Vlastimil Pták

О полных топологических линейных пространствах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 3 (1953), No. 3, 285–290

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100088

О ПОЛНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ВЛАСТИМИЛ ПТАК, (Vlastimil Pták), Прага.

В этой статье дается *предварительное сообщение* о работе одинакового названия, поступившей в редакцию 11/IX 1952 г., которая будет опубликована позднее.

В работе рассматривается теорема о непрерывности обратного оператора в выпуклых топологических линейных пространствах общего типа. Приводится характеризация пространств, двойственных пространствам, в которых справедлива эта теорема. С этим тесно связано исследование выпуклых топологических линейных пространств, полных в смысле *А. Вейля*. Приводится непосредственная характеризация элементов полной оболочки данного пространства.

Вторая часть работы посвящена пространствам непрерывных функций на данном вполне регулярном топологическом пространстве. На примерах при помощи подходящих топологических пространств показано, что некоторые формально отличающиеся друг от друга свойства, определенные в первой части, являются и в сущности различными.

Одним из важнейших результатов функционального анализа бесспорно является знаменитая теорема *Банаха* о непрерывности обратного оператора. В несколько сжатой, но наиболее важной для применений формулировке, эта теорема имеет следующий вид:

Пусть X — полное нормированное линейное пространство, и пусть φ — непрерывное линейное отображение X на нормированное пространство Z. Тогда, если Z будет второй категории в себе, отображение φ будет открытым, а пространство Z полным.

Подробный анализ показывает, что теорема основана на следующем свойстве полных нормированных пространств: образ единичной сферы является всегда или неплотным или открытым в Z. Одной из задач настоящей работы является исследование, при каких условиях и в какой форме эту теорему можно распростарнить на наиболее широкую категорию линейных пространств.

Представляется естественным и целесообразным задаться вопросом об обобщении известных из теории нормированных пространств теорем на линейные топологические пространства общего типа. Этому и посвящается настоящая работа, причем мы займемся прежде всего вопросами, связанными с теоремой Банаха и с понятием полноты.

В последующем изложении дается обзор важнейших определений и результатов настоящей работы. Топологическая терминология заимствована у *Н. Бурбаки*, выражения: выпуклое топологическое линейное пространство, двойственное пространство и полярное множество — применяются нами в смысле, определенном в работах *Ж. Дьедонне* и *М. Катетова*.*) Далее мы раз навсегда условимся называть окрестностью нуля в выпуклом топологическом линейном пространстве X симметричную выпуклую и замкнутую окрестность нуля.

Прежде всего возникает вопрос, каким образом сформулировать теорему о непрерывности обратного оператора в выпуклых топологических линейных пространствах. Более подробный анализ показывает, что сущность свойства Банаха характеризуется следующим определением:

*Выпуклое топологическое линейное пространство X мы назовем B-полным, если оно обладает следующим свойством: если φ — непрерывное линейное отображение пространства X на выпуклое топологическое линейное пространство Z такое, что ни одна из окрестностей нуля в X не отобразится на неплотное в Z множество, то φ будет открытым.***)

Самым важным этапом дальнейших исследований является простой прием, который нам позволит без труда охарактеризовать пространства, двойственные B-полынм пространствам.

Введем прежде всего следующее определение:

Пусть X — выпуклое топологическое линейное пространство, Y — двойственное ему пространство. Пусть $K \subset Y$ — симметричное и выпуклое множество. Мы скажем, что K почти замкнуто, если для любой окрестности нуля U в пространстве X пересечение $K \cap U^*$ будет замкнутым.

Пользуясь этим понятием, мы можем охарактеризовать B-полные пространства следующим образом:

Пусть X — выпуклое топологическое линейное пространство, Y — двойственное ему пространство. В таком случае X будет B-полным тогда и только тогда, если каждое почти замкнутое подпространство Q пространства Y является уже замкнутым.

---

*) *J. Dieudonné:* La dualité dans les espaces vectoriels topologiques, Annales de l'Ecole Normale Supérieure *59* (1942), 107—139. *M. Katětov:* On convex topological linear spaces, Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Carol. *181* (1948), 1—20.

