Czechoslovak Mathematical Journal

Ludvík Janoš

Свойства уплотнения Цассенхауза

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 3 (1953), No. 2, 159–180

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100080

СВОЙСТВА УПЛОТНЕНИЯ ЦАССЕНХАУЗА

ЛЮДВИК ЯNОШ, (Ludvík Janoš), Прага.

(Поступило в редакцию 18/VI 1952 г.)

В настоящей работе изучается поведение уплотнения Цассенхауза в структурах. Статья разделена на три части. В первой части исследуется необходимое и достаточное условие для того, чтобы построение Цассенхауза в модулярной структуре не привело к собственному уплотнению двух данных цепей между двумя элементами $a > b$ структуры. Во второй части изучаются свойства уплотнения Цассенхауза в структурах; наконец, третья часть содержит исследование, аналогичное проведенному в первой части, для нормальных цепей в группах с композиционным рядом.

ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Понятие структуры, модулярной структуры, аксиоматика структуры и прочие необходимые понятия разбираются в цитированной литературе.

Отношение частичного упорядочения структуры мы обозначим символом $\leq$; соединение и пересечение элементов a, b в структуре обозначим соответственно через $a \vee b$ и $a \wedge b$.

Мы будем писать $a < b$ тогда и только тогда, если одновременно имеет место $a \leq b$; $a \neq b$.

Квоциентом a/b мы будем обозначать множество всех таких x, для которых имеет место $b \leq x \leq a$.

Мы будем писать $a/b \underset{d}{\sim} c/d$ тогда и только тогда, если

$$a = b \vee c;\ d = b \wedge c\,,$$

где $\vee$ и $\wedge$ означают соответственно соединение и пересечение.

Отношение $a/b \underset{d}{\sim} c/d$ мы читаем так: квоциент a/b вниз прямо подобен квоциенту c/d.

Мы будем писать $a/b \underset{j}{\sim} cd$ тогда и только тогда, если существует квоциент u/v так, что имеет место $a/b \underset{d}{\sim} u/v \overset{d}{\sim} c/d$, где $u/v \overset{d}{\sim} c/d$ означает $c/d \underset{d}{\sim} u/v$.

Отношение $a/b \underset{j}{\sim} c/d$ мы читаем так: квоциенты a/b, c/d снизу просто подобны.

Дуальным образом мы определим верхнее простое подобие

$$a/b \overset{j}{\sim} c/d \Leftrightarrow a/b \overset{d}{\sim} u/v \underset{d}{\sim} c/d \, .$$

Цепью между a, b является конечная система элементов a_i, для которых имеет место

$$a = a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_n = b \, .$$

Иногда мы будем записывать такую цепь сокращенно:

$$\{a_i\}, \; i = 0, 1, 2, \ldots, n \, .$$

Цепь $\{x_i\}$ является уплотнением цепи $\{a_i\}$ тогда и только тогда, если цепь $\{a_i\}$ представляет часть цепи $\{x_i\}$. Это мы записываем в виде $\{a_i\} \subseteqq \{x_i\}$.

Если $\{a_i\}$ является собственной частью $\{x_i\}$, то и уплотнение называется собственным.

Мы будем заниматься парами цепей между одними и теми же элементами a, b.

$$a = a_0 > a_1 > \ldots > a_r = b \tag{1}$$

$$a = b_0 > b_1 > \ldots > b_s = b \, . \tag{2}$$

Возьмем другую пару

$$a = x_0 > x_1 > \ldots > x_m = b \tag{3}$$

$$a = y_0 > y_1 > \ldots > y_n = b \, . \tag{4}$$

Цепи (3), (4) мы назовем уплотнением цепей (1), (2), если имеет место

$$\{a_i\} \subseteq \{x_i\}; \; \{b_i\} \subseteq \{y_i\} \, .$$

Если хоть в одном из етих соотношений не имеет места знак равенства, то цепи (3), (4) будут собственным уплотнением цепей (1), (2).

Исследуем цепи (1), (2) и составим систему из элементов $a_{i,j}$, определенных следующим образом:

$$a_{i,j} = a_{i+1} \vee (a_i \wedge b_j)$$

для

$$i = 0, 1, 2, \ldots, r-1; \; j = 0, 1, 2, \ldots, s.$$

Очевидно, эти элементы образуют цепь, которую мы запишем в виде $\{a_{i,j}\}$.

Сразу же видно, что $\{a_{i,j}\}$ является уплотнением цепи (1).

Аналогично введем $b_{k,l}$:

$$b_{k,l} = b_{k+1} \vee (b_k \wedge a_l) \, ,$$

где

$$k = 0, 1, 2, \ldots, s-1; \; l = 0, 1, 2, \ldots, r \, .$$

Цепи $\{a_{i,j}\}$, $\{b_{k,l}\}$ являются уплотнением цепей (1), (2) и называются нижним уплотнением Цассенхауза цепей (1), (2).

Верхнее уплотнение Цассенхауза определяется дуально.

Пусть теперь даны две цепи

$$a = x_0 > x_1 > \ldots > x_n = b \tag{5}$$

$$a = y_0 > y_1 > \ldots > y_n = b \tag{6}$$

Мы будем говорить, что цепи (5), (6) снизу просто подобны, тогда и только тогда, если существует такая подстановка f чисел $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, что имеет место

$$x_i/x_{i+1} \underset{j}{\sim} y_j/y_{j+1}\,, \quad j = f(i)\,,$$

для $\qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1\,.$

Если цепи (5), (6) являются

1. уплотнением цепей (1), (2) и
2. снизу просто подобны, то мы будем говорить:

Цепи (5), (6) являются уплотнением Шрейера цепей (1), (2).

Если цепи (5), (6) не являются собственным уплотнением каких-либо цепей, удовлетворяющих 1., 2., то мы говорим, что цепи (5), (6) представляют минимальное уплотнение Шрейера цепей (1), (2).

