sim A \times B$.

[16] Факторы, содержащие лишь один элемент, из наших исследований исключим.

[17] Смотри [5]. Более общее доказательство для случая связных частично упорядоченных множеств (без предположения, что это структуры) находится в работе [6].

рассуждений расширить на случай дискретных модулярных структур. При доказательстве теоремы 2 мы, то-есть, пользовались двумя утверждениями, которые, очевидно, справедливы для конечных структур, но о которых наперед неизвество, верны ли они для дискретных модулярных структур. Это следующие утверждения:

1. *Структуру S можно разложить в произведение неразложимых множителей $S \sim \Pi A_\iota$,*[18]) *где все A_ι неразложимы.*

2. *Число неразложимых факторов A_ι конечно.*

Исследуем сначала, справедливо ли (или с какой оговоркой) для дискретных структур утверждение 2.

Лемма 10. *Пусть S — дискретная структура. Если можно разложить S в произведение неразложимых множителей $S \sim \Pi S_\iota$, то число множителей S_ι конечно: $S \sim \prod_{i=1}^{n} S_i$.*

Доказательство. Допустим, что число факторов S_ι в разложении $S \sim \Pi S_\iota$ бесконечно. Так как мы исключили факторы, содержащие только один элемент, можем из каждой структуры S_ι выбрать два элемента a_ι, b_ι такие, что $a_\iota < b_\iota$. Знаком a соотв. b обозначим тот элемент структуры S, образом которого в структуре ΠS_ι служит $\{a_\iota\}$ соотв. $\{b_\iota\}$. Легко видет, что $a < b$.

Из множества индексов $\{\iota\}$ выделим последовательность $\iota_1, \iota_2, \iota_3, \ldots, \iota_i \neq \iota_k$ при $i \neq k$. Построим элементы $a_n \in S$, $n = 1, 2, \ldots, a_n \longleftrightarrow \{a_\iota^n\}$[19]) следующим образом:

$$a_\iota^n = b_\iota\,, \quad \iota \in \{\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_n\}\,,$$
$$a_\iota^n = a_\iota\,, \quad \iota \mathrel{\overline{\in}} \{\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_n\}\,.$$

Очевидно что, $a < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < b$, но это противоречит предположению, что структура S дискретна.

Далее докажем, что утверждение 1 для дискретных структур (даже и дискретных модулярных структур) во всей общности не справедливо. Приведем пример дискретной модулярной структуры, которую невозможно разложить в произведение неразложимых множителей.

Пусть S — множество всех функций, определенных на интервале $\langle 0, 1\rangle$, которые 1. только в конечном числе точек интервала $\langle 0, 1\rangle$ отличны от нуля, 2. принимают в каждом точке интервала $\langle 0, 1\rangle$ целые значения. Если при каждом $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$ будет $f(x_0) \leqq g(x_0)$ то положим $f(x) \leqq g(x)$, где $f(x)$, $g(x) \in S$. Очевидно, что структура S модулярна (даже дистрибутивна). Нетрудно проверить, что структура S дискретна.

---

[18]) Произведение бесконечного числа структур берем в смысле определения в работе [5] (или [1], стр. VIII, если для a_j допускаем и бесконечные значения). Существенно отличным способом можно определить произведение бесконечного числа структур в соответствии с работой [4], стр. 66 (разложение на ,,компоненты").

[19]) Знаком $\longleftrightarrow$ обозначаем взаимное соответствие в изоморфизме $S \sim \Pi S_\iota$.

Предположим, что структуру S можно разложить в произведение неразложимых множителей. По предыдущей лемме было бы $S \sim \prod_{i=1}^{n} S_i$, где S_i неразложимы.

Возьмем точку $x_1 \in \langle 0, 1 \rangle$. Знаком A_1 (B_1) обозначим множество тех функций $f \in S$, для которых при $x \neq x_1$ имеет место $f(x) = 0$, ($f(x) = 0$ при $x = x_1$). Очевидно, что $S \sim A_1 \times B_1$. Структура A есть цепь и, следовательно, нельзя ее разложить в прямое произведение. Из теоремы об однозначности разложения следует, что структура A_1 изоморфна некоторой из структур $S_1, \ldots, S_n$. Не умаляя общности, можно предполагать $A_1 \sim S_1$. Тогда по теореме об однозначности разложения $B_1 \sim S_2 \times \ldots \times S_n$. Выбрав точку x_2, $x_2 \neq x_1$, $x_2 \in \langle 0, 1 \rangle$, можно аналогично разложить структуру B_1. Получим $B_1 \sim A_2 \times B_2$, $A_2 \sim S_2$, $B_2 \sim S_3 \times \ldots \times S_n$. Повторив это $n-1$ раз, получим $A_{n-1} \sim S_{n-1}$, $B_{n-1} \sim S_n$. Выбрав следующую точку $x_n \neq x_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, можем разложить структуру B_{n-1}, значит, и структуру S_n. Но это противоречит условию неразложимости структуры S_n.

