Czechoslovak Mathematical Journal

Václav Vilhelm

Теорема Жордана-Гельдера в структурах без условия конечности цепей

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 4 (1954), No. 1, 29–(49)

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100098

ТЕОРЕМА ЖОРДАНА-ГЕЛЬДЕРА В СТРУКТУРАХ БЕЗ УСЛОВИЯ КОНЕЧНОСТИ ЦЕПЕЙ

ВАЦЛАВ ВИЛЬГЕЛМ (Václav Vilhelm), Прага.

(Поступило в редакцию 6/IX 1952 г.)

В статье *Владимира Коржинека Lattices in which the theorem of Jordan-Hölder is generally true**) рассматривается теорема Жордана-Гельдера с нижним (и дуально с верхним) простым подобием квоциентов в структурах с конечными цепями. В настоящей работе мы покажем, что условие конечности цепей можно заменить более общими условиями I, II, III, приведенными в § 1. Главным результатом является теорема 1,11, дающая необходимое и достаточное условие для того, чтобы в структуре, выполняющей условия I, II, III, имела место теорема Жордана-Гельдера с нижним простым подобием квоциентов (см. определение 1,1). Дальнейшие два параграфа посвящены приложениям и распространениям результатов § 1 для теоремы Жордана-Гельдера как на структуры, выполняющие максимальное условие для квоциентов (см. определение 2,2) (§ 2), так и на пару насыщенных цепей между элементами a, b, $a < b$ структуры, из которых одна цепь конечна (§ 3).

Введение.

Здесь мы введем основные определения и обозначения, которыми мы будем пользоваться.

Соединение и пересечение двух элементов a, b структуры S мы обозначим соответственно через $a \vee b$ и $a \wedge b$. Если S — полная структура, M — непустое множество элементов из S, то $\bigvee_{a \in M} a$ и $\bigwedge_{a \in M} a$ означают соответственно соединение и пересечение всех элементов из M в S.

Частичное упорядочение в S обозначим символом $<$. Отношение $a \leqq b$ означает, что имеет место $a < b$ или $a = b$. Пусть a, $b \in S$, $b \leqq a$. Под *квоциентом* a/b мы понимаем множество тех элементов $x \in S$, для которых $b \leqq x \leqq a$. Если $b < a$ и a/b содержит только элементы a, b, a/b назовем *простым квоциентом*. a/a есть *единичный квоциент*.

*) См. [2] в списке литературы, приведенном в конце статьи.

Пусть a/b, c/d, — квоциенты в S. Квоциент a/b будет *вниз прямо подобным* квоциенту c/d, если

$$a = b \vee c, \quad d = b \wedge c.$$

Тогда мы будем писать $a/b \underset{d}{\sim} c/d$.

Дуально: квоциент a/b *вверх прямо подобен* квоциенту c/d (запись $a/b \overset{d}{\sim} c/d$), если $b = a \wedge d$, $c = a \vee d$.

Квоциенты a/b, c/d *снизу* (*сверху*) *просто подобны*, если в S существует квоциент x/y (v/z) такой, что

$$a/b \underset{d}{\sim} x/y \overset{d}{\sim} c/d \quad (a/b \overset{d}{\sim} v/z \underset{d}{\sim} c/d) .$$

Это мы запишем так:

$$a/b \underset{j}{\sim} c/d \ (a/b \overset{j}{\sim} c/d) .$$

Структура S выполняет *нижнее условие простых квоциентов*, если квоциент c/d является простым квоциентом, как только $a/b \underset{d}{\sim} c/d$ и a/b — простой квоциент.

Дуально определяется *верхнее условие простых квоциентов*.

Структура S выполняет *нижнее условие Биркхоффа*, если квоциенты b/d, c/d являются простыми квоциентами, как только $a/b \underset{d}{\sim} c/d$ и a/b, a/c — простые квоциенты.

Дуально определяется *верхнее условие Биркхоффа*.

Пусть $a, b \in S$, $a \leqq b$. Множество элементов $x \in S$ таких, что $a \leqq x \leqq b$, упорядоченное соотношением $\leqq$, назовем *цепью между элементами* a, b, короче — *цепью*.

Если R — цепь в S между элементами $a \leqq b$, мы ее запишем в виде $\{a_\iota\}_0^\varrho$, где индексы ι пробегают некоторое множество M, упорядоченное соотношением $\prec$, с первым элементом 0 и последним ϱ, причем $a = a_0$, $b = a_\rho$, и

$$\iota, \varkappa \in M, \ \iota \prec \varkappa \Rightarrow a_\iota \leqq a_\varkappa . \tag{1}$$

Если вместо (1) имеет место импликация $\iota, \varkappa \in M$, $\iota \prec \varkappa \Rightarrow a_\iota < a_\varkappa$, мы говорим, что $\{a_\iota\}_0^\varrho$ является цепью без повторений.

Цепь R между элементами a, b будет *насыщенной*, если она не является собственной частью какой-либо цепи в S между a, b.

§ 1.

Определение 1,1. Мы будем говорить, что *в структуре S имеет место теорема Жордана-Гельдера с нижним простым подобием квоциентов*, если для любых двух элементов a, $b \in S$, $a < b$ и любых двух насыщенных цепей $\{a_\iota\}_0^\varrho$, $\{b_\varkappa\}_0^\sigma$ между a, b существует простое отображение множества всех простых квоциентов цепи $\{a_\iota\}_0^\varrho$ на множество всех простых квоциентов цепи $\{b_\varkappa\}_0^\sigma$, такое, что соответствующие друг другу простые квоциенты являются снизу просто подобными. Указанное отображение мы назовем *отображением Ж.-Г.*

Определение 1,2. *Структура S выполняет условие I*, если каждый ее квоциент является (в качестве подструктуры в S) полной структурой.

Теорема 1,1. *Пусть структура S выполняет условие I. Пусть $\{a_\iota\}_0^\varrho$, $\iota \in M$ будет цепью в S, $c \in S$. Тогда для любого $\lambda \in M$, $\lambda \neq \varrho$ имеет место*

$$\bigwedge_{\substack{\iota\in M\\ \lambda\prec\iota}} (a_\iota \wedge c) = \Big(\bigwedge_{\substack{\iota\in M\\ \lambda\prec\iota}} a_\iota\Big) \wedge c\,. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\bigwedge_{\substack{\iota\in M\\ \lambda\prec\iota}} a_\iota = a$. Для любого $\varkappa \in M$, $\lambda \prec \varkappa$ имеем $a_\varkappa \wedge c \geqq a \wedge c$ и, следовательно,

$$a_\varkappa \wedge c \geqq \bigwedge_{\substack{\iota\in M\\ \lambda\prec\iota}} (a_\iota \wedge c) \geqq a \wedge c\,.$$

Отсюда получаем

$$a_\varkappa \geqq \bigwedge_{\substack{\iota\in M\\ \lambda\prec\iota}} (a_\iota \wedge c) \quad \text{для любого } \varkappa \in M,\ \lambda \prec \varkappa, \tag{2}$$

$$c \geqq \bigwedge_{\substack{\iota\in M\\ \lambda\prec\iota}} (a_\iota \wedge c)\,. \tag{3}$$

Из (2) следует $a \geqq \bigwedge_{\substack{\iota\in M\\ \lambda\prec\iota}} (a_\iota \wedge c)$, откуда, с учетом (3), получим

$$a \wedge c \geqq \bigwedge_{\substack{\iota\in M\\ \lambda\prec\iota}} (a_\iota \wedge c)\,.$$

Итак, имеет место (1).

Теорема 1,2. *Пусть структура S выполняет условие I. Пусть $\{a_\iota\}_0^\varrho$, $\iota \in M$ будет цепью в S, $c \in S$. Тогда для любого $\lambda \in M$, $\lambda \neq 0$ имеет место*

$$\bigvee_{\substack{\iota\in M\\ \iota\prec\lambda}} (a_\iota \vee c) = \Big(\bigvee_{\substack{\iota\in M\\ \iota\prec\lambda}} a_\iota\Big) \vee c\,.$$

Доказательство получим дуальным рассуждением из теоремы 1,1.

Определение 1,3. Пусть в структуре S выполнено условие I. Мы скажем, что *S выполняет условие II*, если для любой цепи $\{a_\iota\}_0^\varrho$, $\iota \in M$ в S и любого элемента $c \in S$ имеет место

$$\lambda \in M,\ \lambda \neq 0 \Rightarrow \bigvee_{\substack{\iota\in M\\ \iota\prec\lambda}} (a_\iota \wedge c) = \Big(\bigvee_{\substack{\iota\in M\\ \iota\prec\lambda}} a_\iota\Big) \wedge c\,. \tag{4}$$

Замечание. Условие II не является следствием условия I, как показывает следующий простой пример. Пусть структура S образована плотно упорядоченной цепью $\{a_\iota\}_0^\varrho$, $\iota \in M$ без щелей, $a_0 < a_\varrho$ и элементом c таким, что $a_0 < c < a_\varrho$; $\iota \in M$, $0 \prec \iota \prec \varrho \Rightarrow c \text{ non} \leqq a_\iota \text{ non} \leqq c$. Предположим a_ϱ/c, c/a_0

будут простыми квоциентами (см. рис. 1). Очевидно, S выполняет условие I, но не выполняет условия II, ибо

$$\bigvee_{\substack{\iota \in M \\ \iota \prec \varrho}} (a_\iota \wedge c) = a_0 \neq c = a_\varrho \wedge c = \Big(\bigvee_{\substack{\iota \in M \\ \iota \prec \varrho}} a_\iota\Big) \wedge c\,.$$

На протяжении всего этого параграфа S будет означать структуру, выполяющую условия I, II.