ВВЕДЕНИЕ

Приведем несколько теорем, известных из теории структур и групп, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Для модулярных структур справедливо следующее: Пусть даны две цепи

$$a = a_0 > a_1 > \ldots > a_r = b \tag{1}$$

$$a = b_0 > b_1 > \ldots > b_s = b \tag{2}$$

Образуем уплотнение Цассенхауза цепей (1), (2). Это будут цепи $\{a_{i,j}\}$; $\{b_{k,l}\}$.

Для них имеет место система соотношений:

$$a_{i,j}/a_{i,j+1} \underset{d}{\sim} a_i \wedge b_j/(a_{i+1} \wedge b_j) \vee (a_i \wedge b_{j+1}) \overset{d}{\sim} b_{j.i}/b_{j,i+1}\,.$$

Исследуем далее в модулярной структуре цепи (1), (2). Имеем теорему, что множества $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ образуют конечную подструктуру, которую мы обозначим через M. Ее доказательство находится в книге *Birkhoff: Lattice theory* стр. 71.

Наконец, припомним известную из теории групп теорему:

Пусть даны две нормальные цепи в группе G:

$$G = G_0 > G_1 > \ldots > G_r = I \tag{1}$$

$$G = H_0 > H_1 > \ldots > H_s = I\,, \tag{2}$$

где I — единичная подгруппа и для каждого i справедливо утверждение: G_{i+1} нормальна в G_i и аналогично H_{i+1} в H_i.

Воспользуемся построением цепи Цассенхауза $\{G_{i,j}\}$, $\{H_{kl}\}$. Тогда имеет место теорема:

Для цепей $\{G_{i,j}\}$, $\{H_{k,l}\}$ справедлива система соотношений:

$$G_{i,j}/G_{i,j+1} \underset{d}{\sim} G_i \wedge H_j/(G_i \wedge H_{j+1}) \vee (G_{i+1} \wedge H_j) \overset{d}{\sim} H_{j,i}/H_{j,i+1}$$

для

$$i = 0, 1, 2, \ldots, r - 1 \,,$$
$$j = 0, 1, 2, \ldots, s - 1 \,.$$

Структурой здесь будет множество всех подгрупп группы G; $X_1 \vee X_2$ означает подгруппу, образованную подгруппами X_1, X_2, $X_1 \wedge X_2$ означает пересечение подгрупп X_1, X_2.

Согласно теореме I об изоморфизме, мы можем написать

$$|G_{i,j}/G_{i,j+1}| \simeq |G_i \wedge H_j/(G_i \wedge H_{j+1}) \vee (G_{i+1} \wedge H_j)| \simeq |H_{j,i}/H_{j,i+1}| \,,$$

где символом $|X_1/X_2|$ обозначена (как и в дальнейшем) фактор-группа в отличие от $X_1|X_2$, означающего квоциент, т. е. чисто структурное понятие.

Ввиду транзитивности символа $\simeq$ имеем

$$|G_{i,j}/G_{i,j+1}| \simeq |H_{j,i}/H_{j,i+1}| \,,$$

что является известным доказательством теоремы Шрейера для групп.

ЧАСТЬ 1.

Определение. Мы будем писать $a_1/a, \underset{r}{\sim} b_1/b_2$ тогда и только тогда, если

$$a_1/a_2 \underset{d}{\sim} a_1 \wedge b_1/a_2 \wedge b_2 \overset{d}{\sim} b_1/b_2 \,.$$

Теорема 1,1.

$$a_1/a_2 \underset{r}{\sim} b_1/b_2 \Leftrightarrow \begin{matrix} a_{1,1} = a_1; \; b_{1,1} = b_1 \\ a_{1,2} = a_2; \; b_{1,2} = b_2 \end{matrix}$$

где

$$a_{1,1} = a_2 \vee (a_1 \wedge b_1), \; a_{1,2} = a_2 \vee (a_1 \wedge b_2) \,.$$
$$b_{1,1} = b_2 \vee (b_1 \wedge a_1), \; b_{1,2} = b_2 \vee (b_1 \wedge a_2) \,.$$

Доказательство. а) пусть имеет место

$$a_1/a_2 \underset{r}{\sim} b_1/b_2 \,,$$

то есть

$$a_1/a_2 \underset{d}{\sim} a_1 \wedge b_1/a_2 \wedge b_2 \overset{d}{\sim} b_1/b_2 \,.$$

Так как $a_2 \vee (a_1 \wedge b_1) = a_1$, то $a_{1,1} = a_1$, далее

$$a_{1,2} = a_2 \vee (a_1 \wedge b_2)$$

откуда

$$a_1 \wedge b_2 = a_1 \wedge b_1 \wedge b_2 = a_2 \wedge b_2\,,$$
$$a_2 \vee (a_1 \wedge b_2) = a_2 \vee (a_2 \wedge b_2) = a_2\,.$$

Аналогично получаем заменой букв

$$b_{1,1} = b_1; \quad b_{1,2} = b_2\,.$$

б) Пусть имеет место

$$a_{1,1} = a_1; \; b_{1,1} = b_1,$$
$$a_{1,2} = a_2; \; b_{1,2} = b_2.$$

Достаточно показать

$$a_1/a_2 \underset{d}{\sim} a_1 \wedge b_1/a_2 \wedge b_2\,.$$

Из этого следует: $a_2 \vee (a_1 \wedge b_1) = a_{1,1} = a_1$, и достаточно проверить, что $a_2 \wedge (a_1 \wedge b_1) = a_2 \wedge b_2$. Считаем $a_2 \wedge (a_1 \wedge b_1) = a_2 \wedge b_1$ и учитывая, что $b_{1,2} = b_2$, то есть $b_2 \vee (b_1 \wedge a_2) = b_2$, мы получаем $b_1 \wedge a_2 \leq b_2$ а также $b_1 \wedge a_2 \leq a_2$, следовательно $b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge a_2$ и теорема доказана, так как заменой букв получаем

$$b_1/b_2 \underset{d}{\sim} a_1 \wedge b_1/a_2 \wedge b_2.$$

Теорема 1,2. (*См. Коржинек* 2, *стр.* 6, *теорема* 2,9.)

