Czechoslovak Mathematical Journal

Štefan Schwarz

Максимальные идеалы в теории полугрупп, II

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 3 (1953), No. 4, 365–383

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100093

Чехословацкий математический журнал, т. 3 (78) 1953

МАКСИМАЛЬНЫЕ ИДЕАЛЫ В ТЕОРИИ ПОЛУГРУПП, II

ШТЕФАН ШВАРЦ (Štefan Schwarz), Братислава.

(Поступило в редакцию 21/I 1953 г.)

Посвящается академику Эдуарду Чеху ко дню его 60-летия.

В статье изучается структура множеств $S-L$, $S-M$, где L, M означают максимальный левый соотв. двусторонний идеал данной полугруппы S.

Целью этой работы является выведение ряда теорем, касающихся структуры полугрупп, причем для описания структуры будем пользоваться понятием максимального идеала. Работа является продолжением — но очень вольным — работы автора [1]. Можно ее читать без подробного знакомства с работой [1]. Ее содержанием — грубо говоря — является исследование структуры множеств $S - L$, $S - M$, где L соотв. M есть максимальный левый соотв. максимальный двусторонний идеал данной полугруппы S. Мы увидим, что эти множества при некоторых очень общих предположениях являются либо группами, либо соединением непересекающихся изоморфных групп. При еще более общих предположениях являются, как покажем, так называемыми слева простыми полугруппами соответственно соединением таких непересекающихся полугрупп.

Результаты этой работы невозможно во всей обширности считать непосредственным обобщением результатов работы [1]. Многие из приведенных предложений по своему качеству более глубоки, чем предложения работы [1].

При исследовании существенным пособием будут для нас свойства так наз. простых полугрупп, которые читатель найдет в работах: *Клиффорд* [1], [2], *Шварц* [2], [3], и свойства определенного гомоморфного отображения полугруппы S на т. наз. разностную полугруппу $\overline{S}$.

В результатах этой работы отразилась недавно появившаяся в печати работа *Воробьева* [1]. Некоторые результаты Воробьева (именно его теоремы 4, 5, 6), которые он в цитированной работе приводит без доказательства, в нашей работе или уточнены, или доказаны при более общих предположениях.

Замечание к обозначению. В статье мы будем пользоваться следующим обозначением: символ $A \subset B$ означает (в отличие от символа $A \subseteqq B$), что A есть *собственное* подмножество B. Соединение двух множеств A, B будем обозначать знаком $\{A, B\}$ или знаком $A + B$. Одинаковый смысл имеет и символ $\sum_{\alpha} A_{\alpha}$. Символ $A - B$ означает разность множеств A, B. Знак $\varnothing$ означает пустое множество. Знак $[0]$ означает нулевой идеал. Смысл символа S/M будет разъяснен в дальнейшем. Другие обозначения имеют обычный смысл.

1.

Можно предполагать, что читатель ознакомлен с понятиями минимального идеала, максимального идеала (см. [1], определение 1), нулевого элемента и левой (соотв. двусторонней) единицы.

Чтобы нам в дальнейшем не надо было беспрестанно ссылаться на литературу, срезюмируем в отделе 1 некоторые важные предложения и реже встречающиеся определения, которыми будем в дальнейшем пользоваться.

На многих местах надо будет отличать полугруппы с нулевым элементом от полугрупп без нулевого элемента. Сделаем следующий договор. Если полугруппа имеет нулевой элемент (который будем обозначать знаком 0), то под словом *минимальний* идеал будем понимать идеал, который помино нулевого идеала $[0]$ не содержит в себе никакого другого собственного подидеала одинакового рода.

Прежде всего припомним следующее определение (см. [1], определение 4). Полугруппа S называется *слева простой*, если уравнение $xa = b$ имеет решение $x \in S$, для каждой пары a, $b \in S$. Итак, это такая полугруппа, в которой для каждого $a \in S$ есть $Sa = S$. Т. е. слева простая полугруппа есть такая, в которой не существует никакого левого идеала $\neq S$. Ясно, что полугруппа (имеющая больше чем один элемент) содержащая нулевой элемент никогда не может быть слева простой полугруппой.

Аналогично определяется *справа простая* полугруппа. Слева и справа простая полугруппа является группой.

Теорема 1,1. *Пусть S — полугруппа без нулевого элемента, l ее минимальный левый идеал. Тогда l есть слева простая полугруппа.*

Доказательство. Пусть $a \in l$. Множество la есть, очевидно, левый идеал. При этом выполнено соотношение $la \subseteqq l \,.\, l = l^2 \subseteqq l$. Так как l — минимальный идеал из S (и не имеет нулевого элемента), то $la = l$, чтд.

Теорема 1,2. *Пусть S — полугруппа, содержащая нуль, l — ее минимальный левый идеал, для которого выполнено $l^2 \neq [0]$. Тогда можно писать*

$$l = P + Q,\ P \cap Q = \varnothing,\ P^2 = \{0\},$$

где Q — слева простая полугруппа.

Доказательство. Пусть a — произвольный элемент, $a \in l$. Тогда из доказательства теоремы 1,1 следует или $la = [0]$, или $la = l$.

Символом Q обозначим множество всех $b \in l$, для которых выполнено $lb = l$. Q — полугруппа. Если $b_1 \in Q$, $b_2 \in Q$, то также $lb_1b_2 = lb_2 = l$, значит, $b_1 . b_2 \in Q$.

Обозначим далее символом P множество всех $c \in l$, для которых выполнено $l . c = \{0\}$. P — полугруппа, так как из $c_1 \in P$, $c_2 \in P$ следует $lc_1c_2 = 0 . c_2 = 0$, т. е. $c_1 . c_2 \in P$. Очевидно, $lP = \{0\}$; тем более имеет место $P^2 = \{0\}$. Множество P никогда не пусто, так как ему принадлежит хоть элемент 0. Множество Q также не пусто. Так как если бы было для каждого элемента $a \in l$ выполнено $la = [0]$, было бы также $l \sum\limits_{a \in l} a = [0]$, т. е. $l^2 = [0]$, что противоречит предположению.

Следовательно, всегда можно писать: $l = P + Q$, $P \cap Q = \varnothing$.

Выберем тепер произвольный элемент $a \in Q$. Из определения множества Q следует

$$la = l\,,$$
$$(P + Q)\,a = P + Q\,,$$
$$Pa + Qa = P + Q\,. \qquad (*)$$

Так как Q полугруппа, то $Qa \subseteqq Q$. Далее утверждаю, что $Pa \subseteqq P$. Каждый элемент $x \in Pa$ имеет вид $x = c_1a$, $c_1 \in P$. Таким образом, $lx = lc_1a = 0 . a = 0$, т. е. имеет место $x \in P$, и, следовательно, $Pa \subseteqq P$. Так как слагаемые в правой части уравнения (*) не пересекаются, то должно быть $Pa = P$, $Qa = Q$; значит, Q является слева простой полугруппой, чтд.