Определение 1,4. Мы говорим, что *структура S имеет свойство V*, если для каждой ее насыщенной цепи без повторений $\{a_\iota\}_0^\varrho$, $\iota \in M$ и для каждого ее простого квоциента a_ϱ/b имеет место

$$\lambda \in M,\ \lambda \neq \varrho \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\iota \in M \\ \lambda \prec \iota}} (a_\iota \vee b) = \Big(\bigwedge_{\substack{\iota \in M \\ \lambda \prec \iota}} a_\iota\Big) \vee b\,. \tag{5}$$

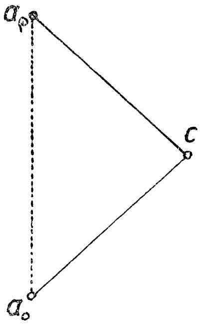

Рис. 1

Теорема 1,3. *Пусть структура S имеет свойство V. Пусть $\{b_\iota\}_0^\sigma$, $\iota \in N$ будет цепью в S, b_σ/c — простым квоциентом в S. Тогда имеет место*

$$\lambda \in N,\ \lambda \neq \sigma \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\iota \in N \\ \lambda \prec \iota}} (b_\iota \vee c) = \Big(\bigwedge_{\substack{\iota \in N \\ \lambda \prec \iota}} b_\iota\Big) \vee c\,. \tag{6}$$

Доказательство. Выберем $\lambda \in N$, $\lambda \neq \sigma$.

а) Пусть для некоторого $\lambda \prec \iota_0$ имеет место $\lambda \prec \iota \prec \iota_0 \Rightarrow b_\iota = b_{\iota_0}$. Тогда $\bigwedge_{\substack{\iota \in N \\ \lambda \prec \iota}} b_\iota = b_{\iota_0}$, $\bigwedge_{\substack{\iota \in N \\ \lambda \prec \iota}} (b_\iota \vee c) = b_{\iota_0} \vee c$, и поэтому имеет место (6).

б) Пусть не имеет места а). Тогда для любого $\iota \in N$, $\lambda \prec \iota$ существует $\bar\iota \in N$, $\lambda \prec \bar\iota$ так,что $b_\iota > b_{\bar\iota}$, $b_\iota > b_\lambda$. Вложим в цепь $\{b_\iota\}_0^\sigma$ насыщенную цепь $\{b'_{\iota'}\}_0^{\sigma'}$, $\iota' \in N'$ (без повторений). Пусть $\lambda' \in N'$ такой индекс, что $b'_{\lambda'} = b_\lambda$. Тогда имеет место импликация

$$\iota' \in N',\ \lambda' \prec \iota' \Rightarrow \text{ существует такое } b_{\iota_0},\ \iota_0 \in N,\ \lambda \prec \iota_0, \text{ что } b'_{\iota'} \geqq b_{\iota_0}, \tag{7}$$

$$\iota \in N,\ \lambda \prec \iota \Rightarrow \text{ существует такое } b'_{\iota'_0},\ \iota'_0 \in N',\ \lambda' \prec \iota'_0, \text{ что } b_\iota \geqq b'_{\iota'_0}. \tag{8}$$

Из (7) следует $\iota' \in N'$, $\lambda' \prec \iota' \Rightarrow b'_{\iota'} \geqq \bigwedge_{\substack{\iota \in N \\ \lambda \prec \iota}} b_\iota$, следовательно,

$$\bigwedge_{\substack{\iota' \in N' \\ \lambda' \prec \iota'}} b'_{\iota'} \geqq \bigwedge_{\substack{\iota \in N \\ \lambda \prec \iota}} b_\iota\,, \tag{9}$$

а с другой стороны из (8) следует $\iota \in N$, $\lambda \prec \iota \Rightarrow b_\iota \geqq \bigwedge_{\substack{\iota' \in N' \\ \lambda' \prec \iota'}} b'_{\iota'}$, следовательно,

$$\bigwedge_{\substack{\iota \in N \\ \lambda \prec \iota}} b_\iota \geqq \bigwedge_{\substack{\iota' \in N' \\ \lambda' \prec \iota'}} b'_{\iota'}\,. \tag{10}$$

Из (9) и (10) получаем

$$\bigwedge_{\substack{\iota \in N \\ \lambda \prec \iota}} b_\iota = \bigwedge_{\substack{\iota' \in N \\ \lambda' \prec \iota'}} b'_{\iota'}\,. \tag{11}$$

Аналогично с помощью (7) и (8) докажем, что

$$\bigwedge_{\substack{\iota\in N\\ \lambda\prec\iota}} (b_\iota \vee c) = \bigwedge_{\substack{\iota'\in N'\\ \lambda'\prec\iota'}} (b'_{\iota'} \vee c) . \tag{12}$$

Так как S имеет свойство V, то ввиду (11) и (12), будет

$$\bigwedge_{\substack{\iota\in N\\ \lambda\prec\iota}} (b_\iota \vee c) = \bigwedge_{\substack{\iota'\in N'\\ \lambda'\prec\iota'}} (b'_{\iota'} \vee c) = (\bigwedge_{\substack{\iota'\in N'\\ \lambda'\prec\iota'}} b'_{\iota'}) \vee c = (\bigwedge_{\substack{\iota\in N\\ \lambda\prec\iota}} b_\iota) \vee c ,$$

ч. т. д.

Замечание. Из доказательства теоремы 1,3 видно, что соотношение (6) остается в силе и в том случае, если предположение, что b_σ/c — простой квоциент, заменить предположением, что только $c \in S$, поизведя то же изменение и в определении 1,4.

Теорема 1,4. *Пусть структура S имеет свойство V. Пусть $\{a_\iota\}_0^\varrho$, $\iota \in M$ будет насыщенной цепью в S, c_1/c_2 — простым квоциентом в S, $a_\varrho \geqq c_1 > c_2$. Тогда имеет место*

$$\varkappa \in M,\ \varkappa \neq 0 \Rightarrow \bigvee_{\substack{\iota\in M\\ \iota\prec\varkappa}} [(a_\iota \wedge c_1) \vee c_2] = [(\bigvee_{\substack{\iota\in M\\ \iota\prec\varkappa}} a_\iota) \wedge c_1] \vee c_2 , \tag{13}$$

$$\lambda \in M,\ \lambda \neq \varrho \Rightarrow \bigwedge_{\substack{\iota\in M\\ \lambda\prec\iota}} [(a_\iota \wedge c_1) \vee c_2] = [(\bigwedge_{\substack{\iota\in M\\ \lambda\prec\iota}} a_\iota) \wedge c_1] \vee c_2 . \tag{14}$$

Доказательство. Выберем $\varkappa \in M$, $\varkappa \neq 0$. По теореме 1,2 будет

$$\bigvee_{\substack{\iota\in M\\ \iota\prec\varkappa}} [(a_\iota \wedge c_1) \vee c_2] = [\bigvee_{\substack{\iota\in M\\ \iota\prec\varkappa}} (a_\iota \wedge c_1)] \vee c_2$$

и, согласно (4),

$$[\bigvee_{\substack{\iota\in M\\ \iota\prec\varkappa}} (a_\iota \wedge c_1)] \vee c_2 = [(\bigvee_{\substack{\iota\in M\\ \iota\prec\varkappa}} a_\iota) \wedge c_1] \vee c_2 ,$$

чем доказано (13).

Выберем теперь $\lambda \in M$, $\lambda \neq \varrho$. Так как $a_\varrho \wedge c_1 = c_1$, то можно использовать теорему 1,3. Мы получим

$$\bigwedge_{\substack{\iota\in M\\ \lambda\prec\iota}} [(a_\iota \wedge c_1) \vee c_2] = [\bigwedge_{\substack{\iota\in M\\ \lambda\prec\iota}} (a_\iota \wedge c_1)] \vee c_2$$

и из теоремы 1,1

$$[\bigwedge_{\substack{\iota\in M\\ \lambda\prec\iota}} (a_\iota \wedge c_1)] \vee c_2 = [(\bigwedge_{\substack{\iota\in M\\ \lambda\prec\iota}} a_\iota) \wedge c_1] \vee c_2 .$$

Этим теорема доказана.

Если $\{a_\iota\}_0^\varrho$, $\iota \in M$, — насыщенная цепь (без повторений) в S, $a_\varkappa$, $a_\lambda \in \{a_\iota\}_0^\varrho$, $a_\varkappa/a_\lambda$ — простой квоциент, то мы будем писать $\varkappa = \lambda + 1$ (так как индекс $\varkappa$ следует в M непосредственно за индексом λ).

Пусть дана структура S; пусть $a, b \in S$, $a < b$ и пусть между a, b даны две насыщенные цепи (без повторений)

$$\{a_\iota\}_0^\varrho,\ \iota \in M,\ a_0 = a,\ a_\varrho = b, \tag{15}$$

$$\{b_\varkappa\}_0^\sigma,\ \varkappa \in N,\ b_0 = a,\ b_\sigma = b\ . \tag{16}$$

Обозначим через A множество всех тех индексов $\iota \in M$, для которых существуют $a_\lambda \in \{a_\iota\}_0^\varrho$ такое, что a_λ / a_ι является простым квоциентом, т. е. $\lambda = \iota + 1$. Множество A, являясь частью M, упорядочено соотношением $\prec$.