$$a_1/a_2 \overset{j}{\underset{j}{\sim}} b_1/b_2 \Rightarrow a_1/a_2 \underset{r}{\sim} b_1/b_2\,,$$

где символ $\overset{j}{\underset{j}{\sim}}$ *определяется так:*

$$a_1/a_2 \overset{j}{\underset{j}{\sim}} b_1/b_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1/a_2 \underset{j}{\sim} b_1/b_2 \\ a_1/a_2 \overset{j}{\sim} b_1/b_2\,. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть имеет место $a_1/a_2 \overset{j}{\underset{j}{\sim}} b_1/b_2$, то есть одновременно

$$\left.\begin{aligned} a_1/a_2 &\overset{d}{\sim} u_1/v_1 \underset{d}{\sim} b_1/b_2 \\ a_1/a_2 &\underset{d}{\sim} u_2/v_2 \overset{d}{\sim} b_1/b_2\,, \end{aligned}\right\}$$

где u_1v_1, u_2, v_2, являются промежуточными членами подобия.

Достаточно доказать, что

$$a_1/a_2 \underset{d}{\sim} a_1 \wedge b_1/a_2 \wedge b_2\,.$$

Считаем:

$$a_2 \vee (a_1 \wedge b_1)\,,$$

очевидно, будет

$$\left.\begin{aligned} u_2 &\le a_1 \\ u_2 &\le b_1 \end{aligned}\right\} u_2 \le a_1 \wedge b_1 ,$$

откуда

$$a_1 = a_2 \vee u_2 \le a_2 \vee (a_1 \wedge b_1) \le a_1 ,$$

следовательно $a_2 \vee (a_1 \wedge b_1) = a_1$.

Остается только проверить, что

$$a_2 \wedge (a_1 \wedge b_1) = a_2 \wedge b_2 .$$

Считаем: $a_2 \wedge (a_1 \wedge b_1) \quad a_2 \wedge b_1$ и учитываем

$$a_2 \le v_1 ;\ b_1 \wedge v_1 \; = b_2 ,$$

$$a_2 \wedge b_1 = a_2 \wedge v_1 \wedge b_1 = a_2 \wedge b_2 .$$

Аналогично получаем заменой букв

$$b_1/b_2 \underset{d}{\sim} a_1 \wedge b_1/a_2 \wedge b_2 ,$$

что и доказывает нашу теорему.

Теорема 1,3.

$$\left.\begin{aligned} & a_2 < a_1 \\ & a_1/a_2 \underset{r}{\sim} b_1/b_2 \\ & a_1/a_2 \underset{j}{\sim} b_3/b_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow b_3 \text{ non} \le b_2 .$$

Доказательство. По теореме 1,1 имеем $a_{1,2} = a_2$. Считаем $a_{1,3} = a_2 \vee$ $\vee (a_1 \wedge b_3)$.

Примем во внимание, что

$$a_1/a_2 \underset{d}{\sim} u/v \overset{d}{\sim} b_3/b_4 .$$

$$\left.\begin{aligned} u &\le a_1 \\ u &\le b_3 \end{aligned}\right\} u \le a_1 \wedge b_3$$

$$a_1 = a_2 \vee u \le a_2 \vee (a_1 \wedge b_3) \le a_1 ;$$

следовательно, $a_2 \vee (a_1 \wedge b_3) = a_1$ и одновременно, согласно 1,1, будет $a_2 \vee (a_1 \wedge b_2) = a_2$.

Итак, если бы было $b_3 \le b_2$, то было бы и $a_1 \le a_2$, что противоречит условию.

Теорема 1,4. *Пусть даны две цепи*

$$a = a_0 > a_1 > \ldots > a_n = b \qquad (1)$$

$$b = b_0 > b_1 > \ldots > b_n = b \qquad (2)$$

и пусть существует подстановка f чисел 0, 1, 2, ... $(n - 1)$ *так, что*

$$a_1/a_{i+1} \underset{r}{\sim} b_j/b_{j+1} , \qquad j = f(i)$$

для $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Тогда построение Цассенхауза не приводит к собственному уплотнению цепей (1), (2).

Доказательство. По теореме 1,1 для любохо i будет

$$a_{i,j} = a_i, \; a_{i,j+1} = a_{i+1}, \quad j = f(i) \,,$$

то есть, цепь (1) не уплотнена. Заменой букв мы убедимся, что и (2) не будет уплотненной, чем доказательство завершается.

Теорема 1,5. *Пусть даны цепи*

$$a = a_0 > a_1 > \ldots > a_r = b \tag{1}$$

$$a = b_0 > b_1 > \ldots > b_s = b \tag{2}$$

и пусть для (1), (2) *имеет место система соотношений*

$$a_{i,j}/a_{i,j+1} \underset{d}{\sim} a_i \wedge b_j/(a_i \wedge b_{j+1}) \vee (a_{i+1} \wedge b_j) \overset{d}{\sim} b_{j,i}/b_{j,i+1}$$

для

$$i = 0, 1, 2, \ldots, r-1$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots, s-1$$

Тогда для цепей

$$a = x_0 > x_1 > \ldots > x_n = b \tag{3}$$

$$a = y_0 > y_1 > \ldots > y_n = b \tag{4}$$

(*где* (3), (4) *суть уплотнения Цассенхауза цепей* (1), (2)) *существует подстановка f чисел* $0, 1, 2, \ldots, n-1$ *так, что имеет место*

$$x_i/x_{i+1} \underset{r}{\sim} y_j/y_{j+1} \,, \quad j = f(i) \,.$$

Доказательство. Каждый неединичный квоциент $a_{i,j}/a_{i,+1}$ может быть выражен только одним способом; аналогично и $b_{k,l}/b_{k,l+1}$.