Следствие 1,2а. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1,2. *Тогда* $l - \{0\}$ *является слева простой полугруппой тогда и только тогда, если* l *не имеет делителей нуля* $\neq 0$.

Следствие 1,2б. *Пусть* S — *полугруппа с нулевым элементом, содержащая больше двух элементов. Пусть* S *не имеет никакого левого идеала* $\neq [0]$ *и* $\neq S$. *Тогда* $S - \{0\}$ *является слева простой полугруппой.*

Доказательство. В силу предположения, S является единственным минимальным левым идеалом из S. Итак, в силу теоремы 1, 2, имеет место разбиение вида

$$S = P + Q\,, \quad P \cap Q = \varnothing\,, \quad P^2 = \{0\}\,.$$

Притом из доказательства теоремы 1,2 следует $SP = \{0\}$. Наша теорема будет доказана, если мы покажем, что в этом случае P имеет единственный элемент, т. е. $P = \{0\}$. Докажем это от противного. В самом деле, если бы для некоторого $0 \neq a \in S$ имело место $a \in P$, то было бы

$$S\{0, a\} = 0 \subset \{0, a\} \subset S\,,$$

значит, множество $\{0, a\}$ являлось бы собственным левым подидеалом из S, что и противоречит предположению.

Следствие 1,2в. *Пусть S — полугруппа с нулем, которая содержит больше чем два элемента. Пусть S не имеет никакого ни левого ни правого идеала $\neq [0]$ и $\neq S$. Тогда $S - \{0\}$ есть группа.*

В дальнейшем очень важным является понятие т. наз. *простой полугруппы*. Полугруппа S называется простой, если она не содержит никакого собственного двустороннего идеала $\neq S$ с возможным исключением нулевого идеала $[0]$ (разумеется, если S имеет нулевой элемент).

Теорема 1,3. *Пусть S — простая полугруппа без нуля, которая имеет хоть один минимальный левый идеал. Тогда S является соединением непересекающихся полугрупп $S = \sum_{\alpha} l_\alpha$, где каждое l_α является слева простой полугруппой.*

Доказательство. См. напр. Шварц [2], теорема 2,1. Полугруппа S является соединением своих минимальных левых идеалов, и каждый из этих идеалов, в силу теоремы 1,1, есть слева простая полугруппа.

Теорема 1,4. *Пусть S — простая полугруппа с нулем, которая имеет хоть один левый идеал l, для которого имеет место $l^2 \neq [0]$. Тогда S является соединением своих минимальных левых идеалов.*

Доказательство. См. напр. Шварц [3], теорема 4,3.

Теорема 1,5. *Пусть выполнены предположения теоремы 1,4. Тогда S может быть представлена в виде суммы двух непересекающихся слагаемых*

$$S = \sum_{\alpha} P_\alpha + \sum_{\alpha} Q_\alpha .$$

При этом при $\alpha \neq \beta$ имеет место $P_\alpha \cap P_\beta = \{0\}$, $Q_\alpha \cap Q_\beta = \varnothing$. Далее, при каждом α имеет место $P_\alpha^2 = \{0\}$, и каждое Q_α есть слева простая полугруппа.

Доказательство. Вытекает из теоремы 1,4 и теоремы 1,2.

Возникает наконец вопрос, не может ли быть структура слева простой полугруппы точнее характеризирована. Это, действительно, возможно в том случае, когда S содержит идемпотент. Тогда справедлива следующая очень интересная теорема:

Теорема 1,6. *Слева простая полугруппа является множественной суммой непересекающихся изоморфных групп тогда и только тогда, если она имеет хоть один идемпотент.*

Доказательство. См. напр., Шварц [2], параграф 3.

В теоремах 1,3 и 1,5 выступают суммы слева простых полугрупп. Эти полугруппы связаны между собой тем, что они порождают простую полугруппу. Можно ожидать, что и их структуры каким-нибудь образом связаны между собой. А это, действительно, так. Можно доказать, что если одна из них содержит идемпотент, то и остальные обладают этим свойством. Итак $\sum\limits_{\alpha} l_\alpha$, во теореме 1,3, и $\sum\limits_{\alpha} Q_\alpha$ во теореме 1,5, являются суммами непересекающихся групп.

Более того, можно доказать, что все выступающие в них группы взаимно изоморфны. Об этом говорится в следующих трех теоремах, доказательство которых читатель найдет в цитированных работах Клиффорд [1], [2], автор [2], [3].

Теорема 1,7. *Пусть S — простая полугруппа без нуля, имеющая хотя бы один левый идеал и хотя бы один идемпотент. Тогда $S = \sum\limits_{\alpha} G_\alpha$, где G_α — непересекающиеся изоморфные группы.*

Теорема 1,8. *Пусть S — простая полугруппа с нулем, имеющая хоть один идемпотент $\neq 0$. Пусть S имеет хотя бы один минимальный левый идеал. Тогда можно представить S в виде соединения двух непересекающихся слагаемых*

$$S = \sum_{\alpha} P_\alpha + \sum_{\beta} G_\beta,$$

где $P_\alpha^2 = \{0\}$, $P_\alpha \cap P_\beta = \{0\}$, и все G_β — непересекающиеся изоморфные группы.

Идемпотентный элемент всегда существует, если полугруппа S помимо левого минимального идеала содержит еще хотя бы один минимальный правый идеал. Следовательно, имеет место:

Теорема 1,9. *Утверждение теорем* 1,7 *и* 1,8 *остаются справедливы, если S — простая полугруппа имеющая хотя бы один минимальный не нильпотентный левый и хотя бы один минимальный не нильпотентный правый идеал.*

Прибавление: Обратим теперь внимание на максимальные идеалы простых полугрупп.

Поскольку дело касается максимальных *двусторонних* идеалов, то из определения непосредственно вытекает: а) простая полугруппа без нуля не имеет максимального двустороннего идеала. б) В простой полугруппе с нулем [0] является максимальным двусторонним идеалом из S.

Для *левых* идеалов положение весьма наглядно у простых полугрупп, имеющих хотя бы один минимальный левый идеал l, для которого имеет место $l^2 \neq [0]$. В силу теорем 1,3 и 1,5, S является соединением всех минимальных левых идеалов из S; $S = \sum\limits_{\alpha} l_\alpha$,

а) если $\alpha = 1$ и S имеет нулевой элемент, то [0] есть единственный максимальный левый идеал из S. Если S не имеет нуля, то не существует ни максимального левого идеала.