Из предыдущего вытекает, что утверждение теоремы 2 для дискретных структур надо сформулировать следующим образом:

Теорема 3. *Пусть S — дискретная модулярная структура, которую можно разложить в прямое произведение неразложимых множителей. Для того, чтобы каждая дискретная модулярная структура, которая графически изоморфна структуре S, была сама изоморфна структуре S, нобходимо и достаточно, чтобы каждый прямой множитель структуры S был двойственен себе.*

Доказательство. Пусть S разложима в произведение неразложимых множителей $S \sim \Pi S_\iota$. По лемме **10** таких множителей S_ι будет только конечное число. Пусть $S \overset{g}{\sim} S'$. Тогда, согласно теореме **1**, $S \sim A_1 \times A_2$, $S' \sim A_1 \times A_2$. Из теоремы об однозначности разложения следует, что и структуры A_1, A_2, и, следовательно, также S' можно разложить на конечное число неразложимых множителей. Далее доказательство ведется таким же способом, как доказательство теоремы **2**.

Замечание 1. При доказательстве теоремы 2 мы пользовались импликацией $A_0 \times B \sim \tilde{A}_0 \times B \Rightarrow A_0 \sim \tilde{A}_0$. Это, очевидно, верно, если предположить, что структуру $A_0 \times B$ можно разложить на конечное число неразложимых множителей. Без этого предположения предыдущая импликация не справедлива.

Замечание 2. В связи с предыдущим возникают следующие вопросы:

а) Справедлива теорема **1** для случая полумодулярных структур? (Кажется наиболее вероятным, что нет.)

б) пусть $S \overset{g'}{\sim} S'$, пусть S — конечная модулярная структура. Следует из этого, что и структура S' модулярна? (Положительный ответ кажется наиболее вероятным.)[20])

в) Исследовать, в какой мере можно предыдущие результаты распространить на случай бесконечных модулярных структур, если вместо отношения $\overset{g}{\sim}$ между структурами S, S' предположить, что эти структуры топологически эквивалентны (относительно некоторой из топологий, которые принято вводить в структуры).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. Birkhoff:* Lattice theory, Rev. Edition, New York, 1948.

[2] *S. A. Kiss:* Transformations on lattices and structures of logic, New York 1947.

[3] *J. Jakubík* a *M. Kolibiar:* О некоторых свойствах пар структур, *Чехословацкий мат. журнал*, *4*(79), (1954), 1—27.

[4] *Л. В. Канторович - Б. З. Вулих-А. Г. Пинскер:* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Москва 1950.

[5] *J. Jakubík:* O jednoznačnosti rozkladu sväzu na direktný súčin, *Matematicko-fyzikálny sborník SAVU*, *1* NoNo 2, 3, 4, 1951.

[6] *Hashimoto, Junji:* On direct product decomposition of partially ordered sets, *Ann. of Math.* (*2*) 54, 315—318, 1951.

Summary

ON LATTICES WHOSE GRAPHS ARE ISOMORPHIC

JÁN JAKUBÍK, Košice.

(Received March 7, 1953.)

The paper deals with the following questions:

1. *to find lattices whose (unoriented) graphs are isomorphic with the graph of a given finite lattice,*
2. *to find the necessary and sufficient condition for a finite lattice S such, that every lattice S' whose graph is isomorphic with the graph of the lattice S, be isomorphic with the lattice S (see* [1], *problem 8).*

Problems 1. and 2. are solved for the case of modular lattices. It is proved the result is the same as in the case of distributive lattices (see [3]). A generalisation of a part of the results on (infinite) "discrete" modular lattices is given. (By a discrete lattice we mean a lattice whose chains having the greatest and the least element are all finite).

---

[20]) Замечание при корректуре. Вопросы а) и б) решены (см. Matematicko-fyz. časopis Slovenskej akad. vied 4(1954) č. 3).

Outline of the method. If the graphs of finite modular lattices S, S' are isomorphic, we say the lattices being graphically isomorphic and write $S \overset{g}{\sim} S'$. Let x', $y' \in S'$ be the images of the elements x, $y \in S$ for the assumed graphical isomorphism and let $\langle x, y \rangle$ be a prime interval in S. If $x' < y'$ ($x' > y'$), we say the prime interval holds (turns) for the graphical isomorphism assumed. First we prove the relation of the projectivity of prime intervals being invariant with respect to the graphical isomorphism. If all the prime intervals on S which hold (turn) are annuled, a determining partion is produced, which we denote by R_1 (R_2). (By a determining partition is meant a partition defined by a congruence relation). It is easily proved that $R_1 \cap R_2$ ($R_1 \cup R_2$) is the least (greatest) partition on S. We prove that the partitions R_1, R_2 are permutable. If the lattice of the classes of the partition $R_1(R_2)$ is denoted by $A_1(A_2)$, we obtain $S \sim A_1 \times A_2$ (the symbol $\sim$ means lattice-isomorphism). Then it is easy to prove that $S' \sim \tilde{A}_1 \times A_2$ ($\tilde{A}_1$ signifies the dual of A_1). Thus the question 1. is solved (Theorem 1). This result leads in a simple way to the solution of the question 2. (Theorem 2): the asked necessary and sufficient condition is that every direct factor of the lattice S is to be selfdual.

Three unsolved problems are given on the end of the note.