Так как приведенные соотношения отображают неединичные квоциенты на неединичные же, то ясно, что для каждого x_i/x_{i+1} существует некоторый y_j/y_{j+1}, поставленный ему в соответствие определенным соотношением, и что это соответствие взаимно однозначно. Поэтому цепи (3), (4) имеют одинаковую длину n и существует подстановка f чисел $0, 1, 2, \ldots, n-1$ так, что имеет место

$$x_i/x_{i+1} \underset{j}{\sim} y_j/y_{j+1} \,, \quad j = f(i) \,.$$

Нам нужно только показать, что символ $\underset{j}{\sim}$ здесь можно заменить символом $\underset{r}{\sim}$.

По предположению имеет место

$$a_{i,j}/a_{i,j+1} \underset{d}{\sim} a_i \wedge b_j/v \overset{d}{\sim} b_{j,i}/b_{j,i+1} \,,$$

где $v = (a_i \wedge b_{j+1}) \vee (a_{i+1} \wedge b_j)$.

Достаточно будет показать, что

$$a_{i,j} \wedge b_{j,i} = a_i \wedge b_j .$$

Из приведенного соотношения вытекает

$$\left.\begin{aligned} a_i \wedge b_j \le a_{i,j} \\ a_i \wedge b_j \le b_{j,i} \end{aligned}\right\} \quad a_i \wedge b_j \le a_{i,j} \wedge b_{j,i} .$$

Однако, справедливо и обратное соотношение

$$\left.\begin{aligned} a_{j,i} \le a_i \\ b_{j,i} \le b_j \end{aligned}\right\} \quad a_{i,j} \wedge b_{j,i} \le a_i \wedge b_j ,$$

то есть

$$a_{j,i} \wedge b_{j,i} = a_i \wedge b_j .$$

Итак мы имеем

$$x_i/x_{i+1} \underset{d}{\sim} x_i \wedge y_j/v \overset{d}{\sim} y_j/y_{j+1} ,$$

$$v = x_{i+1} \wedge y_j , \quad v \wedge y_{j+1} = x_{i+1} \wedge y_{j+1} ,$$

$$v = x_i \wedge y_{j+1} , \quad v \wedge y_{j+1} = v ,$$

откуда $v = x_{i+1} \wedge y_{j+1}$, и доказательство закончено.

Теорема 1,6. (*Для модулярной структуры.*) *Пусть в модулярной структуре даны две цепи*

$$a = a_0 > a_1 > \ldots > a_n = b , \tag{1}$$

$$a = b_0 > b_1 > \ldots > b_n = b , \tag{2}$$

и пусть существует подстановка f, отображающая квоциенты (1) *на квоциенты* (2) *так, что имеет место*

$$a_i/a_{i+1} \underset{j}{\sim} b_j/b_{j+1} , \qquad j = f(i)$$

для $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Тогда имеем

$$a_i/a_{i+1} \sim b_j/b_{j+1} .$$

для тех же i.

Доказательство. (См. Коржинек 2, стр. 7, теорема 2,10.) Проведем полную индукцию по длине цепи n.

Теорема справедлива для цепей длины 1, ибо если $a_0 > a_1$, то имеет место $a_0/a_1 \underset{j}{\sim} a_0/a_1$, и также $a_0/a_1 \overset{j}{\sim} a_0/a_1$.

Предположим, что теорема справедлива для всех цепей длины $n - 1$ и докажем, что она справедлива для цепей длины n.

Пусть мы имеем цепи длины n:

$$a = a_0 > a_1 > \dots > a_n = b\,, \tag{1}$$

$$a = b_0 > b_1 > \dots > b_n = b\,, \tag{2}$$

снизу просто подобные друг другу.

Рассмотрим квоциент b_{n-1}/b_n. По предположению существует некоторое k такое, что имеет место

$$a_k/a_{k+1} \underset{j}{\sim} b_{n-1}/b_n\,.$$

Покажем, что $a_k/a_{k+1} \underset{d}{\sim} b_{n-1}b_n$.

По предположению имеем

$$a_k/a_{k+1} \underset{d}{\sim} u/v \overset{d}{\sim} b_{n-1}/b_n\,.$$

Вычисляем

$$a_{k+1} \vee b_{n-1} = a_{k+1} \vee u \vee b_n = a_k b_n = a_k \vee a_n = a_k.$$

Остается еще показать, что

$$a_{k+1} \wedge b_{n-1} = b_n\,.$$

Вычисляем

$$a_{k+1} \wedge b_{n-1} = a_{k+1} \wedge (u \vee b_n).$$

Используя модулярность, получим

$$a_{k+1} \wedge (u \vee b_n) = (a_{k+1} \wedge u) \vee b_n = v \vee b_n\,,$$

но $v \leq b$, поэтому $a_{k+1} \wedge b_{n-1} = v \vee b_n = b_n$.

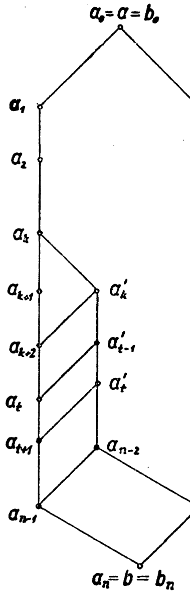

Рис. 1.