б) Пусть $\alpha > 1$. Положим $L_\nu = \sum_{\alpha \neq \nu} l_\alpha$, где суммирование производим для всех α кроме $\alpha = \nu$. Покажем, что множества L_ν дадут все максимальные левые идеалы. Для них прежде всего $L_\nu \subset S$. Но если прибавлю к L_ν произвольный элемент $a \in S$, a non $\in L_\nu$, т. е. $a \in l_\nu$, $a \neq 0$, тогда левый идеал, к которому принадлежит a, содержит также $\{a, Sa\} \subseteqq \{l_\nu, Sl_\nu\} = l_\nu$. Так как l_ν есть минимальный левый идеал из S, то $\{a, Sa\} = l_\nu$. Следовательно, „наименьшим" левым идеалом содержащим L_ν и элемент a является $L_\nu + l_\nu = S$, чтд. Обратное утверждение очевидно.

2.

Объясним теперь понятие т. наз. *разностной полугруппы*.

Пусть S — полугруппа, m ее фиксированный двусторонний идеал. Введем в S эквиваленцию, определенную следующим соотношением: $a \equiv b \pmod{m}$, если 1. или $a = b$, 2. или одновременно $a \in m$, $b \in m$.

Если обозначим символами $a, b, c, \ldots$ элементы $\in S - m$, то ясно что классами $(\mathrm{mod}\, m)$ являются множества

$$T_o = \{m\}\,, \quad T_a = \{a\}\,, \quad T_b = \{b\}\,, \ldots$$

Эта эквиваленция регулярна. Классы составляют полугруппу, в которой умножение классов определено соотношением $T_a \odot T_b = T_c$, если в смысле умножения комплексов первоначальной полугруппы имеет место $T_a \,.\, T_b \subseteqq T_c$. Так как m — двусторонний идеал, то ясно, что T_o играет роль нулевого элемента. Эту полугруппу классов обозначим символом $\bar{S} = S/m$ и назовем разностной полугруппой.

Из выше приведенной формулировки видно, что разностная полугруппа $\bar{S}$ изоморфна множеству $S - m + \bar{0}$, т. е. множеству элементов из S, непринадлежащих к m с новым прибавленным нулевым элементом $\bar{0}$ (который надо прибавить и в том случае, если S не имела нулевого элемента):

$$\bar{S} = S/m \cong S - m + \bar{0}\,.$$

В дальнейшем будем элементы полугруппы $\bar{S}$ обозначать вместо символов $T_o, T_a, T_b, \ldots$, символами $\bar{0}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$, ...

Отображение $S \to \bar{S}$ является, следовательно, гомоморфным отображением полугруппы S на полугруппу $\bar{S}$, которое определено следующим образом:

$$\text{для } a \in S - m \quad \text{есть} \quad a \to \bar{a}\,,$$
$$\text{для } a \in m \quad \text{есть} \quad a \to \bar{0}\,.$$

Короче говоря, (с точностью до изоморфизма) выше приведенная конструкция имеет следующий вид: мы получим разностную полугруппу, если отождествим все элементы из m с единственным элементом $\bar{0}$, в то время как смысл остальных элементов из S оставим без изменения.

Пусть теперь m — фиксированный двусторонний идеал. Рассмотрим отображение $S \to \bar{S} = S/m$. Тогда непосредственно видно, что между левыми идеалами из $\bar{S}$ и левыми идеалами из S, содержащими идеал m, существует взаимно однозначное соответствие. Это обстоятельство (в формулировке, которая нам будет нужна), выражено в следующих четырех леммах, подробное доказательство которых мы не приводим.

Лемма 1. *Пусть m — двусторонний идеал полугруппы S. Пусть l — такой левый идеал из S, что $m \subseteqq l \subseteqq S$. Тогда $\bar{l} = l/m$ является левым идеалом полугруппы $\bar{S} = S/m$.*

Лемма 2. *Пусть m — двусторонний идеал из S. Пусть $S \to \bar{S}$ — отображение S на разностную полугруппу S/m. Пусть $\bar{l}$ — левый идеал из $\bar{S}$. Тогда множество элементов l из S, которые в упомянутом гомоморфизме отображаются на $\bar{l}$, является левым идеалом из S (содержащим m).*

Лемма 3. *Пусть m — двусторонний идеал полугруппы S. Пусть L — какой-нибудь максимальный левый идеал полугруппы S, для которого выполнено соотношение $m \subseteqq L \subset S$. Тогда $\bar{L} = L/m$ является максимальным левым идеалом из $\bar{S} = S/m$.*

Лемма 4. *Пусть m — двусторонний идеал из S. Пусть $S \to \bar{S}$ — гомоморфное отображение S на разностную полугруппу S/m. Пусть $\bar{L}$ — максимальный левый идеал из $\bar{S}$. Тогда множество $L \subset S$, которое в упомянутом гомоморфизме отображается в $\bar{L}$, является максимальным левым идеалом из S (содержащим m).*

Эти леммы в дальнейшем применим в том случае, когда m будет *максимальный* двусторонний идеал из S.

Теорема 2,1. *Пусть M — максимальный двусторонный идеал полугруппы S. Тогда S/M является простой полугруппой.*

Доказательство. От противного: если бы $\bar{S} = S/M$ имела двусторонний идеал $\bar{M}_1$, $\bar{0} \subset \bar{M}_1 \subset \bar{S}$, то это значило бы, в силу леммы 2, что в S существует такой двусторонний идеал M_1, что $M \subset M_1 \subset S$. Но это противоречит предположению, что M максимальный двусторонний идеал из S.

Теорема 2,2. *Пусть M — максимальный двусторонний идеал из S. Пусть $S - M$ содержит больше чем один элемент. Тогда для разностной полугруппы S/M не может быть $(S/M)^2 = \bar{0}$.*

Доказательство. От противного. Предположим, что выполнено $\bar{S}^2 = (S/M)^2 = \bar{0}$. Для первоначальной полугруппы это значит, что $(S - M)^2 \subseteqq M$. Обозначим элементы $\in S - M$ символами $u_\alpha, u_\beta, \ldots, u_\nu, \ldots$ Обозначим далее $U_\nu = S - M - u_\nu$. Так как существуют по меньшей мере два различных элемента u_ν, имеет место $S - M \supset U_\nu \neq \varnothing$, и существуют, следовательно, по меньшей мере два различных множества U_ν.