Аналогичным образом введем множество B для цепи $\{b_\varkappa\}_0^\sigma$. Образуем т. наз. нижние выражения Цассенхауза

$$a_{\iota,\varkappa} = a_\iota \vee (b_\varkappa \wedge a_{\iota+1}) \quad \text{для всех } \iota \in A,\ \varkappa \in N\ .$$

Элементы $a_{\iota,\varkappa}$ образуют цепь

$$\{\{a_\iota \vee (b_\varkappa \wedge a_{\iota+1})\}_{\varkappa=0}^{\varkappa=\sigma}\}_{\iota\in A}\ . \tag{17}$$

Аналогично вводим

$$b_{\varkappa,\iota} = b_\varkappa \vee (a_\iota \wedge b_{\varkappa+1}) \quad \text{для всех} \quad \varkappa \in B,\ \iota \in M\ .$$

Элементы $b_{\varkappa,\iota}$ образуют цепь

$$\{\{b_\varkappa \vee (a_\iota \wedge b_{\varkappa+1})\}_{\iota=0}^{\iota=\varrho}\}_{\varkappa\in B}\ . \tag{18}$$

Теорема 1,5. *Пусть S выполняет нижнее условие простых квоциентов. Пусть в S между элементами $a < b$ существуют две насыщенные цепи (без повторений* (15) *и* (16). *Образуем цепи* (17) *и* (18). *Тогда для всяких $\iota \in A$, $\varkappa \in B$ имеет место*

$$a_{\iota,\varkappa+1}/a_{\iota,\varkappa} \underset{d}{\sim} a_{\iota+1} \wedge b_{\varkappa+1}/(a_{\iota+1} \wedge b_\varkappa) \vee (a_\iota \wedge b_{\varkappa+1}) \overset{d}{\sim} b_{\varkappa,\iota+1}/b_{\varkappa,\iota}\ . \tag{19}$$

Доказательство.*) Прежде всего докажем следующее *утверждение* A:

Если c_1/c_2, d_1/d_2 — простые квоциенты или единичные квоциенты в S, то имеет место

$$[(c_1 \wedge d_2) \vee c_2] \wedge (c_1 \wedge d_1) = (c_1 \wedge d_2) \vee [c_2 \wedge (c_1 \wedge d_1)] \tag{20}$$

(c_2 является α-модулярным относительно $(c_1 \vee d_1)$, $(c_1 \vee d_2)$). Доказательство вспомогательного утверждения A. Имеем $c_2 \leqq c_2 \vee (c_1 \wedge d_1) \leqq c_1$. Так как c_1/c_2 — единичный квоциент или простой квоциент, то будет иметь место хоть одно из соотношений

1. $c_2 = c_2 \vee (c_1 \wedge d_1)$, 2. $c_1 = c_2 \vee (c_1 \wedge d_1)$.

Пусть имеет место 1. Тогда $c_2 \geqq c_1 \vee d_1$ и отсюда

$$(c_1 \wedge d_2) \vee [c_2 \wedge (c_1 \wedge d_1)] = (c_1 \wedge d_2) \vee (c_1 \wedge d_1) = c_1 \wedge d_1\ ;$$
$$[(c_1 \wedge d_2) \vee c_2] \wedge (c_1 \wedge d_1) = c_2 \wedge (c_1 \wedge d_1) = c_1 \wedge d_1\ .$$

Значит, справедливо (20).

---

*) Это доказательство является тривиальным обобщением доказательства проф. *Владимира Коржинека* для теоремы 1,5, в которой цепи (15) и (16) конечны. (Семинар „Rozhovory o theorii grup a oborech příbuzných“ 1949-50, не было опубликовано).

Пусть наступит случай 2. Прежде всего можно предположить, что $c_1 > c_2$, $d_1 \geqq d_2$, ибо для $c_1 = c_2$ соотношение (20) тривиально. Имеем $c_1/c_2 \underset{d}{\sim} c_1 \wedge d_1/c_2 \wedge d_1$. Из нижнего условия простых квоциентов следует, что $c_1 \wedge d_1/c_2 \wedge d_1$ будет простым квоциентом. Далее имеем

$$c_2 \wedge d_1 \leqq (c_1 \wedge d_2) \vee (c_2 \wedge d_1) \leqq c_1 \vee d_1 .$$

Теперь мы имеем два подслучая.

а) $c_2 \wedge d_1 = (c_1 \wedge d_2) \vee (c_2 \wedge d_1)$.

Отсюда $c_2 \geqq c_2 \wedge d_1 \geqq c_1 \wedge d_2$,

$$(c_1 \wedge d_2) \vee [c_2 \wedge (c_1 \wedge d_1)] = (c_1 \wedge d_2) \vee (c_2 \wedge d_1) = c_2 \wedge d_1$$

и с другой стороны

$$[(c_1 \wedge d_2) \vee c_2] \wedge (c_1 \wedge d_1) = c_2 \wedge (c_1 \wedge d_1) = c_2 \wedge d_1 .$$

б) $c_1 \wedge d_1 = (c_1 \wedge d_2) \vee (c_2 \wedge d_1)$. Имеем $(c_1 \wedge d_2) \vee [c_2 \wedge (c_1 \wedge d_1)] = (c_1 \wedge d_2) \vee \vee (c_2 \wedge d_1) = c_1 \wedge d_1$. Далее $(c_1 \wedge d_2) \vee c_2 \leqq c_1 \vee c_2 = c_1$,

$c_1 \wedge d_1 = (c_1 \wedge d_2) \vee [c_2 \wedge (c_1 \wedge d_1)] \leqq [(c_1 \wedge d_2) \vee c_2] \wedge (c_1 \wedge d_1) \leqq c_1 \wedge (c_1 \wedge d_1) = = c_1 \wedge d_1$. Итак, снова имеет место (20). Утверждение A доказано.

Выберем теперь $\iota \in A$, $\varkappa \in B$. Прежде всего имеем

$$a_{\iota,\varkappa} \vee (a_{\iota+1} \wedge b_{\varkappa+1}) = a_\iota \vee (a_{\iota+1} \wedge b_\varkappa) \vee (a_{\iota+1} \wedge b_{\varkappa+1}) = a_{\iota,\varkappa+1} . \tag{21}$$

Положим теперь в утверждении A

$$c_1 = a_{\iota+1},\ c_2 = a_\iota,\ d_1 = b_{\varkappa+1},\ d_2 = b_\varkappa .$$

Тогда из этого утверждения и из (21) вытекает левая часть соотношения (19), правая же часть следует из левой вследствие симметрии предположений.

Теорема 1,6. *Пусть структура S имеет свойство V. Пусть в S даны две насыщенные цепи (без повторений) (15) и (16). Построим цепь (17). Тогда для каждого простого квоциента $a_{\iota+1}/a_\iota$ из цепи (15) существует один и только один индекс $\lambda \in B$ так, что $a_{\iota+1}/a_\iota = a_{\iota,\lambda+1}/a_{\iota,\lambda}$.*

Доказательство. Пусть $a_{\iota+1}/a_\iota$ — простой квоциент из цепи (15). Выделим из цепи (17) часть

$$\{a_\iota \vee (b_\varkappa \wedge a_{\iota+1})\}_{\varkappa=0}^{\varkappa=\sigma} . \tag{22}$$

Имеем $a_\iota \vee (b_0 \wedge a_{\iota+1}) = a_\iota$, $a_\iota \vee (b_\sigma \wedge a_{\iota+1}) = a_{\iota+1}$, $a_{\iota+1}/a_\iota$ будет простым квоциентом. Итак, для любого $\varkappa \in N$ будет или $a_\iota \vee (b_\varkappa \wedge a_{\iota+1}) = a_\iota$ или $a_\iota \vee (b_\varkappa \wedge a_{\iota+1}) = a_{\iota+1}$. Так как $\{b_\varkappa\}_0^\sigma$, $\varkappa \in N$ является насыщенной цепью (без повторений) и квоциент b_σ/b_0, являясь подструктурой в S, представляет собой полную структуру, то упорядоченное множество индексов N не имеет щелей. Дадим теперь в N определение сечения (N_1, N_2): нижняя часть N_1 является множеством тех $\varkappa \in N$, для которых $a_\iota \vee \vee (b_\varkappa \wedge a_{\iota+1}) = a_\iota$, верхняя часть N_2 множеством тех $\varkappa \in N$, для которых

$a_\iota \vee (b_\varkappa \wedge a_{\iota+1}) = a_{\iota+1}$. Мы утверждаем: сечение (N_1, N_2) определяет в N скачок, т. е. N_1 имеет последний, и N_2 первый элемент. Действительно, во первых, нам уже известно, что наступит хоть один из следующих двух случаев: (α) N_1 имеет последний элемент, (β) N_2 имеет первый элемент. Пусть наступит (α), и N_2 не имеет первого элемента. Обозначим последний элемент множества N_1 через λ. Имеем $0 \precsim \lambda \precsim \sigma$ и получаем

$$\bigwedge_{\substack{\varkappa\in N\\ \lambda\prec\varkappa}} [a_\iota \vee (b_\varkappa \wedge a_{\iota+1})] = \bigwedge_{\substack{\varkappa\in N\\ \lambda\prec\varkappa}} a_{\iota+1} = a_{\iota+1}\,. \tag{23}$$

Но с другой стороны, используя теорему 1,4, получим

$$\bigwedge_{\substack{\varkappa\in N\\ \lambda\prec\varkappa}} [a_\iota \vee (b_\varkappa \wedge a_{\iota+1})] = a_\iota \vee [(\bigwedge_{\substack{\varkappa\in N\\ \lambda\prec\varkappa}} b_\varkappa) \wedge a_{\iota+1}]\,. \tag{24}$$

Так как $\{b_\varkappa\}_0^\sigma$, $\varkappa \in N$ является насыщенной цепью, и N_2 не имеет первого элемента, то имеет место

$$\bigwedge_{\substack{\varkappa\in N\\ \lambda\prec\varkappa}} b_\varkappa = b_\lambda\,. \tag{25}$$

Из (24) и (25) следует

$$\bigwedge_{\substack{\varkappa\in N\\ \lambda\prec\varkappa}} [a_\iota \vee (b_\varkappa \wedge a_{\iota+1})] = a_\iota \vee (b_\lambda \wedge a_{\iota+1}) = a_\iota\,. \tag{26}$$

Из (23) и (26) получаем требуемое противоречие. Если наступит (β), то аналогично докажем, что верно и (α).

Пусть λ — последний элемент N_1, μ — первый элемент N_2. Тогда $\mu = \lambda + 1$ и $a_\iota = a_\iota \vee (b_\lambda \wedge a_{\iota+1}) = a_{\iota,\lambda}$, $a_{\iota+1} = a_\iota \vee (b_{\lambda+1} \vee a_{\iota+1}) = a_{\iota,\lambda+1}$, ч.т.д.