Теперь возможны два случая:

а) $k = n - 1$

$$a_{n-1}/a_n \underset{d}{\sim} b_{n-1}/b_n$$

$a_{n-1} = a_n \vee b_{n-1} = b_{n-1}$ поэтому $a_{n-1} = b_{n-1}$, цепи имеют в основном длину $n - 1$ и теорема справедлива, ибо

$$a_{n-1}/a_n \overset{j}{\sim} b_{n-1}/b_n\,.$$

Перейдем теперь ко второму случаю:

б) $k < n - 1$.

Доказательство проведем по схеме (рис. 1.)

Очевидно, имеет место $a'_{t-1}/a'_t \underset{d}{\sim} a_t/a_{t+1}$.

Рассмотрим цепь длины $n - 1$:

$$a = a_0 > a_1 > \dots > a_k > a'_{k+1} > \dots > a'_{n-2} > b_{n-1}\,,$$

$$a = b_0 > b_1 > \dots > b_{n-1}\,,$$

при этом будет

$$a'_{t+1}/a'_t \underset{d}{\sim} a_t/a_{t+1}$$

и также

$$a_t/a_{t+1} \underset{j}{\sim} b_l/b_{l+1}\,, \quad l = f(t)\,;$$

следовательно,

$$a'_{t+1}/a'_t \underset{d}{\sim} a_t/a_{t+1} \underset{j}{\sim} b_l/b_{l+1}\,,$$

откуда

$$a'_{t-1}/a'_t \underset{j}{\sim} b_l/b_{l+1}\,.$$

Итак, рассматриваемые цепи будут, очевидно, снизу просто подобными и длины $n-1$, поэтому в наших соотношениях можно заменить $\underset{j}{\sim}$ знаком $\overset{j}{\sim}$ и мы получим

$$a'_{t-1}/a'_t \overset{j}{\sim} b_l/b_{l+1}\,,$$

однако,

$$a_t/a_{t+1} \overset{d}{\sim} a'_{t-1}/a_t \overset{j}{\sim} b_l/b_{l+1}$$

откуда

$$a_t/a_{t+1} \overset{j}{\sim} b_l/b_{l+1}\,,$$

что имеет место при любом t, для которого $k+1 \leq t \leq n$.

При t, для которого $0 \leq t < k$, это имеет место в силу предположения индукции; наконец, при $t = k$ будет

$$a_k/a_{k+1} \underset{d}{\sim} b_{n-1}/b_n\,,$$

следовательно и

$$a_k/a_{k+1} \overset{j}{\sim} b_{n-1}/b_n\,.$$

Этим теорема доказана и для случая б).

Теперь мы уже без труда докажем основную теорему части 1.

Теорема 1,7. *(Для модулярной структуры.) Необходимое и достаточное условие для того, чтобы построение Цассенхауза не приводило к собственному уплотнению данных цепей, следующее:*

Цепи снизу просто подобны друг другу.

Доказательство. а) Нетрудно убедиться в том, что это условие необходимо. Возьмем две цепи

$$a = a_0 > a_1 > \ldots > a_r = b\,, \tag{1}$$

$$a = b_0 > b_1 > \ldots > b_s = b\,, \tag{2}$$

уплотнение Цассенхауза которых не является собственным.

Так как мы имеем дело с модулярной структурой, то справедливы приведенные в теореме 1,5 соотношения, откуда сразу же вытекает, что $r = s$ и цепи (1), (2) являются снизу просто подобными.

б) Достаточность условия следует из такого рассуждения:

Пусть цепи (1), (2) снизу просто подобны ($r = s = n$). Тогда по теореме 1,6 они будут также сверху просто подобны, причем с таким же соответствием квоциентов. Из теоремы 1,2 следует, что символ $\underset{j}{\sim}$ можно заменить $\underset{r}{\sim}$, что по теореме 1,4 означает, что построение Цассенхауза не может уплотнить цепей (1), (2).

Докажем еще одно следствие предыдущих теорем.

Теорема 1,8. *(Для модулярных структур.) Пусть даны две цепи*

$$a = a_0 > a_1 > \ldots > a_n = b\,, \tag{1}$$

$$a = b_0 > b_1 > \ldots > b_n = b\,. \tag{2}$$

Если существует подстановка f чисел $0, 1, 2, \ldots, n - 1$ так, что

$$a_i/a_{i+1} \underset{j}{\sim} b_j/b_{j+1}\,, \quad j = f(i)\,,$$

то она будет единственной подстановкой обладающей этим свойством.

Доказательство. По теоремам 1,6 и 1,2 можно $\underset{j}{\sim}$ заменить символом $\underset{r}{\sim}$. Если бы существовала еще иная подстановка f' того же свойства, то существовал бы индекс i так, что $f(i) \neq f'(i)$, и было бы

$$a_i/a_{i+1} \underset{r}{\sim} b_j/b_{j+1}\,, \quad j = f(i)\,,$$

$$a_i/a_{i+1} \underset{r}{\sim} b_{j'}/b_{j'+1}\,, \quad j' = f'(i)\,,$$

но это по теореме 1,3 невозможно.

Докажем еще одну теорему, являющуюся некоторым обобщением теоремы 1,8 на немодулярные структуры. Эта теорема пригодится нам для доказательства основной теоремы части 3.

Теорема 1,9. *Пусть даны две цепи*

$$a = a_0 > a_1 > \ldots > a_n = b\,,$$

$$a = b_0 > b_1 > \ldots > b_n = b\,.$$

Пусть существуют две подстановки f, g чисел $0, 1, 2, \ldots, n - 1$, так, что имеют место следующие две группы соотношений:

$$a_i/a_{i+1} \underset{r}{\sim} b_j/b_{j+1}\,, \quad j = f(i)\,,$$

$$a_i/a_{i+1} \underset{j}{\sim} b_l/b_{l+1}\,, \quad l = g(i)\,.$$

Тогда $f = g$.

