Czechoslovak Mathematical Journal

Miloš Zlámal

Über die Stabilität der nichtlinearen erzwungenen Schwingungen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 4 (1954), No. 1, 95–(103)

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100101`

ÜBER DIE STABILITÄT DER NICHTLINEAREN ERZWUNGENEN SCHWINGUNGEN

MILOŠ ZLÁMAL, Brno.

(Eigelangt 29. VII. 1953.)

Es sind zwei leicht verifizierbare Bedingungen angegeben, dass die nichtlineare Differentialgleichung $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = p(t)$, wo $p(t)$ eine periodische Funktion der Zeit ist, eine periodische Lösung mit der Periode der rechten Seite $p(t)$ hat und alle anderen Lösungen gegen diese periodische mit $t \to \infty$ konvergieren.

1. Die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für erzwungene Schwingungen

$$\ddot{x} + 2c\dot{x} + \omega^2 x = A \sin \Omega t \tag{1}$$

zeichnet sich durch die Eigenschaft aus, dass eine ihrer Lösungen — das sind gerade jene erzwungenen Schwingungen — periodisch mit der Periode der äusseren Kraft ist und alle anderen mit $t \to \infty$ gegen diese konvergieren. Die erzwungenen Schwingungen sind also sehr stark stabil.

Levinson [1] hat bewiesen, dass dieselbe Eigenschaft auch die nichtlineare Differentialgleichung

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + \omega^2 x = p(t) \ , \tag{2}$$

wo $p(t)$ eine periodische Funktion der Zeit ist, hat, wenn wir $f(x) > 0$ und $\int^{x} f(u)\,du \to \infty$ mit $x \to \infty$ voraussetzen.

Cartwright und Littlewood [2] haben einen noch allgemeineren Fall untersucht, nämlich den, wenn die Rückstellkraft eine nichtlineare Funktion des Ausschlages ist, d. h. die Gleichung

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = p(t) \ . \tag{3}$$

Ihr Hauptresultat besteht darin, dass auch (3) die erwähnte Eigenschaft der linearen Differentialgleichung (1) besitzt, welche sie kurz „Konvergenz" nennen, wenn $g(x)$ annähernd linear (dabei $f(x) \geq a > 0$) oder $f(x)$ hinreichend gross ist. Andererseits haben sie ein Beispiel angegeben, wo sogar $f(x) =$ konst $>$ > 0 und doch „Konvergenz" nicht eintritt. Daraus ist ersichtlich, dass die Nichtlinearität von $g(x)$ ganz anders als die von $f(x)$ wirkt. Aus den Resultaten von Cartwright und Littlewood kann man aber schwer feststellen, wie klein der Unterschied zwischen der Funktion $g(x)$ und dem linearen Fall $\omega^2 x$ oder wie gross $f(x)$ sein muss, damit „Konvergenz" eintritt.

In der vorliegenden Arbeit werden wir zwei leicht verifizierbare für „Konvergenz" hinreichende Bedingungen angeben, worin die zweite die einfachere Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2c\dot{x} + g(x) = p(t) \tag{4}$$

betrifft.

2. Wir setzen die Stetigkeit von $f(x)$, $g(x)$ und $p(t)$ für alle x und t voraus. Zuerst beweisen wir den

Satz 1. *Es sei $p(t)$ eine periodische Funktion mit der Periode T und es existieren solche Konstanten $\omega > c > 0$, dass die Funktionen*

$$\varphi(x) = f(x) - 2c, \qquad \psi(x) = g(x) - \omega^2 x$$

die Ungleichungen

$$|\varphi(x)| \leq L_1 , \tag{5}$$

$$|\psi(x_2) - \psi(x_1)| \leq L_2 |x_2 - x_1| \tag{6}$$

erfüllen, wobei

$$\omega L_1 + L_2 = L < c\sqrt{\omega^2 - c^2} . \tag{7}$$

Dann hat (3) *eine periodische Lösung mit der Periode T, gegen welche alle anderen (und ihre Ableitungen gegen die Ableitung dieser periodischen Lösung) mit $t \to \infty$ exponential konvergieren.*[1])

Beweis: Erstens zeigen wir, dass jede Lösung von (3) und ihre Ableitung beschränkt ist.