Рассмотрим множества $M + U_\nu \supset M$. Мы утверждаем, что $M + U_\nu$ является двусторонним идеалом из S. Имеет место

$$S \, . \, (M + U_\nu) = SM + SU_\nu \subseteqq M + [MU_\nu + (S - M) \, U_\nu] \subseteqq M +$$
$$+ [M + (S - M) \, (S - M)] = M + (S - M)^2 \subseteqq M + M \subset M + U_\nu \, .$$

Подобным образом имеет место $(M + U_\nu) \, S \subset M + U_\nu$.

Так как $M \subset M + U_\nu \subset S$, то это бы значило, что M не является максимальным двусторонним идеалом из S. Но это противоречит предположению.

Замечание. Предположение, что $S - M$ имеет больше чем один элемент, существенно. Пусть $S = \{0, 2, 4, 8\}$; под умножением будем подразумевать умножение чисел (mod 12). Максимальным двустороннии идеалом является $M = \{0, 4, 8\}$. Разностной полугруппой S/M является полугруппа $\bar{S} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$, мультипликативная таблица которой имеет следующий вид

$$\begin{array}{c|cc} & \bar{0} & \bar{2} \\ \hline \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} \, . \end{array}$$

Значит, имеет место $\bar{S}^2 = \bar{0}$.

3.

Целью следующих параграфов является выведение ряда предложений о структуре множеств $S - L$, $S - R$, $S - M$, где L, R, M соотв. максимальный левый, правый, двусторонний идеал.

В параграфе 3 будем изучать структуру множества $S - M$. Заметим, что у полугруппы может быть больше чем один (даже бесконечно много) максимальный двусторонний идеал. В этом параграфе M означает произвольный из этих максимальных идеалов.

В дальнейших теоремах часто будем предполагать, что разностная полугруппа S/M имеет хоть один минимальный левый идеал. Надо подчеркнуть, что это очень общее предположение, которое всегда выполнено, например, в полугруппе S, удовлетворяющей обыкновенному *условию минимальности* для левых идеалов, или условию минимальности для левых *главных* идеалов. Этим последним условием пользуется в своих работах Воробьев [1] и *Грин* [1].

Теорема 3,1. *Пусть M — максимальный двусторонний идеал из S. Пусть S/M имеет хоть один минимальный левый идеал. Тогда, если $S - M$ полугруппа, то $S - M$ является соединением непересекающихся слева простых полугрупп.*

Доказательство. Если $S - M$ полугруппа, то $\bar{S} = S/M$ является полугруппой с нулем $\bar{0}$, в которой никакой элемент $\neq \bar{0}$ не является делителем нуля. Т. е. из $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$ следует или $\bar{a} = \bar{0}$, или $\bar{b} = 0$. Значит, даже и минимальный левый идеал $\in \bar{S}$, существование которого мы предполагаем, не может быть нильпотентным. В силу теоремы 1,4, $\bar{S}$ является соединением непересекающихся минимальных левых идеалов: $\bar{S} = S/M = \sum_\alpha \bar{l}_\alpha$. В силу теоремы 1,5, имеет место $\bar{l}_\alpha = \bar{P}_\alpha + \bar{Q}_\alpha, \bar{P}_\alpha^2 = \bar{0}, \bar{P}_\alpha \cap \bar{Q}_\alpha = \varnothing$, где каждое $\bar{Q}_\alpha$ слева просто. Значит, $\bar{S} = \sum_\alpha \bar{P}_\alpha + \sum \bar{Q}_\alpha$. Так как не существуют делители нуля, то при каждом α $\bar{P}_\alpha = \bar{0}$. Значит $\bar{S} - \bar{0} = \sum_\alpha \bar{Q}_\alpha$, где каждое $\bar{Q}_\alpha$ слева просто. Так как $\bar{S} - \bar{0}$ изоморфно с $S - M$, то теорема доказана.

Теорема 3,2. *Пусть M — максимальный двусторонний идеал полугруппы S. Пусть S/M имеет хоть один минимальный левый и хоть один минимальный правый идеал. Если $S - M$ полугруппа, то можно писать*

$$S = M + \sum_i G^{(i)}, \quad M \cap \sum_i G^{(i)} = \varnothing ,$$

где все $G^{(i)}$ — непересекающиеся изоморфные группы.

Доказательство. Как в теореме 3,1, и здесь $\bar{S} = \sum_\alpha \bar{Q}_\alpha$, где $\bar{Q}_\alpha$ — минимальные левые идеалы из $\bar{S}$ (имеющие только $\bar{0}$ своим общим элементом). Аналогично как в теореме 3,1 не могут быть минимальный левый и минимальный правый идеал, существование которых предполагаем, нильпотентны. В силу теоремы 1,9, можно поэтому в етом случае каждое $\bar{Q}_\alpha$ писать в виде $\bar{Q}_\alpha = \{\bar{0}\} + \sum_\alpha \bar{G}_\alpha$, где $\bar{G}_\alpha$ — непересекающиеся изоморфные группы. При этом, в силу теоремы 1,8, и группы, выступающие в различных $\bar{Q}_\alpha$, взаимно изоморфны. Этим теорема доказана.

Следствие 3,2. *Пусть M — максимальный двусторонний идеал конечной полугруппы S. Если $S - M$ полугруппа, то $S - M$ является соединением непересекающихся изоморфных групп.*

Пользуясь теоремой 1,7, докажем аналогично:

Теорема 3,3. *Пусть M — максимальный двусторонний идеал полугруппы S. Пусть $S - M$ — полугруппа. Пусть $S - M$ имеет хоть один минимальный левый идеал и хоть один идемпотент. Тогда $S - M$ является соединением непересекающихся изоморфных групп.*

Следствие 3,3. *Пусть M — максимальный двусторонний идеал периодической полугруппы S. Пусть S/M имеет хоть один минимальный левый идеал. Если $S - M$ полугруппа, то $S - M$ является даже соединением непересекающихся изоморфных групп.*

4.

Теорема 4,1. *Пусть M — максимальный двусторонний идеал из S. Пусть $S - M$ имеет больше чем один элемент. Пусть S/M имеет хоть один минимальный левый идеал. Пусть не существует более одного минимального левого идеала L, для которого выполнено соотношение $M \subseteqq L \subset S$. Тогда*

a) $M = L$,

b) $S - L$ *есть слева простая полугруппа.*

Замечание. Значит, теорема показывает, что при этих предположениях не существует никакого минимального левого идеала $L \supset M$.