Определение 1,5. Пусть в структуре S имеются насыщенные цепи (без повторений) (15) и (16). Мы скажем, что *нижнее построение Цассенхауза, примененное к* (15), (16), *дает отображение Ж.-Г.*, если существует отображение Ж.-Г. φ множества всех простых квоциентов цепи (15) на множество всех простых квоциентов цепи (16) такое, что

$$\varphi(a_{\iota+1}/a_\iota) = b_{\varkappa+1}/b_\varkappa \Rightarrow a_{\iota+1}/a_\iota = a_{\iota,\varkappa+1}/a_{\iota,\varkappa} \underset{d}{\sim}$$
$$\underset{d}{\sim} a_{\iota+1} \wedge b_{\varkappa+1}/(a_\iota \wedge b_{\varkappa+1}) \vee (a_{\iota+1} \wedge b_\varkappa) \overset{d}{\sim} b_{\varkappa,\iota+1}/b_{\varkappa,\iota} = b_{\varkappa+1}/b_\varkappa$$

для любого $\iota \in A$.

В S справедлива *теорема Жордана-Гельдера с нижним построением Цассенхауза*, если нижнее построение Цассенхауза, примененное к произвольным двум насыщенным цепям (без повторений) между произвольными двумя элементами $a < b$ структуры S дает отображение Ж.-Г.

Теорема 1,7. *Пусть структура S выполняет нижнее условие простых квоциентов и имеет свойство V. Тогда в S справедлива теорема Жордана-Гельдера с нижным построением Цассенхауза.*

Доказательство следует непосредственно из теоремы 1,5 и 1,6.

Теорема 1,7 не дает, однако, необходимого условия для справедливости теоремы Жордана-Гельдера в S, как показывает следующий пример. Пусть рис. 2 представляет графическое изображение структуры S. При этом a/b, c/d — простые квоциенты; между a, c (b, d) имеется насыщенная цепь без скачков и щелей. В S имеют, очевидно, место условия I, II и теорема Жордана-Гельдера; однако, здесь не выполнено нижнее условие простых квоциентов: пусть $e \in S$, $a > e > c$. Такой элемент существует. Имеет место $a/b \underset{d}{\sim} e/d$, e/d не является простым квоциентом.

Условие III для структуры S, изложенное в следующем определении, позволит нам уже доказать необходимость условий теоремы 1,7.

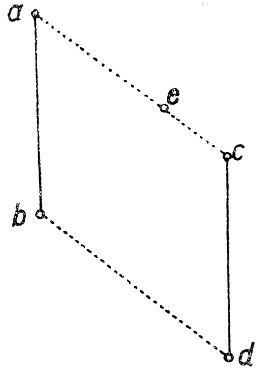

Рис. 2

Определение 1,6. *Структура S выполняет условие III*, если для любой ее насыщенной цепи $\{a_\iota\}_0^\varrho$, $\iota \in M$ и любых двух элементов $a_\alpha, a_\beta \in \{a_\iota\}_0^\varrho$, $a_\alpha < a_\beta$ существуют в $\{a_\iota\}_0^\varrho$ элементы $a_\varkappa$, a_λ такие, что $a_\alpha \leqq a_\varkappa < a_\lambda \leqq a_\beta$, причем $a_\lambda/a_\varkappa$ является простым квоциентом в S.

Теорема 1,8. *Пусть структура S выполняет условие III. Пусть в S справедлива теорема Жордана-Гельдера с нижним простым подобием квоциентов. Тогда в S выполняется нижнее условие простых квоциентов.*

Доказательство. Пусть в S справедлива теорема Жордана-Гельдера, но не выполняется нижнее условие простых квоциентов. Тогда в S существует простой квоциент a/b такой, что $a/b \underset{d}{\sim} c/d$, c/d квоциент в S, но не простой квоциент. Следовательно, существует $x \in S$, $d < x < c$.

Цепи $d < b < a$, $d < x < c < a$ уплотним в насыщенные цепи R_1 и R_2. Так как вследствие условия III между d, c имеются хоть два простых квоциента, a/b — простой квоциент, то хоть один из них при отображении Ж.-Г. должен отобразиться на простой квоциент $b_{\varkappa+1}/b_\varkappa$, $b_\varkappa, b_{\varkappa+1} \in R_1$, $d \leqq b_\varkappa < b_{\varkappa+1} \leqq b$. Пусть им будет

$$b_{\varkappa+1}/b_\varkappa \underset{d}{\sim} u/v \overset{d}{\sim} c_{\lambda+1}/c_\lambda, \quad \text{где} \quad c_\lambda, c_{\lambda+1} \in R_2,\ d \leqq c_\lambda < c_{\lambda+1} \leqq c\,.$$

Имеем $b_{\varkappa+1} \geqq u$, $c_{\lambda+1} \geqq u$. Отсюда $d = b \wedge c \geqq b_{\varkappa+1} \wedge c_{\lambda+1} \geqq d$, значит, $d = b_{\varkappa+1} \wedge c_{\lambda+1} \geqq u$, и поэтому $c_\lambda \geqq d \geqq u$. Следовательно, $c_\lambda \vee u = c_\lambda \neq c_{\lambda+1}$, т. е. противоречие.

В следующей лемме S в виде исключения означает произвольную структуру.

Лемма 1,9.*) *Пусть S — структура с нижним условием простых кво-*

*) Эта лемма является некоторым обобщением теоремы 3,2 в статье Коржинека [2].

циентов, a/b, c/d — квоциенты в S, $a/b \underset{d}{\sim} c/d$, a/b — простой квоциент. Пусть $\{a_\iota\}_0^\varrho$, $\iota \in M$ — цепь между c, a. Положим

$$b_\iota = a_\iota \wedge b \quad \textit{для каждого} \quad \iota \in M\ .$$

Тогда $\{b_\iota\}_0^\varrho$, $\iota \in M$ является цепью между d, b и имеет место

$$a_\varkappa, a_\lambda \in \{a_\iota\}_0^\varrho,\ a_\lambda < a_\varkappa \Rightarrow a_\varkappa/a_\lambda \underset{d}{\sim} b_\varkappa/b_\lambda\ .$$

Доказательство. 1. Для любого $\lambda \in M$ имеет место $a/b \underset{d}{\sim} a_\lambda/b_\lambda$. В самом деле, прежде всего $b \wedge a_\lambda = b_\lambda$. Далее $b \leqq b \vee a_\lambda \leqq a$, a/b — простой квоциент. Не может быть $b = b \vee a_\lambda$, иначе было бы $a = b \vee c \leqq b \vee a_\lambda = b$, что является противоречием. Итак, $b \vee a_\lambda = a$, $a/b \underset{d}{\sim} a_\lambda/b_\lambda$ и следовательно, a_λ/b_λ — простой квоциент.

2. Пусть $\varkappa, \lambda \in M, a_\lambda < a_\varkappa$. Во-первых, $a_\lambda \wedge b_\varkappa = a_\lambda \wedge a_\varkappa \wedge b = a_\lambda \wedge b = b_\lambda$. Далее $b_\varkappa \leqq a_\lambda \vee b_\varkappa \leqq a_\varkappa$, $a_\varkappa/b_\varkappa$ — простой квоциент. Если бы имело место $b_\varkappa = a_\lambda \vee b_\varkappa$, то было бы $a_\lambda \leqq b_\varkappa$, откуда $c \leqq a_\lambda \leqq b_\varkappa \leqq b \Rightarrow b \vee c = b \neq a$, что противоречит допущению. Итак, $a_\varkappa = a_\lambda \vee b_\varkappa$, ч. т. д.

Теорема 1,10. *Пусть структура S выполняет условие III. Пусть в S справедлива теорема Жордана-Гельдера с нижним простым подобием квоциентов. Тогда S имеет свойство V, указанное в определении* 1,4.

Доказательство. Прежде всего по теореме 1,8 в S выполняется нижнее условие простых квоциентов. Пусть S не имеет свойства V. Тогда в S существует насыщенная цепь (без повторений) $\{a_\iota\}_0^\varrho$, $\iota \in M$ и простой квоциент a_ϱ/b такой, что не имеет места (5). Можно прямо предположить, что $b \geqq a_0$ (иначе мы продолжили бы $\{a_\iota\}_0^\varrho$ до элемента $a_0 \wedge b$). Обозначим через N множество тех индексов $\iota \in M$, для которых $a_\iota \leqq b$. Множество N имеет последний элемент ϱ_0, так как $\{a_\iota\}_0^\varrho$ — насыщенная цепь без повторений, и S выполняет условие I. Следовательно, $a_{\varrho_0} < a_\iota \Rightarrow a_\iota \vee b = a_{\varrho_0}, a_{\varrho_0} \vee b = b$.

Легко убедиться в следующем: так как не имеет места (5), то b не лежит в цепи $\{a_\iota\}_0^\varrho$, и множество M_1 тех индексов $\iota \in M$, для которых $\varrho_0 \prec \iota$, не имеет первого элемента, причем

$$a_\varrho = \bigwedge_{\iota\in M_1} (a_\iota \vee b) \neq (\bigwedge_{\iota\in M_1} a_\iota) \vee b = a_{\varrho_0} \vee b = b\ . \tag{26'}$$

Для всех $\iota \in M_1$ построим элементы $b_\iota = a_\iota \wedge b$. Для всех $\iota \in M_1$ будет $a_{\varrho_0} < b_\iota \leqq b$, так как если бы для какого-либо $\iota_0 \in M_1$ было $b_{\iota_0} = a_{\varrho_0}$, то имело бы место $a_\varrho/b \underset{d}{\sim} a_{\iota_0}/a_{\varrho_0}$, что противоречит нижнему условию простых квоциентов. Далее имеет место

$$\iota, \varkappa \in M_1,\ \varkappa \prec \iota \Rightarrow a_\iota/b_\iota \underset{d}{\sim} a_\varkappa/b_\varkappa\ ,$$

ибо $a_\varrho/b \underset{d}{\sim} a_\varkappa/b_\varkappa$ и далее по теореме 1,9. В частности, если $a_{\iota+1}/a_\iota$ — простой квоциент в $\{a_\iota\}_{\varrho_0}^\varrho$, то

$$a_{\iota+1}/a_\iota \underset{d}{\sim} b_{\iota+1}/b_\iota\ . \tag{27}$$

Возьмем теперь цепь

$$\{a_\iota\}_{\varrho_0}^{\varrho} \tag{28}$$

и цепь

$$\{b_\iota\}_{\varrho_0}^{\varrho}\,, \quad \text{где} \quad b_{\varrho_0} = a_{\varrho_0}\,. \tag{29}$$

Дополним $\{b_\iota\}_{\varrho_0}^{\varrho}$ до насыщенной цепи

$$\{b'_\varkappa\}_0^{\varphi}\,, \ \varkappa \in P \tag{30}$$

между a_{ϱ_0}, b. Однако, теперь вследствие (27) между простыми квоциентами цепей (28) и (30), к которой мы присоединили элемент a_ϱ, не может иметь места отображение Ж.-Г., ибо, как нетрудно видеть,*) квоциент $a_{\iota+1}/a_\iota$ всегда соответствует простому квоциенту $b_{\iota+1}/b_\iota$, и тогда a_ϱ/b не соответствует никакому простому квоциенту из (28). Это противоречие — значит, S имеет свойство V.