Wenn

$$\ddot{x} + 2c\dot{x} + \omega^2 x = F(t) ,$$

so ist

$$x(t) = e^{-ct}[k_1 \cos \omega_1 t + k_2 \sin \omega_1 t] + \frac{1}{\omega_1}\int_0^t e^{-c(t-\tau)} \sin \omega_1 (t-\tau)\, F(\tau)\, d\tau , \tag{8}$$

wo

$$\omega_1^2 = \omega^2 - c^2 . \tag{9}$$

Weil wir (3) auf die Form

$$\ddot{x} + 2c\dot{x} + \omega^2 x = p(t) - \varphi[x(t)]\dot{x}(t) - \psi[x(t)]$$

bringen können, bekommen wir aus (8)

$$x(t) = e^{-ct}[k_1 \cos \omega_1 t + k_2 \sin \omega_1 t] + \frac{1}{\omega_1}\int_0^t e^{-c(t-\tau)} \sin \omega_1 (t-\tau) p(\tau)\, d\tau -$$

$$- \frac{1}{\omega_1}\int_0^t e^{-c(t-\tau)} \sin \omega_1 (t-\tau)\varphi[x(\tau)]\dot{x}(\tau)\, d\tau - \frac{1}{\omega_1}\int_0^t e^{-c(t-\tau)} \sin \omega_1 (t-\tau)\psi[x(\tau)] d\tau =$$

---

[1]) Darunter verstehen wir, dass der Unterschied gegen Null schneller als Ke^{-kt} konvergiert, wobei K und k positive Konstanten sind.

$$= e^{-ct}[k_1 \cos \omega_1 t + k_2 \sin \omega_1 t] + \frac{1}{\omega_1} \int_0^t e^{-c(t-\tau)} \sin \omega_1(t - \tau)\, p(\tau)\, d\tau +$$
$$+ \frac{1}{\omega_1} e^{-ct} \sin \omega_1 t\, \Phi[x(0)] +$$
$$+ \frac{1}{\omega_1} \int_0^t e^{-c(t-\tau)}[c \sin \omega_1(t - \tau) - \omega_1 \cos \omega_1(t - \tau)]\,.\, \Phi[x(\tau)]\, d\tau -$$
$$- \frac{1}{\omega_1} \int_0^t e^{-c(t-\tau)} \sin \omega_1(t - \tau)\psi[x(\tau)]\, d\tau \;,$$

wo

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(u)\, du \;.$$

Aus (5) folgt

$$|\Phi(x_2) - \Phi(x_1)| \leq L_1 |x_2 - x_1| \,. \tag{10}$$

Benützen wir (6) und (10) und bezeichnen wir $p_0 = \max |p(t)|$, so erhalten wir leicht

$$|x(t)| \leq C_1 e^{-ct} + \frac{p_0}{\omega_1} \int_0^t e^{-c(t-\tau)}\, d\tau + \frac{1}{\omega_1} e^{-ct}\, |\Phi[x(0)]| +$$
$$+ \frac{1}{\omega_1} \int_0^t e^{-c(t-\tau)} \sqrt{c^2 + \omega_1^2}\, L_1 |x(\tau)|\, d\tau + \frac{1}{\omega_1} \int_0^t e^{-c(t-\tau)} \{|\psi(0)| + L_2 |x(\tau)|\}\, d\tau \,.$$ [1])

Weil

$$\int_0^t e^{-c(t-\tau)}\, d\tau < \frac{1}{c} \,,$$

so ist

$$|x(t)| \leq C_2 e^{-ct} + M_1 + \frac{L}{\omega_1} \int_0^t e^{-c(t-\tau)}\, |x(\tau)|\, d\tau \,, \tag{11}$$

wo

$$M_1 = \frac{p_0 + |\psi(0)|}{c\omega_1} \,.$$

Aus (11) folgt

$$e^{ct}|x(t)| \leq C_2 + M_1 e^{ct} + \frac{L}{\omega_1} \int_0^t e^{c\tau}\, |x(\tau)|\, d\tau \,\cdot \tag{12}$$

Wenn wir $u(t) = \int_0^t e^{c\tau}\, |x(\tau)|\, d\tau$ setzen, haben wir

$$u' - \frac{L}{\omega_1} u = C_2 + M_1 e^{ct} - r(t) \;,$$

wobei

$$r(t) > 0, \qquad u(0) = 0 \;.$$

[1]) $C_1, C_2, \ldots, M_1, M_2 \ldots$ bedeuten im folgenden positive Konstanten. Dabei hängen $M_1, M_2, \ldots$ nicht von den Anfangswerten ab.