Доказательство. По теореме 2,1 $\bar{S} = S/M$ — простая полугруппа. По теореме 2,2 $(\bar{S})^2 \neq [\bar{0}]$. По предположению существует хоть один минимальный левый идеал $\bar{l}$ из $\bar{S}$. Должно быть $\bar{l}^2 \neq [\bar{0}]$ так как в противном случае для простой полугруппы $\bar{S} = \bar{l} \,.\, \bar{S}$ имело бы место соотношение $(\bar{S})^2 = \bar{l}\bar{S} \,.\, \bar{l}\bar{S} \subseteqq \bar{l}^2\bar{S} = [\bar{0}]$. Итак по теореме 1,4 $\bar{S}$ является соединением минимальных левых идеалов из $\bar{S}$, $\bar{S} = \sum_{\alpha} \bar{l}_{\alpha}$.

Я утверждаю, что в правой части последнего уравнения может быть только одно слагаемое различно от нулевого идеала. Докажем это от противного. Предположим, что в правой части уравнения существуют по меньшей мере два слагаемых, отличных от нулевого идеала. Обозначим $\bar{L}_{\nu} = \sum_{\alpha \neq \nu} \bar{l}_{\alpha}$. Пусть L_{ν} есть множество элементов $\epsilon\, S$, которое в гомоморфизме $S \to \bar{S}$ является прообразом множества $\bar{L}_{\nu}$. Ясно, что L_{ν} — левый идеал, и имеет место $M \subset L_{\nu} \subset S$. Согласно прибавлению к параграфу 1, каждое $\bar{L}_{\nu}$ является максимальным левым идеалом полугруппы $\bar{S}$. В силу леммы 4 параграфа 2, L_{ν} является максимальным левым идеалом из S. Так как существуют хоть два таких различных множества L_{ν}, то мы пришли к противоречию с предположением существования единственного такого максимального левого идеала L, для которого имеет место $M \subseteqq L \subset S$.

Следовательно, $S/M = \bar{l}$, где $\bar{l}$ единственный существующий минимальный левый идеал из S/M. Другими словами: S/M есть полугруппа, не имеющая никакого другого левого идеала, кроме $\bar{0}$ и S/M.

По предположению выполнено $M \subseteqq L \subset S$. В силу леммы 1 параграфа 2, L/M является левым идеалом из S/M. Так как $L/M \subset S/M$ то также $L/M = \bar{0}$, т. е. $L = M$. Следовательно, в силу наших предположений, максимальный левый идеал L даже отождествляется с максимальным двусторонним идеалом M.

Из следствия 1,2 б параграфа 1 теперь следует, что $S/M - \{\bar{0}\}$ является слева простой полугруппой. Для первоначальной полугруппы ето значит, что $S=M+S_1$, где $M\cap S_1=\varnothing$ и S_1—слева простая полугруппа. Этим теорема 4,1 доказана.

Теорема 4,2. *Пусть M — максимальный двусторонний идеал полугруппы S. Пусть $S-M$ имеет больше чем один элемент. Пусть S/M имеет хоть один минимальный правый и хоть один минимальный левый идеал. Пусть не существует более одного максимального левого идеала L, удовлетворяющего условию $M \subseteqq L \subset S$, и не существует более одного максимального правого идеала R, выполняющего соотношение $M \subseteqq R \subset S$. Тогда:*

а) $L = R = M$,

б) $S - M$ *есть группа.*

Доказательство. По теореме 4,1 $S-M$ является слева простой полугруппой. Но по теореме, двойственной к теореме 4,1, также выполнено $M = R$, и $S-M$ является также справа простой полугруппой. Следовательно, $S-M$ есть группа, чтд.

Более слабой формулировкой теоремы 4,1 является следующая замечательная теорема:

Теорема 4,3. *Пусть M — такой максимальный двусторонний идеал полугруппы S, который не содержится в качестве собственного подмножества ни в каком левом идеале $\neq S$. Пусть $S-M$ имеет больше чем один элемент. Тогда $S = M + Q$, где $M \cap Q = \varnothing$, и Q является слева простой полугруппой.*

Замечание. Значит, если мы предполагаем сначала что вообще не существует никакого левого удеала L, для которого бы было выполнено $S \supset L \supset M$, можно ограничивающее предположение о S/M выбросить.

Доказательство. Так как не существует никакого левого идеала L, для которого выполнялось бы $M \subset L \subset S$, то это, в силу леммы 2, значит, что разностная полугруппа S/M не имеет никакого левого идеала $\neq \bar{0}$ а $\neq S$. В силу следствия 1, 2б, является $S/M - \{\bar{0}\}$ слева простой полугруппой. Для первоначальной полугруппы это значит, что $S-M$ — слева простая полугруппа, чтд.

Аналогично докажется:

Теорема 4,4. *Пусть M — такой максимальный двусторонний идеал полугруппы S, который не содержится как собственное подмножество ни в левом, ни в правом идеале $\neq S$. Пусть $S-M$ имеет больше чем один элемент. Тогда можно писать $S = M + G$, где $M \cap G = \varnothing$, и G есть группа.*

Полугруппу (в общем случае некоммутативную), каждый идеал которой является двусторонним, называем *двусторонней полугруппой* (см. [1], определение 3). В такой полугруппе нет разницы между максимальными правыми и левыми идеалами. Если применить теорему 4,4 к таким полугруппам, то получим следующее существенное усиление теоремы 3 из работы Шварца [1].

Теорема 4,5. *Пусть M — произвольный максимальный идеал двусторонней полугруппы S. Пусть $S - M$ имеет больше чем один элемент. Тогда $S - M$ есть группа.*

5.

Ряд интересных теорем мы получим в том случае, когда полугруппа имеет всего лишь один максимальный левый идеал L^*, в котором содержится каждый другой левый идеал из S (отличный от S). Символом L^* (со звездочкой) мы пользуемся исключительно в этом случае. Такую полугруппу нельзя, очевидно, покрыть левыми идеалами $\neq S$.[1])

Аналогичное значение, как L^*, пусть в дальнейшем имеет правый идеал R^* и максимальный двусторонний идеал M^*.

Лемма 5. *Пусть полугруппа S имеет всего лишь один максимальный левый идеал L^*. Пусть $S - L^*$ имеет больше чем один элемент. Тогда $S - L^*$ является полугруппой.*

Доказательство. Пусть $a \in S - L^*$. Так как a невозможно покрыть никаким левым идеалом, то левый идеал $L = \{a, Sa\}$ неизбежно должен совпасть с S. Значит, имеет место $L^* \subset \{a, Sa\} = S$. Если выпустим из L элемент a, то получим опять левый идеал Sa. Могло бы случиться, что он имеет меньше элементов, чем S; значит, $Sa \subseteq S$. В силу того что $S - L^*$ имеет больше чем один элемент, выполнено даже потом еще $L^* \subset Sa$. Но так как L^* — максимальный левый идеал, то неизбежно $Sa = S$.