Следующая теорема резюмирует предыдущие результаты.

Теорема 1,11. *Пусть структура S выполняет условия I, II, III. В S имеет место теорема Жордана-Гельдера с нижним простым подобием квоциентов тогда и только тогда, если* 1. *S выполняет нижнее условие простых квоциентов*, 2. *S имеет свойство V из определения* 1,4. *Если S выполняет* 1., 2., *то в ней имеет место теорема Жордана-Гельдера с нижним построением Цассенхауза.*

Доказательство. Теорема является прямым следствием теорем 1,7, 1,8 и 1,10.

Следующая теорема дает нам пример структуры. выполняющей условия I, II, III.

Теорема 1,12. *Пусть G — группа, $L(G)$ — структура всех ее подгрупп. $L(G)$ выполняет условия I, II, III.*

Доказательство. Структура $L(G)$, являясь полной, выполняет условие I. Докажем, что соблюдается условие II. Пусть $\{H_\iota\}_0^{\varrho}$, $\iota \in M$, — цепь в $L(G)$, $K \in L(G)$. Выберем $\lambda \in M$, $\lambda \neq 0$. Тогда имеет место

$$\bigvee_{\substack{\iota\in M\\ \iota\prec\lambda}} (H_\iota \wedge K) = \Big(\bigvee_{\substack{\iota\in M\\ \iota\prec\lambda}} H_\iota\Big) \wedge K,$$

ибо прежде всего для каждого элемента $g \in \bigvee_{\substack{\iota\in M\\ \iota\prec\lambda}} (H_\iota \wedge K)$ существует $\iota_0 \preccurlyeq \lambda$ так, что $g \in H_{\iota_0}$, $g \in K$, а, значит, и $g \in \big(\bigvee_{\substack{\iota\in M\\ \iota\prec\lambda}} H_\iota\big) \wedge K$. Поэтому $\bigvee_{\substack{\iota\in M\\ \iota\prec\lambda}} (H_\iota \wedge K) \subseteqq$ $\subseteqq \big(\bigvee_{\substack{\iota\in M\\ \iota\prec\lambda}} H_\iota\big) \wedge K$. Пусть наоборот $g \in \big(\bigvee_{\substack{\iota\in M\\ \iota\prec\lambda}} H_\iota\big) \wedge K$. Тогда существует $\iota' \preccurlyeq \lambda$

*) Коржинек [2], лемма 4,1, которая верна и без предположения о конечности цепей в структуре.

так, что $g \in H_{\iota'} \wedge K$ или $g \in \bigvee_{\substack{\iota \in M \\ \iota \prec \lambda}} (H_\iota \wedge K)$. Итак, $(\bigvee_{\substack{\iota \in M \\ \iota \prec \lambda}} H_\iota) \wedge K \subseteqq \bigvee_{\substack{\iota \in M \\ \iota \prec \lambda}} (H_\iota \wedge K)$.

Соблюдение условия III в $L(G)$ также можно легко доказать.*)

Замечание. Условие 2. из теоремы 1,11 можно заменить условием 2′: *в S не существует подструктуры S_1, график которой дан на рис. 3. S_1 образована насыщенной цепью (без повторений) $\{a_\iota\}_0^\varrho$, $\iota \in M$ ($M - \{0\}$ не имеет первого элемента) в S, цепью $\{b_\iota\}_0^\varrho$, $b_0 = a_0$ в S, причем a_ϱ/b_ϱ — простой квоциент в S,*

$$\iota \in A \Rightarrow a_{\iota+1}/a_\iota \underset{d}{\sim} b_{\iota+1}/b_\iota, \quad a_\iota \vee b_\varrho = a_\varrho, \ a_\iota \wedge b_\varrho = b_\iota \ , \tag{31}$$

где A — множество тех $\iota \in M$, для которых существуют $\iota + 1$.

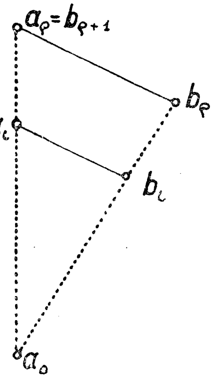

Рис. 3

Доказательство. а) Пусть в S справедлива теорема Жордана-Гельдера. Тогда, согласно 1,11, в S соблюдается нижнее условие простых квоциентов. Пусть в S существует подструктура S_1. Возьмем цепи $\{a_\iota\}_0^\varrho$ и $\{b'_\varkappa\}_0^\sigma$, $\varkappa \in N$; последняя возникла из $\{b_\iota\}_0^{\varrho+1}$, $b_{\varrho+1} = a_\varrho$ дополнением до насыщенной цепи в S. Вследствие (31) и замечания*) на стр. 39 ни один из простых квоциентов из $\{a_\iota\}_0^\varrho$ не поставлен, однако, в соответствие с простым квоциентом a_ϱ/b_ϱ. Это противоречие. б) Пусть в S не будет справедлива теорема Жордана-Гельдера, и соблюдается нижнее условие простых квоциентов. Тогда по теореме 1,10 (26′) в S существует насыщенная цепь $\{a_\iota\}_0^\varrho$, $\iota \in M$ и простой квоциент a_ϱ/b_ϱ так, что

$$a_\varrho = \bigwedge_{\substack{\iota \in M \\ 0 \prec \iota}} (a_\iota \vee b_\varrho) > (\bigwedge_{\substack{\iota \in M \\ 0 \prec \iota}} a_\iota) \vee b_\varrho = b_\varrho \ .$$

Итак, множество $M - \{0\}$ не имеет первого элемента и $a_0 = \bigwedge_{\substack{\iota \in M \\ 0 \prec \iota}} a_\iota < b_\varrho$; $\iota \in M$, $0 \precneqq \iota \Rightarrow a_\iota \vee b_\varrho = a_\varrho$. Построим элементы $b_\iota = a_\iota \wedge b_\varrho$, $\iota \in M$. Тогда $a_\varrho/a_\iota \underset{d}{\sim} b_\varrho/b_\iota$, а, значит, и $a_\varrho/b_\varrho \underset{d}{\sim} a_\iota/b_\iota$ для любого $\iota \in M$, $\iota \neq 0$. Отсюда по лемме 1,9 для каждого $\iota \in M$, для которого существует $\iota + 1$, будет $a_{\iota+1}/a_\iota \underset{d}{\sim} b_{\iota+1}/b_\iota$, и мы получим, таким образом, подструктуру S_1.

Еще один пример структур, соблюдающих условия I, II, III, мы встретим во втором параграфе.

*) *А. Г. Курош-С. Н. Черников* [3].

§ 2.

Определение 2,1. *В структуре S соблюдается максимальное условие*, если для каждой непустой части M структуры S существует хоть один элемент $a \in M$ такой, что

$$x \in M\ ,\quad x \geqq a \quad \Rightarrow \quad x = a\ .$$

Мы скажем, что a будет *максимальный элемент* множества M.

Здесь мы, однако, будем заниматься структурами, выполняющими несколько более слабое условие по следующему определению.

Определение 2,2. *Структура S выполняет максимальное условие для квоциентов*, если каждый квоциент a/b структуры S выполняет (в качестве подструктуры в S) максимальное условие.

Замечание. Легко видеть, что условие из определения 2,2 равносильно условию, которое получается из этого определения путем замены слова квоциент словом цепь (между двумя элементами структуры S).

Настоящий параграф посвящен исследованию теоремы Жордана-Гельдера в структурах с максимальным условием для квоциентов.

В структурах с максимальным условием для квоциентов представляется выгодным ввести иное обозначение для цепей, чем применявшееся в § 1. Договоримся на следующем. Если S — структура с максимальным условием для квоциентов, R — цепь между элементами $a > b$ в S, то мы будем ее обозначать символом $\{a_\iota\}_0^\varrho$, $\iota \in M$, причем $a_0 = a$, $a_\varrho = b$ и M упорядочено так, что $\iota, \varkappa \in M$, $\iota \prec \varkappa \Rightarrow a_\varkappa \leqq a_\iota$ (т. е. это упорядочение обратно тому, которое мы применяли в § 1). Если $\{a_\iota\}_0^\varrho$ будет цепь без повторений, то легко видеть, что M вполне упорядочено посредством соотношения $\prec$, и в дальнейшем мы будем всегда предполагать, что M является некоторым сегментом порядковых чисел (от 0 до ϱ).

Теорема 2,1. *Структура S с максимальным условием для квоциентов выполняет условия I, II, III.*

Доказательство. Условие I. Пусть M — непустое множество элементов квоциента a/b структуры S.

1. Обозначим через N множество элементов $y \in a/b$ таких, что $x \in M \Rightarrow$ $\Rightarrow y \leqq x$. Множество N непусто, так как содержит b. Поэтому существует максимальный элемент p множества N. p будет единственным таким элементом в N. В самом деле, пусть $q \neq p$ — еще один максимальный элемент в N. Тогда $x \in M \Rightarrow p \leqq x$, $q \leqq x \Rightarrow p \vee q \leqq x$, т. е. $p \vee q \in N$, но тогда p или q не будет максимальным в N. Теперь мы утверждаем, что $p = \bigwedge_{x \in M} x$. Действительно, ясно, что $x \in M \Rightarrow p \leqq x$. Пусть $z \in a/b$ таков, что $x \in M \Rightarrow$ $\Rightarrow z \leqq x$. Тогда $z \in N$, а, значить, и $z \vee p \in N$. Но так как p максимальный элемент в N, то отсюда следует $z \leqq p$. Итак, $p = \bigwedge_{x \in M} x$.