Daraus erhalten wir

$$u(t) = e^{\frac{L}{\omega_1}t} \int\limits_0^t [C_2 + M_1 e^{c\tau} - r(\tau)]\, e^{-\frac{L}{\omega_1}\tau}\, d\tau,$$

so dass

$$u(t) < -\frac{\omega_1 C_2}{L} + \frac{M_1}{c - \dfrac{L}{\omega_1}}\, e^{ct} + C_3\, e^{\frac{L}{\omega_1}t}$$

und

$$|x(t)| < \frac{cM_1}{c - \dfrac{L}{\omega_1}} + C_4 e^{-(c - \frac{L}{\omega_1})t} . \tag{13}$$

Die Lösung $x(t)$ ist also beschränkt. Für hinreichend grosse t gilt sogar

$$|x(t)| < \frac{cM_1}{c - \dfrac{L}{\omega_1}}. \tag{14}$$

Die rechte Seite von (14) hängt nicht von den Anfangswerten ab, so dass hiemit mehr bewiesen wurde als beabsichtigt war.

Was die Ableitung betrifft, so gilt

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) = {} & e^{-ct}[(-ck_1 + \omega_1 k_2)\cos \omega_1 t - (ck_2 + \omega_1 k_1)\sin \omega_1 t] + \\
& + \frac{1}{\omega_1}\int\limits_0^t e^{-c(t-\tau)}\, [c \sin \omega_1 (t - \tau) - \omega_1 \cos \omega_1 (t - \tau)]\, p(\tau)\, d\tau + \\
& + \frac{1}{\omega_1}\, \Phi[x(0)] e^{-ct}\, [-c \sin \omega_1 t + \omega_1 \cos \omega_1 t] - \Phi[x(t)] + \\
& + \frac{1}{\omega_1}\int\limits_0^t e^{-c(t-\tau)}[(\omega_1^2 - c^2)\sin \omega_1(t-\tau) + 2c\omega_1 \cos \omega_1(t-\tau)]\, \Phi[x(\tau)]\, d\tau - \\
& - \frac{1}{\omega_1}\int\limits_0^t e^{-c(t-\tau)}\, [-c \sin \omega_1(t-\tau) + \omega_1 \cos \omega_1(t-\tau)]\, \psi[x(\tau)]\, d\tau ,
\end{aligned}$$

so dans wir auf Grund von (13) für hinreichend grosse t leicht

$$|\dot{x}(t)| < M_2$$

beweisen können.

Zweitens zeigen wir, dass der Unterschied je zweier Lösungen und ihrer Ableitungen mit $t \to \infty$ gegen Null exponential konvergiert. Setzen wir $x_2(t) - x_1(t) = y(t)$. Es ist

$$\ddot{y} + 2c\dot{y} + \omega^2 y = \varphi(x_1)\dot{x}_1 - \varphi(x_2)\dot{x}_2 + \psi(x_1) - \psi(x_2) ,$$

also nach (8) haben wir

$$y(t) = e^{-ct}[k_1 \cos \omega_1 t + k_2 \sin \omega_1 t] - \frac{1}{\omega_1}\, e^{-ct} \sin \omega_1 t\, [\Phi[x_1(0)] - \Phi[x_2(0)]] -$$

$$-\frac{1}{\omega_1}\int_0^t \mathrm{e}^{-c(t-\tau)}[c\sin\omega_1(t-\tau)-\omega_1\cos\omega_1(t-\tau)][\Phi[x_1(\tau)]-\Phi[x_2(\tau)]]\,\mathrm{d}\tau+$$

$$+\frac{1}{\omega_1}\int_0^t \mathrm{e}^{-c(t-\tau)}\sin\omega_1(t-\tau)\,[\psi[x_1(\tau)]-\psi[x_2(\tau)]]\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Daraus

$$|y(t)|<C_5\mathrm{e}^{-ct}+\frac{\omega L_1}{\omega_1}\int_0^t \mathrm{e}^{-c(t-\tau)}|y(\tau)|\,\mathrm{d}\tau+\frac{L_2}{\omega_1}\int_0^t \mathrm{e}^{-c(t-\tau)}\,|y(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\ ,$$

oder

$$\mathrm{e}^{ct}|y(t)|<C_5+\frac{L}{\omega_1}\int_0^t \mathrm{e}^{c\tau}\,|y(\tau)|\,\mathrm{d}\tau.$$