Наоборот, если $a \in L^*$, то имеет место $Sa \subseteq SL^* \subseteq L^*$. Следовательно, $S - L^*$ является множеством тех и только тех элементов $a \in S$, для которых имеет место $Sa = S$.

Если теперь a, b — два элемента $\in S - L^*$, то $Sa = S$, $Sb = S$, поэтому $Sab = Sb = S$. Значит, также имеет место соотношение $ab \in S - L^*$, т. е. $S - L^*$ есть полугруппа, итд.

Замечание. Аналогичная теорема выполнена для максимального правого идеала R^*, если такой существует. На простых примерах можно удостовериться, что аналогичная теорема не должна быть верной (в некоммутативных полугруппах) для максимального двустороннего идеала M^*. Но в случае двусторонней полугруппы справедлива, как мы видим, гораздо более сильная теорема 4,5.

---

[1]) Это могло бы не быть верным, если бы мы потребовали только то, чтобы S имела всего лишь один максимальный левый идеал. В этом случае может случиться, что существует еще другой левый идеал l, который невозможно погрузить ни в какой максимальный левый идеал. Но множество $L + l$ является левым идеалом $\supset L$, значит, $L + l = S$, т. е. S можно покрыть левыми идеалами.

Следующая теорема является значительным усилением теоремы 8 а в работе Шварца [1].

Теорема 5,1. *Пусть в полугруппе S существует L^*. Пусть S имеет хоть один двусторонний идеал $\neq S$. Тогда существует также M^* (и, конечно, имеет место $M^* \subseteq L^*$).*

Доказательство. Обозначим символом F множество тех $b \in S$, для которых имеет место $\{b, Sb, bS, SbS\} = S$. Множество F не пусто. В самом деле, если $a \in S - L^*$, то, в силу доказательства леммы 5, $\{a, Sa\} = S$. Следовательно, $\{a, Sa, aS, SaS\} = S$. Поэтому даже $F \supseteq S - L^*$.

Далее, непременно $F \subset S$, так как по предположению существует хотя бы один двусторонний идеал m, и для $b \in m$ имеет место $\{b, Sb, bS, SbS\} \subseteq \subseteq m \subset S$.

В дальнейшем мы будем искать какой-нибудь такой „наиболее широкий" двусторонний идеал M, для которого имеет место $M \cap F = \emptyset$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{A}$ всех двусторонних идеалов из S, содержащих m, которые непересекаются с F. Это множество не пусто. Если $m \subset m_\alpha \subset \subset m_\beta \dots$ — произвольное по включению упорядоченное множество элементов из $\mathfrak{A}$, то соединение этих элементов принадлежит также к $\mathfrak{A}$. Из этого по принципу максимума, известного под названием леммы *Цорна*, следует, что в $\mathfrak{A}$ существует по меньшей мере один максимальный элемент M. Это значит: существует двусторонний идеал M, обладающий следующими свойствами:

а) $M \cap F = \emptyset$,

б) для каждого $M' \supset M$ имеет место $M' \cap F \neq \emptyset$.

Так как M есть также левый идеал, имеет место $M \subseteq L^*$.

Теперь я утверждаю, что $F = S - M$. В силу определения множества F, имеет место $F \subseteq S - M$. Доказательство того, что не может быть $F \subset S - M$, поведем от противного. Пусть существует хотя бы один элемент $b \in S - M$, $b \operatorname{non} \in F$. Тогда идеал $M_1 = M + \{b, Sb, bS, SbS\}$ является двусторонним идеалом из S, и так как $b \operatorname{non} \in M$, то было бы $M_1 \supset M$.

Итак, было бы $M_1 \cap F \neq \emptyset$. Пусть $c \in M_1 \cap F$. Тогда с одной стороны (так как $c \in M_1$) есть $\{c, Sc, cS, ScS\} \subseteq M_1$. С другой стороны (так как $c \in F$) есть $\{c, Sc, cS, ScS\} = S$. Значит, $S = M_1$. Так как b не принадлежит F, то $M_2 = \{b, Sb, bS, SbS\} \neq S$. Одновременно M_2 (как левый идеал) $\subseteq L^*$. Значит, $M_1 = M + M_2 \subseteq \{L^* + L^*\} = L^* \subset S$, $M_1 \subset S$. Но это противоречие. Поэтому, действительно, есть $S - M = F$.

Так как для каждого $b \in S - M$ есть $\{b, Sb, bS, SbS\} = S$ и для каждого $b \in M$ есть $\{b, Sb, bS, SbS\} \subseteq M$, то из доказательства видно, что M — единственный максимальный двусторонний идеал из S. Следовательно, $M = M^*$. Существование M^* доказано.

Следующая теорема является усилением теоремы 4 в работе Воробьева [1].

Теорема 5,2. *Пусть в полугруппе S существует L^* и пусть S имеет хоть один двусторонний идеал $\neq S$. Пусть $S - L^*$ имеет больше чем один элемент. Пусть разностная полугруппа S/M^* имеет хоть один минимальный левый идеал. Тогда:*

а) L^* является одновременно максимальным двусторонним идеалом из S, т. е. $L^* = M^*$.

б) $S - L^*$ — слева простая полугруппа.

Доказательство. Существование M^* следует из предшествующей теоремы. Так как $M^* \subseteqq L^* \subset S$, и существует вообще только один максимальный левый идеал, то выполнены предположения теоремы 4,1. Наша теорема в том виде, как мы ее формулировали, является ее непосредственным следствием.

Теорема 5,3. *Пусть в полугруппе S существует R^* и L^*. Пусть существует хоть один двусторонний идеал $\neq S$. Пусть $S - L^*$ и $S - R^*$ обладают больше чем одним элементом. Пусть разностная полугруппа S/M^* имеет хоть один минимальный левый и хоть один мининальный правый идеал. Тогда:*

а) $L^* = R^* = M^*$,

б) $S - M^*$ — группа.

Доказательство. Следует из теоремы 5,2 и ее двойственной теоремы.

Замечание. Доказательства теорем 5,2 и 5,3 в сущности опираются на тот факт, что максимальный идеал L^* является одновременно (максимальным) двусторонним идеалом M^*. Для этого было важным предложение о минимальном левом идеале в S/M^*. В работе [1] было доказано, что в периодической полугруппе всегда выполнено $L^* = M^*$ и без предположения существования минимального левого идеала в S/M^*. Можно поэтому сформулировать следующие теоремы, которые являются следствием теорем 4,3 и 4,4 в случае периодических полугрупп.