2. Для доказательства существования соединения элементов из M, обозначим через N' множество элементов $t \in a/b$ таких, что $x \in M \Rightarrow x \leqq t$. Множество N' непусто, так как содержит a. Согласно 1. существует $s \in a/b$, $s = \bigwedge_{t \in N'} t$. Мы утверждаем, что $s = \bigwedge_{x \in M} x$. В самом деле, прежде всего имеем $t \in N'$, $x \in M \Rightarrow x \leqq t$ а, значит, и $x \leqq s$. Далее, пусть $v \in a/b$ таков, что $x \in M \Rightarrow x \leqq v$. Тогда $v \in N'$, а поэтому $s \leqq v$. Итак, a/b является полной подструктурой.

Соблюдение условий II и III легко вытекает из максимального условия для квоциентов.

Из теоремы 1,11 и 2,1 получаем следующий результат: если структура S с максимальным условием для квоциентов выполняет условия 1., 2. теоремы 1,11, и если

$$\{a_\iota\}_0^\varrho,\ a_0 = a,\ a_\varrho = b\ , \tag{1}$$

$$\{b_\varkappa\}_0^\sigma,\ b_0 = a,\ b_\sigma = b\ , \tag{2}$$

будут две насыщенные цепи (без повторений) в S между элемднтами $a > b$, то существует хоть одно отображение Ж. Г. множества всех простых квоциентов цепи (1) на множество всех простых квоциентов цепи (2). В настоящем параграфе мы покажем (теорема 2,3), что имеется одно и только одно такое отображение и что поэтому оно осуществляется нижним построением Цассенхауза, примененным к (1), (2). Доказательство однозначности (по методу аналогичное доказательству, которое применил *Людвик Янош* в статье *Свойства уплотнения Цассенхауза**) для теоремы 1,9) опирается на следующую теорему.

Лемма 2,2. (см. Янош [1], теорема 1,3). *Пусть в структуре S имеет место* $a_1/a_2 \underset{d}{\sim} a_1 \wedge b_1/a_2 \wedge b_2 \overset{d}{\sim} b_1/b_2$, $a_1 > a_2$, $a_1/a_2 \underset{j}{\sim} b_3/b_4$, *Тогда не имеет места* $b_3 \leqq b_2$.

Теорема 2,3. *Пусть в структуре S между двумя элементами $a > b$ имеются две насыщенные цепи* (1), (2) *без повторений, выполняющие* (*в качестве квоциентов в S*) *максимальное условие, так что индексы ι и $\varkappa$ пробегают все порядковые числа от* 0 *до* ϱ *и соответственно от* 0 *до* σ. *Пусть нижнее построение Цассенхауза, примененное к* (1), (2), *осуществляет отображение Ж.-Г. Тогда отображение Ж.-Г. множества всех простых квоциентов из* (1) *на множество всех простых квоциентов из* (2) *будет единственным.*

Доказательство. Обозначим через f отображение Ж.-Г., осуществляемое нижним построением Цассенхауза, и пусть g будет произвольное отображение Ж.-Г. Тогда для любого $0 \precsim \iota \prec \varrho$ имеет место

$$\begin{aligned} f(a_\iota/a_{\iota+1}) = b_\varkappa/b_{\varkappa+1} \Rightarrow a_\iota/a_{\iota+1} \underset{d}{\sim} a_\iota \wedge b_\varkappa/(a_{\iota+1} \wedge b_\varkappa) \vee (a_\iota \wedge b_{\varkappa+1}) \overset{d}{\sim} \\ \overset{d}{\sim} b_\varkappa/b_{\varkappa+1}\ , \quad 0 \precsim \varkappa \prec \sigma\ . \end{aligned} \tag{3}$$

*) См. [1].

Легко показать (см. Коржинек [2], теорема 2,8), что

$$(a_{\iota+1} \wedge b_\varkappa) \vee (a_\iota \wedge b_{\varkappa+1}) = a_{\iota+1} \wedge b_{\varkappa+1} \,. \tag{4}$$

Пусть

$$f(a_0/a_1) = b_\iota/b_{\iota+1}\,, \quad g^{-1}(b_\iota/b_{\iota+1}) = a_\varkappa/a_{\varkappa+1}\,.$$

Из (3), (4) и леммы 2,2 следует $\varkappa = 0$ и, следовательно, $f(a_0/a_1) = g(a_0/a_1)$. Воспользуемся далее трансфинитной индукцией. Пусть $0 \prec\!\!\!\lessapprox \alpha \prec\!\!\!\lessapprox \varrho$ и пусть $f(a_\iota/a_{\iota+1}) = g(a_\iota/a_{\iota+1})$ для всех $\iota \prec\!\!\!\lessapprox \alpha$. Пусть $f(a_\alpha/a_{\alpha+1}) = b_\lambda/b_{\lambda+1}$, $g^{-1}(b_\lambda/b_{\lambda+1}) = a_\nu/a_{\nu+1}$. Тогда, согласно (3), (4) и лемме 2,2 будет $\nu \trianglelefteqslant \alpha$. Пусть $\nu \prec\!\!\!\lessapprox \alpha$. Тогда, по предположению индукции, получим $f(a_\nu/a_{\nu+1}) = g(a_\nu/a_{\nu+1}) = b_\lambda/b_{\lambda+1}$ и одновременно $f(a_\alpha/a_{\alpha+1}) = b_\lambda/b_{\lambda+1}$. Следовательно, f не является простым, что противоречит предположению; поэтому $\alpha = \nu$ и $f(a_\alpha/a_{\alpha+1}) = g(a_\alpha/a_{\alpha+1})$. Итак, $f = g$.

§ 3.

Так как в настоящем параграфе будут встречаться конечные цепи, то мы и здесь обозначения цепей будем пользоваться символикой, введенной перед теоремой 2,1 (здесь, конечно, множество M индексов цепи не должно быть вполне упорядочено). Если мы говорим о цепи $\{a_\iota\}_0^\varrho$, как о насыщенной, то тем самым мы будем предполагать, что она не содержит повторений.

Если S — структура с конечными цепями, с нижним условием простых квоциентов, если

$$a = a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_r = b \tag{1}$$

насыщенная цепь в S длины r (r — натуральное число) и если

$$a = b_0 > b_1 > b_2 > \ldots > b_s = b \tag{2}$$

еще одна произвольная насыщенная цепь в S между a, b, то

1. $r = s$,

2. существует одна и только одна подстановка φ чисел $0, 1, 2, \ldots, r-1$ такая, что

$$a_i/a_{i+1} \underset{j}{\sim} b_{\varphi(i)}/b_{\varphi(i)+1}, \; i = 0, 1, 2, \ldots r-1\,. \tag{3}$$

Эту подстановку нам дает нижнее построение Цассенхауза, примененное к цепям (1) и (2). Эта (известная) теорема следует из замечания за определением 2,2 и из теорем 2,1, 1,11 и 2,3. В следующей теореме мы покажем, что предположение о конечности цепей в структуре S можно выпустить.

Теорема 3,1. *Пусть S — структура с нижним условием простых квоциентов. Пусть между элементами $a > b$ структуры S существует конечная насыщенная цепь* (1) *длины r. Тогда* 1. *каждая насыщенная цепь в S между a, b будет конечной и будет иметь длину r*; 2. *если* (2) — *произвольная насыщенная цепь в S между a, b, то существует одна и только одна подстановка φ чисел $0, 1, \ldots, r-1$ такая, что имеет место* (3).

Эту подстановку нам дает нижняя конструкция Цассенхауза, примененная к (1) *и* (2).

Доказательство проведем индукцией по длине r. Для $r = 1$ теорема тривиальна. Пусть она верна для любого s, $1 \leqq s \leqq r - 1$ и пусть дана цепь (1). Пусть $\{b_\iota\}_0^\varrho$, $\iota \in M$, $b_0 = a$, $b_\varrho = b$ будет произвольная насыщенная цепь между a, b. Можно предположить, что $a_i \neq b_\iota$ для всех $1 \leqq i < r$, $\iota \in M$, $0 \precsim \iota \precsim \varrho$. Прежде всего не имеет места импликация $b_\iota \in \{b_c\}_0^\varrho$, $b_\iota \neq a \Rightarrow a_1 > b_\iota$, ибо цепь $\{b_\iota\}_0^\varrho$ насыщена. Поэтому существует $b_\nu \in \{b_\iota\}_0^\varrho$, $a > b_\nu > b$ так, что non $a_1 > b_\nu$. Построим элемент $c = a_1 \wedge b_\nu$ (см. рис. 4). Имеем $a_1 > c \geqq b$. Далее $a_1 \leqq a_1 \vee b_\nu \leqq a$, a/a_1 — построй квоциент. Если бы $a_1 = a_1 \vee b_\nu$, то $a_1 \geqq b_\nu$, что не имеет места. Следовательно, $a_1 \vee b_\nu = a$, и поэтому $a/a_1 \underset{d}{\sim} b_\nu/c$, b_ν/c — простой квоциент.

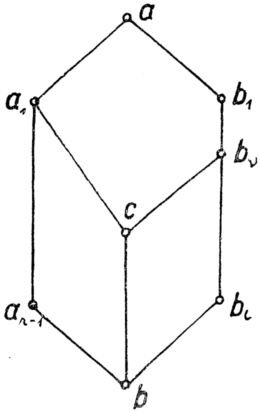

Рис. 4

Из предположения индукции следует, что каждая насыщенная цепь, вложенная между элементами a_1, c, b, конечна и имеет длину $r - 1$. Так как $a_1 > c$, то каждая насыщенная цепь между a_1, c имеет длину s, $1 \leqq s \leqq r - 1$. Поэтому каждая насыщенная цепь между c, b имеет длину $r - 1 - s \leqq r - 2$. Так как b_ν/c — простой квоциент, то отсюда следует существование между b_ν, b насыщенной цепи длины $r - 1 - s + 1 = r - s \leqq r - 1$. Теперь из предположения индукции следует, что в цепи $\{b_\iota\}_0^\varrho$ лежат в точности $r - s$ элементов b_ι, где $b_\nu > b_\iota$.