Доказательство. Прежде всего из 1,3 видно, что должно быть l non $\geqq j + 1$, то есть $l < j + 1$ или $l \leq j$.

Докажем, что не может быть $l < j$, то есть что всегда $l = j$.

Рассмотрим подстановки

$$j = f(i);\ l = g(i);$$
$$i = f^{-1}(j);\ l = g\,.\,f^{-1}(j).$$

Разложим сложную подстановку $g\cdot f^{-1}$ в непересекающиеся циклы и исходя из предположения $l < j$ придем к противоречию.

Сложная подстановка $g\,.\,f^{-1}$ примет вид

$$g\,.\,f^{-1} = (X_1^1\,X_2^1 \ldots X_{k_1}^1) \ldots (X_1^p X_2^p \ldots X_{k_p}^p) \ldots (X_1^r X_2^r \ldots X_{k_r}^r).$$

Предположим, что $l < j$ и пусть j встречается в p-ом цикле. Тогда мы имеем

$$X_1^p \geq X_2^p \geq \ldots \geq j > l \geq \ldots \geq X_{k_p}^p\,,$$

следовательно,

$$X_1^p > X_{k_p}^p$$

но в то же время

$$X_{k_p}^p \geq X_1^p\,,$$

что является противоречием.

Следовательно, всегда будет $l = j$, а, значит, и $f = g$.

ЧАСТЬ 2.

Как мы уже показали, в модулярных структурах уплотнение Цассенхауза двух данных цепей является их уплотнением Шрейера.

Докажем, что это уплотнение будет минимальным. С этой целью выведем вспомогательные теоремы.

Теорема 2,1. *(Для модулярных структур.) Пусть даны две цепи*

$$a = a_0 > a_1 > \ldots > a_r = b\,, \tag{1}$$
$$a = b_0 > b_1 > \ldots > b_s = b\,. \tag{2}$$

Тогда имеет место

$$a_i/a_{i+1} \cap M = \{a_{i,j}\}_i\,,$$

где a_i/a_{i+1} означает множество всех x таких, что $a_i \geq x \geq a_{i+1}$, M означает подструктуру, образованную цепями (1), (2), $\{a_{i,j}\}_i$ означает множество всех элементов $a_{i,j}$ для фиксированного i и для $j = 0, 1, 2, \ldots, s$.

Доказательство. Пуст $m \in a_i/a_{i+1} \cap M$.
Тогда имеет место $m = m \vee a_{i+1} = (m \vee a_{i+1}) \vee a_i$.
По теореме, упомянутой в введении*) будет

$$m = (a_{i_1} \wedge b_{j_1}) \vee (a_{i_2} \wedge b_{j_2}) \vee \ldots \vee (a_{i_l} \wedge b_{j_l}).$$

*) См. *Birkhoff:* Lattice theory, стр. 71.

Высчитаем

$$m \vee a_{j+1} = m \vee (a_{j+1} \wedge b_0) = (a_{j_1} \wedge b_{j_1}) \vee (a_{i_2} \wedge b_{j_2}) \vee \ldots \vee (a_{i+1} \wedge b_0)\,,$$

где

$$a_{i_1} > a_{i_2} > a_{i_3} > \ldots > a_{i+1}\,,$$
$$b_{j_1} < b_{j_2} < b_{j_3} < \ldots < b_j < b_0\,.$$

Итак, наше выражение можно записать согласно тождеству, приведенному в Lattice theory (Birkhoff), в виде

$$a_{i_1} \wedge (b_{j_1} \vee a_{i_2}) \wedge \ldots \wedge (b_j \vee a_{i+1}) \wedge b_0,$$

где j непосредственно предшествует индексу 0. Получим теперь $(m \vee a_{i+1}) \wedge$ $\wedge = a_{i_1} \wedge (b_{j_1} \vee a_{i_2}) \wedge \ldots \wedge (b_j \vee a_{i+1}) \wedge b_0 \wedge a_i = (b_j \vee a_{i+1}) \wedge a_i$, и используя модулярность, получим $(b_j \vee a_{i+1}) \wedge a_i = a_{i+1} \vee (a_i \wedge b_j) = a_{i,j}$ а это значит, что

$$a_i/a_{i+1} \cap M \subseteq \{a_{i,j}\}_i\,.$$

Обратное утверждение очевидно, следовательно

$$a_i/a_{i+1} \cap M = \{a_{i,j}\}_i\,.$$

Из теоремы непосредственно вытекает, что квоциенты $a_{ij}/a_{i,j+1}$ будут или единичными (квоциентами) или простыми квоциентами в M, а цепи Цассенхауза будут максимальными в M.

Теперь не трудно доказать теорему:

Теорема 2,2. *(Для модулярных структур.) Пусть даны цепи*

$$a = a_0 > a_1 > \ldots > a_r = b\,, \tag{1}$$
$$a = b_0 > b_1 > \ldots > b_s = b \tag{2}$$

и пусть M означает образованную ими подструктуру.

Тогда необходимым и достаточным условием для того, чтобы (1), (2) *были максимальными в M, будет:*

$r = s = u$, цепи (1), (2) *снизу просто подобны.*

Доказательство. а) Необходимость условия видна непосредственно, ибо из теоремы 2,1 следует:

Если (1), (2) максимальны в M, то построение Цассенхауза не приводит к собственному уплотнению и согласно теореме 1,5 цепи (1), (2) будут снизу просто подобными.

б) Пусть $r = s = u$ и пусть цепи (1), (2) снизу просто подобны, следовательно, существует f так, что

$$a_i/a_{i+1} \underset{j}{\sim} b_j/b_{j+1}\,, \quad j = f(i)\,.$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots, -1.$$

Но по теореме 1,7 это значит, что построение Цассенхауза не приводит к собственному уплотнению. Следовательно, (1), (2) будут именно цепями Цассенхауза, а эти последние, согласно 2,1, максимальны в M, и теорема доказана.