Теорема 5,4. *Пусть в периодической полугруппе S существует L^*. Тогда существует также M^* и имеет место:*

а) $L^* = M^*$.

б) Если $S - M^*$ имеет больше чем один элемент, то $S - M^*$ является слева простой полугруппой, которая является соединением непересекающихся изоморфных групп.

Теорема 5,5. *Пусть в периодической полугруппе S существует L^* и R^*. Тогда существует также M^* и имеет место:*

а) $R^* = L^* = M^*$.

б) Если $S - M^*$ имеет больше чем один элемент, то $S - M^*$ — группа.

6.

Следующие леммы дают несколько типов полугрупп, в которых существуют идеалы L^*, R^* соотв. M^*.

Лемма 6. *Пусть S имеет хоть один левый идеал $\neq S$ и помимо того правую единицу e_r. Тогда существует один и только один максимальный левый идеал L^*.*

Доказательство. Элемент e_r не может принадлежать никакому левому идеалу $\neq S$. Значит, S не можем покрыть левыми идеалами.

По предположению существует хоть один левый идеал $l \subset S$. Пусть $\mathfrak{A}$ есть множество всех левых идеалов из S, содержащих l и несодержащих e_r. $\mathfrak{A}$ является частично упорядоченным множеством относительно включения. Если $\mathfrak{B}$ — какое-нибудь упорядоченное множество элементов из $\mathfrak{A}$, то множество, являющееся соединением всех элементов из $\mathfrak{B}$, есть, очевидно, опять левый идеал, несодержащий e_r и принадлежащий к $\mathfrak{A}$. В силу леммы *Цорна*, существует в $\mathfrak{A}$ хоть один максимальный элемент L^*. Он, очевидно, является максимальным левым идеалом из S, так как для каждого идеала L, для которого имеет место $L^* \subset L$, неизбежно выполнено $e_r \in L$, т. е. $L = S$. Одновременно существует в $\mathfrak{A}$ только один такой максимальный элемент, так как если бы существовал другой, напр. L_1^*, то было бы $\{L^*, L_1^*\} = S$, т. е. можно было бы покрыть e_r каким-то идеалом $\neq S$, но это неправда.

Подобно докажется:

Лемма 7. *Пусть S имеет хоть один правый идеал $\neq S$ и пусть содержит левую единицу e_l. Тогда существует один и только один максимальный правый идеал R^*.*

Лемма 8. *Пусть S имеет хоть один двусторонний идеал $\neq S$. Если S имеет правую или левую единицу то существует один и только один максимальный двусторонний идеал M^*. Больше того:*

а) если S содержит правую единицу e_r, то существует также L^* и имеет место $M^* \subseteqq L^*$;

б) если S имеет левую единицу e_l, то существует также R^* и имеет место $M^* \subseteqq R^*$;

в) если S имеет двустороннюю единицу, то $M^* \subseteqq L^* \cap R^*$.

Усиление теоремы мы получим, если предположим, что S имеет хоть один *минимальный* левый идеал.

Лемма 9. *Пусть S имеет хоть один минимальный левый идеал.*

а) Если S имеет правую единицу e_r и не является простой полугруппой, то существует L^* и M^*.

б) Если S имеет левую единицу e_l и не является простой полугруппой, то существует R^* и M^*.

Доказательство: Если S имеет нулевый элемент, тогда лемма 9 является следствием леммы 8, так как в качестве двустороннего идеала из леммы 8 можно взять нулевой удеал $[0]$. Поэтому предположим, что S не имеет нулевого элемента.

По предположению существует хоть один минимальный левый идеал l. Множество lS является минимальным двусторонним идеалом полугруппы S. Действительно, пусть A — произвольный двусторонний идеал из S. Тогда $A(lS) \subseteqq A$, одновременно (так как l — минимальный левый идеал из S) $Al = l$, т. е. $(Al)\ S = lS$. Значит, $lS \subseteqq A$, т. е. lS является двусторонним идеалом, содержащимся в каждом двустороннем идеале из S. Если $lS = S$, то S — простая полугруппа. Итак, пусть в дальнейшем $lS \subset S$.

а) Элемент e_r не может принадлежать никакому левому идеалу $\neq S$. Значит, e_r non $\in lS$. Существование L^* и M^* следует теперь из леммы 8.

б) Подобно e_l не может принадлежать никакому правому и тем менее двустороннему идеалу $\neq S$. Значит, также e_l non $\in lS$, и лемма опять следует из леммы 8.

Замечание 1. Утверждения а), б) леммы 9 не являются взаимно двойственными, так как полугруппа, имеющая хоть один минимальный левый идеал не должна обладать еще минимальным правым идеалом.

Замечание 2. Действительно, может случиться, что полугруппа имеет правую единицу e_r, но L^* и M^* не существуют. Тогда, разумеется, S является простой полугруппой. Примером такой полугруппы может служить полугруппа $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, мультипликативная таблица которой имеет вид

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_2	a_1	a_2
a_2	a_2	a_1	a_2	a_1
a_3	a_3	a_4	a_3	a_4
a_4	a_4	a_3	a_4	a_3

Элементы a_1, a_3 являются правыми единицами, но идеалы L^*, M^* не существуют.[2])

Следующие теоремы аналогичны теоремам 5,2 и 5,3.

Теорема 6,1. *Пусть полугруппа S имеет правую единицу e_r. Пусть S имеет хоть один двусторонний идеал $\neq S$. Пусть S/M^* имеет хоть один минимальный левый идеал. Тогда $S - L^*$ является соединением непересекающихся изоморфных групп.*

[2]) В этом направлении надо дополнить теоремы *Воробьева* 5 и 6.

Доказательство. Если $S - L^*$ имеет только один элемент, то этим элементом является неизбежно e_r. Этот элемент сам по собе образует группу. Следовательно, можно ограничиться случаем, что $S - L^*$ имеет больше чем один элемент. В этом случае $S - L^*$ является полугруппой в силу леммы 5.

По лемме 8 существует L^* и M^*, и имеет место $M^* \subseteqq L^*$. По теореме 5,2 есть $L^* = M^*$, и $S - L^*$ — слева простая полугруппа; так как $e_r \in \in S - L^*$, имеет эта слева простая полугруппа идемпотент. Значит, в силу теоремы 1,6, $S - L^*$ является соединением непересекающихся изоморфных групп.