Schreiten wir auf gleiche Art wie bei der Ungleichung (12) fort oder wenden wir eine BELLMANSCHE Ungleichung (siehe [3], Lemma 1) an, erhalten wir aus der letzten Ungleichung

$$\mathrm{e}^{ct}\,|y(t)|<C_5\,\mathrm{e}^{\frac{L}{\omega_1}t}\ ,$$

so dass

$$|y(t)|<C_5\,\mathrm{e}^{-\left(c-\frac{L}{\omega_1}\right)t} \tag{15}$$

und mit Rücksicht auf (7)

$$y(t)\to 0 \quad \text{mit} \quad t\to\infty\ .$$

Weiter lässt sich auf Grund von (15) leicht $\dot{y}(t)\to 0$ mit $t\to\infty$ einsehen.

Um den Beweis abzuschliessen, genügt jetzt einen Satz von MASSERA ([4] Satz 2) oder den folgenden Vorgang von Cartwright und Littlewood anzuwenden: Es sei $x(t)$ eine Lösung von (3). Dann sind die Folgen $\{x(nT)\}$ und $\{\dot{x}(nT)\}$ beschränkt, so dass konvergente Teilfolgen existieren: $\lim_{\nu\to\infty} x(n_\nu T)=$ $=\xi_0$, $\lim_{\nu\to\infty}\dot{x}(n_\nu T)=\dot{\xi}_0$. Es sei $u(t)$ die Lösung, welche durch die Anfangswerte $u(0)=\xi_0$, $\dot{u}(0)=\dot{\xi}_0$ bestimmt ist. Weil $x(t)$ eine Lösung von (3) und $p(t)$ periodisch mit der Periode T ist, so ist auch $x(t+T)$ eine Lösung von (3) und nach dem Bewiesenen

$$x(t+T)-x(t)\to 0,\qquad \dot{x}(t+T)-\dot{x}(t)\to 0 \quad \text{mit} \quad t\to\infty\ .$$

Daher

$$x(\overline{n_\nu+1}T)\to\xi_0.\qquad \dot{x}(\overline{n_\nu+1}T)\to\dot{\xi}_0 \qquad \text{mit } \nu\to\infty\ .$$

Die Lösung $y_\nu(t)=x(t+n_\nu T)$ hat die Eigenschaft, dass

$$\lim_{\nu\to\infty} y_\nu(0)=\xi_0=u(0),\quad \lim_{\nu\to\infty}\dot{y}_\nu(0)=\dot{\xi}_0=\dot{u}(0)\ .$$

Daher

$$\lim_{\nu\to\infty} y_\nu(t)=u(t)\ ,$$

so dass besonders

$$u(T) = \lim_{\nu\to\infty} y_\nu(T) = \lim_{\nu\to\infty} x(\overline{n_\nu + 1T}) = \xi_0, = u(0),$$

$$\dot{u}(T) = \lim_{\nu\to\infty} \dot{y}_\nu(T) = \lim_{\nu\to\infty} \dot{x}(\overline{n_\nu + 1T}) = \dot{\xi}_0 = \dot{u}(0) \ .$$

Das heisst aber, dass $u(t)$ periodisch mit der Periode T ist. Alle anderen Lösungen konvergieren mit $t \to \infty$ exponential gegen $u(t)$.

3. Im Falle der einfacheren Gleichung (4) beweisen wir den folgenden

Satz 2. *Es sei für alle* $x_2 > x_1$

$$m(x_2 - x_1) \leq g(x_2) - g(x_1) \leq M(x_2 - x_1) \ , \tag{16}$$

wo

$$0 < m \leq M < 2c^2 \ . \tag{17}$$

Dann hat (4) *eine periodische Lösung mit der Periode* T, *gegen welche alle anderen (und ihre Ableitungen gegen die Ableitung dieser periodischen Lösung) mit* $t \to \infty$ *exponential konvergieren.*

Beweis: Nach dem Beweis des vorangehenden Satzes genügt es zu zeigen, dass alle Lösungen und ihre Ableitungen beschränkt sind und der Unterschied je zweier Lösungen und ihrer Ableitungen mit $t \to \infty$ gegen Null exponential konvergiert.