Возьмем теперь насыщенную цепь $\{b_\iota\}_0^\nu$ между a, b_ν и воспользуемся леммой 1,9. Имеем $a/a_1 \underset{d}{\sim} b_\nu/c$, a/a_1 — простой квоциент, $\{b_\iota\}_0^\nu$ — насыщенная цепь между a, b_ν. Путем нижнего регулярного отображения $c_\iota = b_\iota \wedge a_1$ для каждого $b_\iota \in \{b_\iota\}_0^\nu$ получим цепь $\{c_\iota\}_0^\nu$ между a_1, c. Ввиду конечности каждой цепи между $a_1, c, \{c_\iota\}_0^\nu$ будет конечной цепью, а поэтому (в силу 1,9) конечной будет и цепь $\{b_\iota\}_0^\nu$. Пусть $\{b_\iota\}_0^\nu$ имеет длину d. Тогда, согласно 1,9, $\{c_\iota\}_0^\nu$ будет насыщенной цепью длины d. Таким образом $d = s$, и цепь $\{b_\iota\}_0^\varrho$ имеет длину $r - s + s = r$. Этим доказано 1. Согласно 1., квоциент a/b представляет собой структуру с конечными цепями. Отсюда и из теорем 2,1, 1,11 и 2,3 следует утверждение 2.

Займемся теперь вопросом, как изменится теорема 3,1, если в ней нижнее условие простых квоциентов заменить более слабым нижним условием Биркхоффа. Приведем с этой целью прежде всего следующую лемму.

Лемма 3,2. (см. теорему 3,2 в статье Коржинека [2]). *Пусть структура S выполняет нижнее условие Биркхоффа. Пусть в ней имеет место $a/b \underset{d}{\sim}$*

$\underset{d}{\sim} c/d$, a/b — *простой квоциент. Пусть между* a, c *имеется конечная насыщенная цепь*

$$a = a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_r = c \quad (r \text{ — натуральное число}). \tag{4}$$

Положим

$$b = b_0,\ b_i = a_i \wedge b_{i-1} \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Тогда

$$b = b_0 > b_1 > \ldots > b_r = d$$

насыщенная цепь между b, d. *При этом* $b_i = a_i \wedge b$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$,

$$a_i/a_{i+1} \underset{d}{\sim} b_i/b_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, r - 1.$$

Теорема 3,3. *Пусть структура* S *выполняет нижнее условие Биркхоффа. Пусть между элементами* $a > b$ *структуры* S *имеется конечная насыщенная цепь*

$$a = a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_r = b \tag{1}$$

длины r. *Тогда* 1. *каждая насыщенная цепь между* a, b

$$\{b_\iota\}_0^\varrho, \quad b_0 = a,\ b_\varrho = b, \tag{5}$$

которая (в качестве подструктуры в S*) выполняет максимальное условие (*ι *пробегает порядковые числа от* 0 *до* ϱ*), конечна и имеет длину* r; 2. *множество всех простых квоциентов из* (1) *можно одним и только одним способом просто отобразить на множество всех простых квоциентов из* (5) *так, что соответствующие друг другу квоциенты являются снизу просто подобными. Это отображение осуществляется нижней конструкцией Цассенхауза, примененной к* (1) *и* (5).

Доказательство. Утверждение 1. докажем индукцией по r. Теорема верна для $r = 1$; пусть она верна для $1 \leqq s \leqq r - 1$; рассмотрим цепи (1) и (5). Прежде всего можно предположить, что $a_1 \neq b_1$. Пусть k — наименьший индекс, для которого $a_k < b_1$. Имеем $2 \leqq k \leqq r$ и $a/b_1 \underset{d}{\sim} a_{k-1}/a_k$, как легко показать, a/b_1 будет простым квоциентом, и между a, a_{k-1} существует насыщенная цепь длины $k - 1$. Из леммы 3,2 следует, что между b_1, a_k существует насыщенная цепь длины $k - 1$. Итак, между элементами b_1, a_k, b можно вложить насыщенную цепь длины $k - 1 + r - k = r - 1$. Теперь мы получим из предположения индукции, что цепь $\{b_\iota\}_1^\varrho$ имеет длину $r - 1$, и следовательно, (5) имеет длину r.

Для доказательства утверждения 2. используем следующие три леммы.

Лемма 3,4. *Пусть структура* S *выполняет нижнее условие Биркхоффа. Возьмем в* S *насыщенные цепи* (1), (2) *между* $a > b$. *Тогда для каждого* a_i *из* (1), $1 \leqq i \leqq r - 1$ *можно найти насыщенную цепь в* S

$$a_i = {}^ic_0 > {}^ic_1 > \ldots > {}^ic_{l_i - i} = b_{l_i} > b_{l_i+1} > \ldots > b_r\ , \quad 0 < l_i \leqq r \tag{6}$$

со следующим свойством:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{для каждого } {}^ic_j/{}^ic_{j+1}\ (0 \leqq j \leqq l_i - i) \textit{ существует } b_k/b_{k+1}\ (0 \leqq k < l_i - 1) \\ \textit{так, что} \\ \qquad {}^ic_j/{}^ic_{j+1} \overset{d}{\sim} b_k/b_{k+1}, \quad {}^ic_j = a_i \wedge b_k,\ {}^ic_{j+1} = a_i \wedge b_{k+1}\,. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Доказательство. Для $i = 1$ теорема верна: пусть b_{l_1} — наибольший элемент из цепи (2), для которого $a_1 > b_{l_1}$. Тогда $a/a_1 \underset{d}{\sim} b_{l_1-1}/b_{l_1}$. Построим элементы ${}^1c_j = a_1 \wedge b_j$, $0 \leqq j \leqq l_1 - 1$. По лемме 3,2 будет ${}^1c_j/{}^1c_{j+1} \overset{d}{\sim} b_j/b_{j+1}$ для каждого $0 \leqq j \leqq l_1 - 1$, и цепь $\{{}^1c_j\}_0^{l_1-1}$ насыщена. Применим далее индукцию. Пусть теорема верна для некоторого i, для которого $1 \leqq i < r - 1$; нужно ее доказать для $i + 1$.

Пусть d наибольший элемент из цепи (6) такой, что $a_{i+1} > d$.

1. Пусть $d = {}^ic_{\bar{k}}$, $0 < \bar{k} \leqq l_i - i$. Тогда $a_i/a_{i+1} \underset{d}{\sim} {}^ic_{\bar{k}-1}/{}^ic_{\bar{k}}$. Построим элементы ${}^{i+1}c_j = a_{i+1} \wedge {}^ic_j$ для $0 \leqq j \leqq \bar{k} - 1$ и положим ${}^{i+1}c_j = {}^ic_j$ для $\bar{k} \leqq j \leqq l_i - i$. Теперь из леммы 3,2 следует, что

$$a_{i+1} = {}^{i+1}c_0 > {}^{i+1}c_1 > \ldots > {}^{i+1}c_{l_i - i} = b_{l_i} > \ldots > b_r = b$$

насыщенная цепь и

$$0 \leqq j < \bar{k} - 1 \Rightarrow {}^{i+1}c_j/{}^{i+1}c_{j+1} \overset{d}{\sim} {}^ic_j/{}^ic_{j+1} \overset{d}{\sim} b_k/b_{k+1}\,,$$
$${}^{i+1}c_j = a_{i+1} \wedge {}^ic_j = a_{i+1} \wedge a_i \wedge b_k = a_{i+1} \wedge b_k\,,$$
$${}^{i+1}c_{j+1} = a_{i+1} \wedge {}^ic_{j+1} = a_{i+1} \wedge a_i \wedge b_{k+1} = a_{i+1} \wedge b_{k+1}\,.$$

По предположению индукции тогда имеем

$$\bar{k} - 1 < j < l_i - i \Rightarrow {}^{i+1}c_j/{}^{i+1}c_{j+1} \overset{d}{\sim} b_{k'}/b_{k'+1},\ 0 \leqq k' < l_i - 1\,,$$
$${}^{i+1}c_j = a_{i+1} \wedge b_{k'},\ {}^{i+1}c_{j+1} = a_{i+1} \wedge b_{k'+1}\,.$$

2. Пусть $d = b_{l_{i+1}}$, $l_i < l_{i+1} \leqq r$. Прежде всего имеет место

$$a_i/a_{i+1} \underset{d}{\sim} b_{l_{i+1}-1}/b_{l_{i+1}}\,. \tag{8}$$

Цепь

$$a_i = {}^ic_0 > {}^ic_1 > \ldots > {}^ic_{l_i - i} = b_{l_i} > \ldots > b_{l_{i+1}-1}$$

отобразим в прямом подобии (8) регулярно вниз и получим насыщенную цепь

$$a_{i+1} = {}^{i+1}c_0 > {}^{i+1}c_1 > \ldots > {}^{i+1}c_{l_{i+1}-(i+1)} = b_{l_{i+1}}\,, \tag{9}$$
$${}^{i+1}c_j = a_{i+1} \wedge {}^ic_j\ (0 \leqq j \leqq l_i - i)\,,\quad {}^{i+1}c_j = a_{i+1} \wedge b_{i+j}$$
$$(l_i - i \leqq j \leqq l_{i+1} - (i+1))\,.$$

Если цепь (9) допаснить элементами b_s, $l_{i+1} < s \leqq r$, то мы получим цепь для элемента a_{i+1} со свойством (7), как нетрудно доказать по аналогии с 1., используя лемму 3,2. Лемма доказана.