**) В действительности дело обстоит несколько сложнее, так что нужно различать понятия пространства B-полного и наследственно B-полного. В настоящем предварительном сообщении мы этого, однако, не делаем, чтобы не усложнять формулировки теорем.

Введем дальнейшее определение:

Пусть X — выпуклое топологическое линейное пространство, Y — двойственное ему пространство. Пусть r — линейная функция, определенная на Y. Тогда мы назовем r почти непрерывным функционалом на Y, если для любой окрестности нуля U в пространстве X частичная функция r на U^* будет непрерывной в слабой топологии пространства Y.

Нетрудно установить, что линейная функция r на Y будет почти непрерывным функционалом на Y именно тогда, когда ее нулевая гиперплоскость почти замкнута. Самым важным результатом дальнейших исследований является непосредственная характеризация элементов полной оболочки. При этом полноту мы понимаем в смысле определения Вейля для общей равномерной структуры. Докажем, что полная оболочка данного выпуклого топологического линейного пространства X совпадает с пространством всех почти непрерывных функционалов на двойственном к X пространстве. Этот результат, который мы выводим двумя различными способами, дает нам одновременно доказательство известной теоремы о существовании полной оболочки. В то же время это дает нам следующую характеризацию пространств, двойственных полным выпуклым топологическим линейным пространствам.

Пусть X — выпуклое топологическое линейное пространство, Y — двойственное ему пространство. В таком случае X будет полным тогда и только тогда, если каждая почти замкнутая гиперплоскость Q в пространстве Y уже замкнута.

Сравнение с предыдущим условием для B-полноты показывает, что оба эти свойства весьма родственны друг другу. С этими свойствами тесно связан известный уже результат *М. Крейна* и *В. Шмульяна.**) Эти авторы, используя в сущности мысли, высказанные уже Банахом, доказали следующую теорему:

Пусть X — полное нормированное пространство, Y — сопряженное с ним пространство. Пусть Q — подпространство в Y такое, что его пересечение с замкнутой единичной сферой пространства Y слабо замкнуто. Тогда Q будет слабо замкнутым.

В нашей терминологии этот результат, очевидно, означает, что каждое почти замкнутое подпространство пространства Y замкнуто.

Другими словами, согласно только что приведенному результату, оба исследуемых нами свойства эквивалентны друг другу, если X — нормированное пространство.

Этот результат нетрудно распространить и на пространства, в которых точка 0 имеет счетный характер. Автор довольно долгое время считал,

*) *M. Krein, V. Šmulian:* On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space, Ann. of Math., *41* (1940), 556–583.

что удастся доказать эквивалентность этих двух свойств, т. е., что теорему Банаха можно будет распространить на произвольные полные пространства. Только когда автор убедился, что эквивалентность этих двух свойств упорно сопротивляется всем попыткам доказать ее, он обратился к изучению некоторых конкретных пространств.

Подходящим типом таких пространств являются пространства $C(T)$ всех непрерывных функций на данном топологическом пространстве T, топологизированные с помощью псевдонорм, соответствующих компактным подмножествам пространства T, так как, по мнению автора, изучение зависимостей между свойствами пространства T и свойствами пространства $C(T)$ может привести к интересным результатам в общей топологии. Этим вопросам посвящена вторая часть настоящей работы.

Отметим вкратце результаты этой части. Прежде всего, очень легко охарактеризовать топологические пространства T, для которых пространство $C(T)$ полно. Введем для этой цели простое понятие: *Функцию $x(t)$, определенную на вполне регулярном топологическом пространстве T, назовем почти непрерывной, если для любого компактного $K \subset T$ частичная функция x_K будет непрерывной.* Потом легко доказать, что $C(T)$ будет полным тогда и только тогда, если каждая почти непрерывная функция на T непрерывна. С понятием почти непрерывной функции тесно связано понятие почти замкнутого множества. *Множество $M \subset T$ мы будем называть почти замкнутым, если для любого компактного $K \subset T$ пересечение $M \cap K$ будет замкнутым.* Уже на первый взгляд ясно, что в пространстве, в котором каждое почти замкнутое множество замкнуто, будет и каждая почти непрерывная функция непрерывной.