Этой теоремой мы воспользуемся для доказательства важной теоремы, показывающей значение уплотнения Цассенхауза для модулярных структур.

Теорема 2.3. *(Для модулярных структур.) Пусть снова даны цепи*

$$a = a_0 > a_1 > \ldots > a_r = b\,, \tag{1}$$
$$a = b_0 > b_1 > \ldots > b_s = b\,, \tag{2}$$

Пусть уплотнение Цассенхауза имеет длину n.

Возьмем далее произвольное уплотнение Шрейера цепей (1), (2), *имеющее длину m.*

Тогда будет

$$n \leq m\,.$$

Доказательство. Пусть цепи

$$a = x_0 > x_1 > \ldots > x_m = b\,, \tag{3}$$
$$a = y_0 > y_1 > \ldots > y_m = b\,, \tag{4}$$

являются уплотнением Шрейера цепей (1), (2). Пусть далее M' — ими образованная подструктура. Очевидно, $M \subseteq M'$, где M — подструктура, образованная (1), (2).

По теореме 2,2 цепь (3) максимальна в M'; рассмотрим пару

$$a = a_{0,0} \geq a_{0,1} \geq a_{0,2} \geq \ldots \geq a_{i,j} \geq \ldots \geq a_{r,s} = b, \tag{3'}$$
$$a = x_0 > x_1 > \ldots > x_m = b\,. \tag{3}$$

Цепь (3′) будет типа Цассенхауза и после удаления повторяющихся членов она будет по предположению иметь длину n, вторая — длину m и будет максимальной в M'.

Так как M' — модулярна, будет $n \leq m$, что и требовалось доказать.

Следствием является теорема:

Теорема 2,4. *(Для модулярных структур.) Уплотнение Цассенхауза цепей* (1), (2) *является их минимальным уплотнением Шрейера.*

Доказательство. Если бы это уплотнение не было минимальным, то существовало бы уплотнение Шрейера, длина которого меньше n, что противоречит теореме 2,3.

Нужно еще ответить на вопрос, возможен ли такой случай, чтобы уплотнение Шрейера, отличное от уплотнения Цассенхауза, также имело длину n.

Проведем построение примера в дистрибутивной структуре.

Рассмотрим множество P_0 всех неотрицательных действительных чисел.

P_0 является структурой по отношению к своему естественному упорядочению.

Образуем прямую сумму $P_0 + P_0$.

$P_0 + P_0$ является структурой, элементы которой суть пары чисел (x_1, x_2).

Операции $\vee$, $\wedge$ заданы здесь так:

$$(x_1, x_2) \vee (y_1, y_2) = (z_1, z_2)\ ,$$

$$z_1 = \max(x_1, y_1),\ z_2 = \max(x_2, y_2),$$

$$(x_1, x_2) \wedge (y_1, y_2) = (n_1, n_2)\ ,$$

$$n_1 = \min(x_1, y_1);\ \ n_2 = \min(x_2, y_2).$$

Изобразим структуру в виде множества точек первого квадранта: (рис. 2).

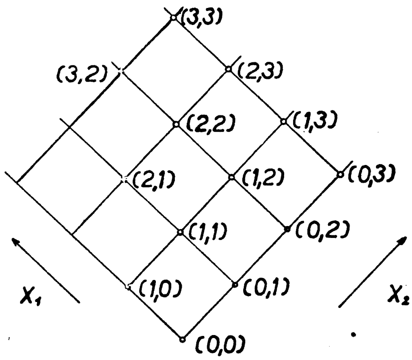

Рис. 2.

Рассмотрим цепи

$$(3,3) > (2,3) > (1,3) > (0,3) > \\ > (0,2) > (0,1) > (0,0) \dots \quad (1)$$

$$(3,3) > (2,2) > (1,1) > (0,0). \quad (2)$$

Построением Цассенхауза мы получим цепи

$$(3,3) > (2,3) > (1,3) > (0,3) > (0,2) > (0,1) > (0,0)\ , \qquad (1)$$

$$(3,3) > (2,3) > (2,2) > (1,2) > (1,1) > (0,1) > (0,0)\ . \qquad (3)$$

Рассмотрим пару цепей

$$(3,3) > (2,3) > (1,3) > (0,3) > (0,2) > (0,1) > (0,0)\ , \qquad (1)$$

$$(3,3) > (3,2) > (2,2) > (2,1) > (1,1) > (1,0) > (0,1)\ . \qquad 4)$$

Цепи (1), (4) являются уплотнением Шрейера цепей (1), (2) и имеют ту же длину, как и цепи Цассенхауза (1), (3), и именно 6.

Паре (1), (3) соответствует подстановка

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

и паре (1), (4) подстановка

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Совокупность точек схемы, обозначенных кружками, составляет подструктуру M, образованную цепями (1), (2).

Ясно, что (1), (3) лежат в M, и (1), (4) в нем не лежат.

Докажем, что вообще имеет место

Теорема 2,5. *(Для модулярных структур.) Пусть даны цепи*

$$a = a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_r = b \,, \tag{1}$$
$$a = b_0 > b_1 > b_2 > \ldots > b_s = b \,, \tag{2}$$

и пусть M означает подструктуру, образованную этими цепями.

Тогда имеет место следующее утверждение:

Уплотнение Цассенхауза является единственным уплотнением Шрейера цепей (1), (2), *лежащим в M.*

Доказательство. Пусть дано произвольное уплотнение Шрейера цепей (1), (2), лежащее в M:

$$a = x_0 > x_1 > \ldots > x_m = b \,, \tag{3}$$
$$a = y_0 > y_1 > \ldots > y_m = b \,, \tag{4}$$

и обозначим через M' подструктуру, образованную цепями (3), (4). Очевидно будет $M' = M$.