Vorerst ist leicht ersichtlich, dass die Funktion

$$\psi(x) = g(x) - c^2 x$$

die Lipschitzsche Bedingung

$$|\psi(x_2) - \psi(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|$$

erfüllt, wo

$$L < c^2 \ . \tag{18}$$

Wir können nämlich $m < c^2 < M$ voraussetzen. Wenn wir dann die Bezeichnung so wählen, dass $x_2 > x_1$, so haben wir

$$|g(x_2) - g(x_1) - c^2(x_2 - x_1)| \leq \max\{M - c^2, c^2 - m\}(x_2 - x_1) = \\ = L|x_2 - x_1| \ ,$$

wo mit Rücksicht auf (16) $L < c^2$ gilt.

Bringen wir jetzt (4) auf die Form

$$\ddot{x} + 2c\dot{x} + c^2 x = p(t) - \psi(x) \ ,$$

bekommen wir mit Hilfe der Lagrangeschen Methode der unbestimmten Koeffizienten

$$x(t) = e^{-ct}[k_1 + k_2 t] + \int_0^t e^{-c(t-\tau)}(t - \tau)p(\tau)\,d\tau - \int_0^t e^{-c(t-\tau}(t - \tau)\psi[x(\tau)]\,d\tau \ ,$$

so dass

$$|x(t)| < C_1 t\mathrm{e}^{-ct} + \frac{p_0 + |\psi(0)|}{c^2} + L\mathrm{e}^{-ct}\int_0^t \mathrm{e}^{c\tau}(t-\tau)\,|x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \;,$$

weil ja

$$0 \leq \int_0^t \mathrm{e}^{-c(t-\tau)}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau < \frac{1}{c^2}$$

und

$$|\psi(x)| \leq |\psi(0)| + L|x| \;.$$

$x(t)$ erfüllt also die Ungleichung

$$\mathrm{e}^{ct}|x(t)| < C_1 t + M_1\mathrm{e}^{ct} + L\int_0^t \mathrm{e}^{c\tau}(t-\tau)|x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \;. \tag{19}$$

Setzen wir $u(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{c\tau}(t-\tau)\,|x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$, so ist

$$u'(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{c\tau}|x(\tau)|\,\mathrm{d}\tau, \qquad u''(t) = \mathrm{e}^{ct}|x(t)|, \qquad u(0) = u'(0) = 0 \;,$$

so dass (19)

$$u'' - Lu = C_1 t + M_1\mathrm{e}^{ct} - r(t)$$

ergibt, wo

$$r(t) > 0 \;.$$

Daraus

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{L}}\int_0^t [C_1\tau + M_1\mathrm{e}^{c\tau} - r(\tau)]\sinh\sqrt{L}\,(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{L}}\int_0^t [C_1\tau + M_1\mathrm{e}^{c\tau}]\sinh\sqrt{L}\,(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \;,$$

also

$$u(t) < C_2\mathrm{e}^{\sqrt{L}t} + M_2\mathrm{e}^{ct} \;.$$

Aus (19) und (18) folgt dann die Beschränktheit von $x(t)$, ja sogar für grosse t die mit Rücksicht auf die Anfangswerte gleichmässige Beschränktheit. Dasselbe gilt auch für die Ableitung.

Sind nun $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zwei Lösungen, so gilt für $y(t) = x_2(t) - x_1(t)$

$$\ddot{y} + 2c\dot{y} + c^2 y = \psi[x_1(t)] - \psi[x_2(t)] \;.$$

Wenn wir wieder die Lagrangesche Methode anwenden und im Resultate $|y(t)|$ abschätzen, erhalten wir

$$|y(t)| < C_4 t\mathrm{e}^{-ct} + C_5\mathrm{e}^{-(c-\sqrt{L})t} \to 0 \quad \text{mit } t \to \infty \;,$$

woraus leicht auch $\dot{y}(t) \to 0$ mit $t \to \infty$ folgt.

Korollar: *Wenn $g(x)$ eine Ableitung hat und dabei*

$$0 < m \leq g'(x) \leq M < 2c^2 ,$$

so gilt die Behauptung des Satzes 2.