Лемма 3,5. *Пусть структура S выполняет нижнее условие Биркхоффа.*

Возьмем в S насыщенные цепи (1), (2). *Тогда для произвольного* a_i/a_{i+1} *из* (1) *можно найти* b_j/b_{j+1} *из* (2) *так, что*

$$a_i/a_{i+1} \underset{d}{\sim} a_i \wedge b_j/a_{i+1} \wedge b_{j+1} \overset{d}{\sim} b_i/b_{j+1}\,, \tag{10}$$

причем между a_i, $(a_i \wedge b_j)$ *и между* a_{i+1}, $(a_{i+1} \wedge b_{j+1})$ *существуют конечные насыщенные цепи.*

Доказательство. Можно предположить, что $a_i \neq b_j$ для любого $0 < i < r$, $0 < j < r$. Если в (10) $i = 0$, то $a/a_1 \underset{d}{\sim} b_{l_1-1}/b_{l_1}$ по доказательству предыдущей теоремы, и (10) имеет место. Возьмем квоциент a_i/a_{i+1}, $1 \leq i \leq r-1$. Построим для элемента a_i цепь (6). Тогда возможны два случая.

1. $a_{i+1} \neq {}^ic_1$. Пусть в этом случае d — наибольший элемент из (6), для которого $a_{i+1} > d$. Если $d = b_k$ $(k \geq l_i)$, то $a_i/a_{i+1} \underset{d}{\sim} b_{k-1}/b_k$ и, значит, имеет место (10). Если же $d = {}^ic_{j+1}$, $j + 1 < l_i - i$, то согласно (7) будет

$$a_i/a_{i+1} \underset{d}{\sim} {}^ic_j/{}^ic_{j+1} \overset{d}{\sim} b_k/b_{k+1}$$

и далее ${}^ic_j = a_i \wedge b_k$, ${}^ic_{j+1} = a_i \wedge b_{k+1} = a_{i+1} \wedge b_{k+1}$. Снова имеет место (10).

2. $a_{i+1} = {}^ic_1$. Тогда $a_i/a_{i+1} = {}^ic_0/{}^ic_1 \overset{d}{\sim} b_{k'}/b_{k'+1}$ и снова имеет место (10). Лемма доказана.

Лемма 3,6. *Пусть структура S выполняет нижнее условие Биркхоффа. Возьмем в S насыщенные цепи* (1) *и* (2). *Тогда нижнее построение Цассенхауза, примененное к* (1), (2) *дает Ж.-Г. отображение простых квоциентов цепи* (1) *на простые квоциенты цепи* (2).

Доказательство. Пусть a_i/a_{i+1} — простой квоциент из цепи (1). Тогда по лемме 3,5 будет $a_i/a_{i+1} \underset{d}{\sim} a_i \wedge b_j/a_{i+1} \wedge b_{j+1} \overset{d}{\sim} b_j/b_{j+1}$, $0 < j < r$. Отсюда следует (см. Коржинек [2], теорема 2,8) $a_{i+1} \wedge b_{j+1} = a_i \wedge b_{j+1} = a_{i+1} \wedge b_j$. Далее $b_{j,i} = b_{j+1} \vee (a_i \wedge b_j) = b_j$, $b_{j,i+1} = b_{j+1} \vee (a_{i+1} \wedge b_j) = b_{j+1} \vee (a_{i+1} \wedge b_{j+1}) = b_{j+1}$. Аналогично $a_{i,j} = a_i$, $a_{i,j+1} = a_{i+1}$. Отсюда уже легко вытекает, что нижнее построение Цассенхауза, примененное к (1), (2) дает отображение Ж.-Г.

Теперь уже нетрудно доказать утверждение 2. теоремы 3,3. Из части 1. теоремы 3,3 и из леммы 3,6 вытекает существование отображения Ж.-Г., данного нижним построением Цассенхауза. Однозначность же следует из теоремы 2,3, в которой цепи $\{a_\iota\}_0^\varrho$, $\}b_\iota\}_0^\sigma$ мы заменим цепями (1) и (5).

Замечание. Теорема 3,3 без предположения, что цепь (5) выполняет максимальное условие, неверна, как видно из следующего примера. Пусть S — структура, график которой показан на рис. 5, где (1) — насыщенная цепь в S $a > a_1 > b$, (3) — насыщенная цепь в S $a > b_1 > b$, (2) — насыщенная цепь в S, плотно упорядоченная.

Поясним теперь, почему нам пришлось доказывать утверждение 2. теоремы 3,3 иначе, чем аналогичное утверждение теоремы 3,1. Пусть $a > b$ — элементы структуры S из теоремы 3,3. Обозначим через $S_{a,b}$ множество элементов всех конечных насыщенных цепей в S между a, b. Множество $S_{a,b}$ не обязательно замкнуто относительно соединения (т. е. не должно иметь места $c \in S_{a,b}$, $d \in S_{a,b} \Rightarrow c \vee d \in S_{a,b}$), как видно из следующего примера. Пусть структура S_1 изображается графиком на рис. 6, где a/b, a/d, b/c, b/f, c/g, d/c, d/h, e/f, e/h, f/g, h/g — простые квоциенты, в то время как между a, e существует плотно упорядоченная цепь. В S_1 соблюдается нижнее условие Биркхоффа, $f \in S_{a,g}$, $h \in S_{a,g}$, но $f \vee h = e$ non $\in S_{a,g}$. Тем не менее справедлива.

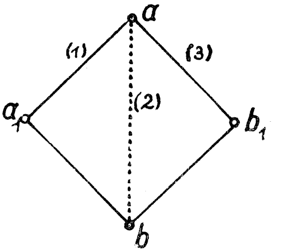

Рис. 5

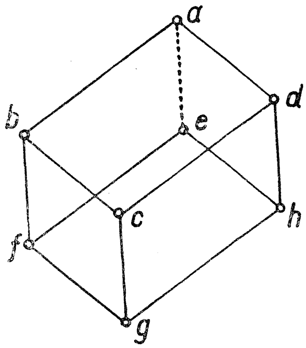

Рис. 6

Теорема 3,7. *Пусть структура S выполняет нижнее услчвие Биркхоффа. Тогда множество $S_{a,b}$ будет замкнуто относительно пересечения (т. е. $c \in S_{a,b}$, $d \in S_{a,b} \Rightarrow c \wedge d \in S_{a,b}$).*

Доказательство. Обозначим длину насыщенных конечных цепей между a, b через r. Для $r = 1$ теорема верна. Далее воспользуемся индукцией по r. Пусть теорема верна для $1 \leqq s \leqq r - 1$ и возьмем элементы $a > b$ в S; между a, b существует насыщенная цепь длины r. Пусть $c \in S_{a,b}$, $d \in S_{a,b}$.

Пусть c лежит в насыщенной цепи

$$a = a_0 > a_1 > \ldots > a_r = b\,, \quad c = a_i\,, \quad 0 \leqq i \leqq r \tag{11}$$

и d лежит в насыщенной цепи

$$a = b_0 > b_1 > \ldots > b_r = b\,, \quad d = b_j\,, \quad 0 \leqq j \leqq r\,. \tag{12}$$

Можно предполагать, что $a_l \neq b_m$ для любого $1 \leqq l < r$, $1 \leqq m < r$. Пусть k — наименьший индекс, для которого имеет место $a_1 > b_k$. Тогда будет, как легко доказать, $a/a_1 \underset{d}{\sim} b_{k-1}/b_k$, a/a_1 — простой квоциент. Теперь мы отобразим насыщенную цепь $\{b_i\}_0^{k-1}$ в этом прямом подобии нижним регулярным отображением на цепь $\{c_i\}_0^{k-1}$ между a_1, b_k, где $c_i = a_i \wedge b_i$,

$0 \leqq i < k$. По лемме 3,2 $\{c_i\}_0^{k-1}$ будет насыщенной цепью между a_1, b_k. Если $a_i = a$, то, очевидно, $a_i \wedge b_j = b_j \in S_{a,b}$. Положим поэтому $a_i < a$. Тогда возможны два случая. 1. Если $b_j \leqq b_k$, то из предыдущего и из предположения индукции следует $a_i \in S_{a_1,b}$, $b_j \in S_{a_1,b} \Rightarrow a_i \wedge b_j \in S_{a_1,b}$, а, значит, и $a_i \wedge b_j \in S_{a,b}$. 2. Пусть $b_j > b_k$. Тогда имеем $a_i \wedge b_j = a_i \wedge a_1 \wedge b_j = a_i \wedge c_j$. По предположениию индукции будет $a_i \in S_{a_1,b}$, $c_j \in S_{a_1,b} \Rightarrow a_i \wedge c_j \in S_{a_1,b}$, а потому и $a_i \wedge c_j = a_i \wedge b_j \in S_{a,b}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Людвик Янош:* Свойства уплотнения Цассенхауза. Чехословацкий математический журнал, Т. 3 (78), 1953, 159—180.

[2] *Vladimir Kořínek*: Lattices in which the theorem of Jordan-Hölder is generally true. Bulletin international de l'Académie tchèque des Sciences 1949. Le Année, No 23.

[3] *А. Г. Курош - С. Н. Черников:* Разрешимые и нильпотентные группы. Усп. мат. наук 3, 3 (19), 18—59.

Summary.

THEOREM OF JORDAN-HÖLDER IN LATTICES WITHOUT FINITE CHAIN CONDITION

VÁCLAV VILHELM, Praha

(Received September 6, 1952.)

In his paper *Lattices in which the theorem of Jordan-Hölder is generally true* prof. VLADIMÍR KOŘÍNEK investigates the theorem of J.-H. with lower or upper simple similarity of quotients in lattices with finite chain property. In the present paper the author shows that it is possible to replace the finite chain condition by the more general conditions I, II, III, introduced in § 1. The main result is theorem 1, 11, which gives the necessary and sufficient condition for the validity of J.-H. theorem with lower simple similarity of corresponding quotients (see definition 1,1) in lattices, in which conditions I, II, III hold. Two following §§s of the paper contain applications and further results, concerning both the J.-H. theorem in lattices with maximal condition for quotients and the J.-H. theorem for couples of saturated (maximal) chains between two elements $a < b$ in a lattice under the condition that one of the chains is finite.