Используя эти результаты, мы покажем, что *гомоморфный образ полного выпуклого топологического линейного пространства не будет непременно полным.* Этот результат может показаться несколько неожиданным, ибо известно, что гомоморфный образ полного нормированного пространства всегда полный. (Под гомоморфным отображением мы понимаем, как обычно, линейное отображение, являющееся одновременно непрерывным и открытым.)

Построим для этого вполне регулярное топологическое пространство T, в котором каждое почти замкнутое множество является замкнутым, так что $C(T)$ будет полным. При этом T будет содержать замкнутое множество B такое, что топология пространства T индицирует на B дискретную топологию. Определим теперь линейное отображение $C(T)$ в $C(B)$ так, что каждой непрерывной функции на T поставим в соответствие ее частичную функцию на B. Мы обнаружим, что это отображение непрерывно и открыто. Так как топология пространства B дискретна, пространство $C(B)$ будет, очевидно, полным. Пространство T построено, однако, так, что $C(T)$ отобразится только на некоторое плотное подпространство пространства $C(B)$, отличное от $C(B)$, так что образ пространства $C(T)$ не будет полным. (Это значит, что не всякую функцию, непрерывную на B, можно распространить на все T, так что пространство T не является нормальным.)

В дальнейшем мы исследуем связь между B-полнотой пространства $C(T)$ и свойствами пространства T. Мы получим интересный результат:

Если $C(T)$ является B-полным, то каждое множество $M \subset T$, одновременно плотное в T и почти замкнутое, обязательно совпадает с T. Возникает вопрос, теперь уже чисто топологического характера, в каждом ли вполне регулярном пространстве, в котором почти непрерывные функции непрерывны, будут и почти замкнутые множества уже замкнутыми. Получаем отрицательный ответ, в чем можно убедиться на примере пространства, данного М. Катетовым. Этим пространством T уже раньше по предложению проф. *Эд. Чеха* занимался проф. *Й. Новак*, который установил, что T не является нормальным. Из предыдущего непосредственно следует, что $C(T)$ *является полным, но не B-полным.*

Некоторые исследования, касающиеся понятия почти замкнутого подпространства, наводят на мысль, что было бы полезно изучать и почти непрерывные функционалы, определенные только на некотором подпространстве пространства Y. С этим связано понятие R-полноты.

Пусть X — выпуклое топологическое линейное пространство, Y — двойственное ему пространство. Пространство X мы назовем R-полным, если каждый почти непрерывный функционал, определенный на некотором подпространстве пространства Y, является уже непрерывным.

R-полные пространства можно охарактеризовать еще и другими способами. Пользуясь одним из них, мы построим *пример B-полного пространства, не являющегося R-полным.*

В заключение можно сказать, что все исследования настоящей работы выявляют довольно тесную связь с некоторыми чисто топологическими вопросами, и можно надеяться, что в этом направлении будут получены дальнейшие интересные результаты.

Summary.

ON COMPLETE TOPOLOGICAL LINEAR SPACES

VLASTIMIL PTÁK, Praha.

The author gives a brief account of a paper to be published later in this Journal. The paper has been received by the Editors November 11, 1952. Its main object is the discussion of the theorem on the continuity of inverse operators in general convex topological linear spaces. A detailed analysis

shows that the essential features of the theorem in question are contained in the following two definitions. A continuous linear mapping of one convex topological linear space on another will be called almost open if no open set can be mapped onto a nondense subset of the image space. Now a convex topological linear space X will be called B-complete, if every continuous and almost open linear mapping of X on a convex topological linear space Z is already open. A simple characterization of spaces dual to B-complete spaces is given. Now it is to be expected that the notion of B-completeness will be closely related to the notion of completeness. This necessitates a detailed study of spaces complete in the sense of A. Weil. We give a direct characterization of the elements of the complete closure of an arbitraty convex topological linear space and obtain at the same time an interesting characterization of spaces dual to complete spaces.

The second part is devoted to the study of the space of all continuous functions on a given topological space. With the help of the preceding considerations and of some topological spaces constructed for that purpose we find (among other results) examples to show that a homomorphic image of a complete linear space need not be complete and that B-completeness does not follow from completeness.