Теорема 6,2. *Пусть полугруппа S имеет двусторонюю единицу e. Пусть имеет хоть один двусторонний идеал $\neq S$. Пусть S/M^* имеет хоть один минимальный левый идеал. Тогда $S - M^*$ является группой.*

Доказательство. Согласно лемме 8, существуют при наших предположениях идеалы M^*, R^*, L^* и имеет место $M^* \subseteqq R^* \cap L^*$. Разностная полугруппа S/M^* является простой полугруппой с нулем и имеет двусторонюю единицу e. По предположению существует хоть один минимальный левый идеал из S/M^*. Подобно, как в начале доказательства теоремы 4,1, покажем, что никакой левый идеал из S/M^* не может быть нильпотентным. Следовательно, по теореме 1,4, S/M^* покрыто суммой своих минимальных левых идеалов. Но e не может входить ни в какой левый идеал $\neq S/M^*$. Значит, в S/M^* не содержится никакой левый идеал $\neq [\bar{0}]$ а $\neq S/M^*$. Но далее имеет место: простая полугруппа, имеющая хоть один миимальный левый идеал и хоть один идемпотент $e \neq 0$, имеет также по меньшей мере один (не нильпотентный) минимальный правый идеал (см. [3], теорема 7,2). Значит, S/M^* является также соединением минимальных правых идеалов. Так как e не может принадлежать никакому правому идеалу $\neq S/M^*$, то и в S/M^* не содержится никакой правый идеал $\neq [\bar{0}]$ и $\neq S/M^*$. Поэтому, в силу следствия 1,2**в**, S/M^* является группой с нулем. Значит, $S - M^*$ есть группа, чтд.

ЛИТЕРАТУРА

Clifford A. H.: [1] Semigroups containing minimal ideals, Amer. J. Math. *70* (1948), 521—526. — [2] Semigroups without nilpotent ideals, Amer. J. Math. *71* (1949), 834—844.

Green J. A.: [1] On the structure of semigroups, Ann. of Math. *54* (1951), 163—172.

Schwarz Št.: [1] О максимальных идеалах в теории полугрупп, I, Чехословацкий математический журнал, т. *3* (78), 1953, 139—153. — [2] Структура простых полугрупп без нуля, Чехословацкий математический журнал, т. *1* (76), 1951, 51—65. — [3] О полугруппах, имеющих ядро, Чехословацкий математический журнал, т. *1* (76), 1951, 259—301.

Воробьев Н. Н.: [1] Об идеалах ассоциативных систем, ДАН, т. *83* (1952), 641—643.

Summary.

ON MAXIMAL IDEALS IN THE THEORY OF SEMIGROUPS, II

ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava.

(Received April 21, 1953.)

Let S be a semigroup, L (R, M) its maximal left (right, two-sided) ideal. The purpose of this paper is to study the structure of the sets $S - L$ ($S - R$, $S - M$).

In the following we give a brief contents of the above paper.

In section **1** some known results (mostly without proofs) and their corollaries, needed in the following, are given. These are essentially structure theorems on simple and left simple semigroups. (We remember that a semigroup S is called left simple if the equation $xa = b$ has a solution with $x \in S$ for every $a, b \in S$.)

Section **2** is concerned with the properties of the so called difference semigroup S/M.

The results of section **3** are consequences of the theorems concerning the structure of simple semigroups. Section **3** deals with the structure of $S - M$, where M denotes any of the maximal two-sided ideals of S. The following two theorems (which cannot be sharpened in some sense) are typical.

Theorem 3,1. *Let M be a maximal two-sided ideal of S. Let S/M contain at least one minimal left ideal. If $S - M$ is a semigroup, then it is — moreover — a sum of disjoint left simple semigroups.*

Theorem 3,2. *Let M be a maximal two-sided ideal of S. Suppose that S/M contains at least one minimal left and at least one minimal right ideal. If $S - M$ is a semigroup, then we can write*

$$S = M + \sum_i G^{(i)}, \quad M \cap \sum_i G^{(i)} = \varnothing,$$

where $G^{(i)}$ are disjoint isomorphic groups.

Section *4* and *5* are of deeper character.

Theorem 4,1. *Let M be a maximal two-sided ideal of S. Suppose that $S - M$ has more than one element. Let S/M contain at least one minimal left ideal. Suppose that there exists at most one maximal left ideal L satisfying the relation $M \subseteqq L \subset S$. Then there holds:*

a) $M = L$,

b) $S - L$ *is a left simple semigroup.*

A (noncommutative) semigroup S is called two-sided if every ideal of S is two-sided. A consequence of the theorems of this section is the following:

Theorem 4,5. *Let M be any maximal (two-sided) ideal of a two-sided semigroup S. Suppose that $S - M$ contains more than one element. Then $S - M$ is a group.*

A number of interesting theorems is obtained in the case when S has a single maximal left (right) ideal. We shall briefly say that S contains L^* if there exists a maximal left ideal L^* containing every left ideal of S different from S. Analogous meaning have the maximal ideals R^* and M^*. The following theorems are proved in section **5**.

Lemma 5. *Let S contain L^*. Suppose that $S - L^*$ has more than one element. Then $S - L^*$ is a semigroup.*

Theorem 5,1. *Let S contain L^* and at least one two-sided ideal $\neq S$. Then S contains also M^* (and it is of course $M^* \subseteqq L^*$).*

Theorem 5,2. *Let S contain L^* and at least one two-sided ideal $\neq S$. Suppose that $S - L^*$ has more than one element. Let the difference semigroup S/M^* contain at least one minimal left ideal. Then*

a) L^* is at the same time the maximal two-sided ideal of S, i. e. $L^* = M^*$.

b) $S - L^*$ is a left simple semigroup.

Theorem 5,3. *Let S contain R^*, L^* and at least one two-sided ideal $\neq S$. Suppose that $S - L^*$ and $S - R^*$ have more than one element. Let S/M^* contain at least one minimal left and at least one minimal right ideal. Then there holds*

a) $R^* = L^* = M^*$;

b) $S - M^*$ is a group.

In section **6** some types of semigroups containing $L^*(R^*, M^*)$ are given. These are semigroups containing (left, right, two-sided) unit elements. Lemmas 6—9 are concerned with various existence theorems.

Theorem 6,1. *Let S have a right unit element and at least one two-sided ideal $\neq S$. Let S/M^* contain at least one minimal left ideal. Then $S - L^*$ is a sum of disjoint isomorphic groups.*

Theorem 6,2. *Let S contain a two-sided unit element and at least one two-sided ideal $\neq S$. Let S/M^* contain at least one minimal left ideal. Then $S - M^*$ is a group.*