LITERATUR

Levinson N.: On a non-linear differential equation of the second order (Journal of Math. and Phys., 1943).

Cartwright M. L. and *Littlewood J. E.:* On non-linear differential equations of the second order (Annals of Math. *48,* 1947, 472—494).

Bellman R.: The boundedness of solutions of linear differential equations (Duke Math. Journ. *14,* 1947, 83—97).

Massera J. L.: The existence of periodic solutions of systems of differential equations (Duke Math. Journ. *17,* 1950, 457—475).

Резюме.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

МИЛОШ ЗЛАМАЛ (Miloš Zlámal), Брно.

(Поступило в редакцию 29/VII 1953 г.)

Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами вынужденных колебаний

$$\ddot{x} + 2c\dot{x} + \omega^2 x = A \sin \Omega t \tag{I}$$

обладает тем свойством, что одно из его решений есть периодическая функция с периодом внешней силы — это и есть упомянутые вынужденные колебания — и все остальные решения стремятся при $t \to \infty$ к этому решению. Следовательно, вынужденные колебания устойчивы, а то в гораздо более сильном смысле, чем в смысле классического определения устойчивости Ляпунова.

Левинцон [1] доказал, что этим же свойством обладает и нелинейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + \omega^2 x = p(t) , \tag{II}$$

где $p(t)$ — периодическая функция от времени с периодом T, и коэффициент затухания $f(x)$ удовлетворяет условию

$$f(x) > 0 , \quad \int^{x} f(u)\,\mathrm{d}u \to \infty \quad \text{при} \quad x \to \infty .$$

Картврайт и *Литлвуд* [2] занимались еще более общим случаем, а именно, когда не только коэффициент затухания, но и вращающая сила является нелинейной функцией от амплитуды, т. е. уравнением

$$\ddot{x} + f(x)\,\dot{x} + g(x) = p(t)\,. \tag{III}$$

Они отмечают, что возникло мнение, будто бы и это урвавнение (при обычных условиях $f(x) \geqq a > 0$, $g(0) = 0$, $g'(x) \geqq b > 0$) имеет свойство дифференциального уравнения (I), которое они кратко называют „конвергенцией". Но Картврайт и Литлвуд нашли пример, который доказывает несправедливость этого утверждения: уравнение, где даже $f(x) = \text{konst} > 0$, т. е. уравнение вида

$$\ddot{x} + 2c\dot{x} + g(x) = p(t)\,, \tag{IV}$$

где „конвергенция" не имеет места. Отсюда видно, что нелинейность функции $g(x)$ совершенно иначе влияет, чем нелинейность $f(x)$. Главным результатом их работы является теорема в том, что уравнение (III) будет также обладать свойством „конвергенции", если, наряду с другими обще предположениями, либо $g(x)$ приблизительно линейна, либо $f(x)$ достаточно велика. Однако из их результата трудно установить, насколько малой должна быть разность между $g(x)$ и линейным случаем $\omega^2(x)$ или насколько большой должна быть $f(x)$, чтобы „конвергенция" имела место.

В настоящей работе приведены две теоремы, в которых найдем легко проверяемые достаточные условия для того, чтобы „конвергенция" имела место. Обе теоремы одинакового характера. Вторую, которая проще, можем кратко сформулировать следующим образом:

Пусть при всех $x_2 > x_1$

$$m(x_2 - x_1) \leqq g(x_2) - g(x_1) \leqq M(x_2 - x_1)\,,$$

где

$$0 < m \leqq M < 2c^2\,.$$

Потом уравнение (IV) обладает свойством „конвергенции".

Redakce: Matematický ústav Československé akademie věd Praha II, Žitná 25, tel. 241193. — Administrace: Nakladatelství Československé akademie věd, Praha II, Vodičkova 40, tel. 246241-8. — Vychází čtvrtletně. — Roční předplatné Kčs 100,—, cena jednotlivého sešitu Kčs 25,—. Novinové výplatné povoleno Okrskovým poštovním úřadem Praha 022: j. zn. 309-38-Ře-52. — Dohlédací poštovní úřad Praha 022.— Tisknou a expedují Pražské tiskárny n. p., provozovna 05 (Prometheus), Praha VIII, Tř. Rudé armády 171. — Náklad 800 výtisků.
Vyšlo dne 30. III. 1954.