По теореме 2,2 цепь (3) будет максимальной в M' и, следовательно, и в M.·Цепь (3) содержит (1) и максимальна в M. По теореме 2,1 такая цепь будет единственной, а именно типа Цассенхауза $\{a_{i,j}\}$; значит цепь (3) тождественна с ним, так же как и (4) $\equiv \{b_{k,l}\}$.

Этим теорема доказана.

ЧАСТЬ 3.

В первой части мы доказали теорему, справедливую для модулярных структур:

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы построение Цассенхауза не привело к собственному уплотнению данных цепей, имеет вид: Данные цепи являются снизу просто подобными.

В третьей части мы покажем, что аналогичная теорема справедлива для нормальных цепей в структуре подгрупп данной группы с композиционным рядом.

Теперь мы выведем вспомогательные теоремы и будем ссылаться на доказанные в первой части теоремы, ибо теоремы 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; а 1,9 справедливы и в немодулярных структурах.

Теорема 3,1. *Пусть даны две цепи, в общем случае, с различными началами и концами:*

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n \,,$$
$$b_1 > b_2 > b_3 > \ldots > b_n \,,$$

и пусть существует подстановка g, чисел $1, 2, 3, \ldots, n-1$ так, что

$$a_i/a_{i+1} \underset{r}{\sim} b_j/b_{j+1}, \quad j = g(i)$$

Тогда имеет место

$$a_1/a_n \underset{r}{\sim} b_1/b_n .$$

Доказательство. Достаточно показать, что имеет место

$$a_1/a_n \underset{d}{\sim} a_1 \wedge b_1/a_n \wedge b_n .$$

Докажем, что для любого r, $n > r \geq 1$ справедливо соотношение

$$a_{r+1} \vee (a_1 \wedge b_1) = a_r \vee (a_1 \wedge b_1) .$$

Получим:

$$a_{r+1} \vee (a_1 \wedge b_1) = a_{r+1} \vee (a_r \wedge b_{g(r)}) \vee (a_1 \wedge b_1) ,$$

ибо

$$a_r \wedge b_{g(r)} \leq a_1 \vee b_1 ;$$

однако,

$$a_{r+1} \vee (a_r \wedge b_{g(r)}) = a_r ,$$

следовательно,

$$a_{r+1} \vee (a_1 \wedge b_1) = a_r \vee (a_1 \wedge b_1) .$$

Пусть уже доказано, что

$$a_n \vee (a_1 \wedge b_1) = a_{[n-(t-1)]} \vee (a_1 \wedge b_1).$$

Для $r = n - 1$ имеем

$$a_n \vee (a_1 \wedge b_1) = a_{n-1} \vee (a_1 \wedge b_1) .$$

По предыдущему имеет место

$$a_n \vee (a_1 \wedge b_1) = a_{n-t} \vee (a_1 \wedge b_1).$$

Для $t = n - 1$ имеем

$$a_n \vee (a_1 \wedge b_1) = a_{[n-(n-1)]} \vee (a_1 \wedge b_1) = a_1 \vee (a_1 \wedge b_1) = a_1 .$$

Подобной индукцией пы докажем, что

$$a_n \wedge (a_1 \wedge b_1) = a_n \wedge b_n .$$

Получим:

$$a_n \wedge (a_1 \wedge b_1) = a_n \wedge b_1 .$$

Докажем, что имеет место

$$a_n \wedge b_r = a_n \wedge b_{r+1} \quad \text{для } 1 \leq r < n .$$

$$a_n \wedge b_r = a_n \wedge a_l \wedge b_r ,$$

где

$$a_{l-1}/a_l \underset{r}{\sim} b_r/b_{r+1} , \quad r = g(l - 1) .$$

Очевидно, имеет место

$$a_{l-1} \wedge b_{r+1} = a_l \wedge b_r$$

следовательно

$$a_n \wedge a_l \wedge b_r = a_n \wedge a_{l-1} \wedge b_{r+1} = a_n \wedge b_{r+1} .$$

Для $r = 1$ имеем $a_n \wedge b_1 = a_n \wedge b_2$.

Предположим, что уже умеет место $a_n \wedge b_1 = a_n \wedge b_{t-1}$ тогда по предыдущему будет $a_n \wedge b_1 = a_n \wedge b_t$. Итак, это имеет место для всех t, и для $t = n$ мы получим $a_n \wedge b_1 = a_n \wedge b_n$, что и требовалось доказать.

В дальнейшем нам понадобятся две вспомогательные теоремы из теории групп.

Введем обозначения:

G — данная группа,
G_i, H_i, X, Y — подгруппы в G,
$X_1\, n\, X_2$ — X_2 нормальна в X_1,
$|X_1/X_2|$ — фактор-группа,
$X_1\, p\, X_2$ — X_2 максимальная нормальная подгруппа в X_1.

Очевидно, имеет место

$$X_1\, p\, X_2 \Leftrightarrow |X_1/X_2|$$

простая фактор-группа.

В теории групп доказывается теорема:

Теорема 3,2. *Пусть G группа, X, H_1, H_2 подгруппы и кроме того $H_1\, n\, H_2$. Тогда имеет место*

$$H_2 \vee (H_1 \wedge X) = H_1 \wedge H_2 \,.\, X ,$$

где символы $\vee$; $\wedge$ имеют известное нам значение, а символ . означает умножение комплексов.

Доказательство: а) Пусть $m \in H_2 \vee (H_1 \wedge X)$, следовательно, $m = h_2 \,.\, h_1$, $h_1 \in X$, откуда $h_1 = x$, $m = h_2 \,.\, x$, $m \in H_1$; $m \in H_2 \,.\, X$, следовательно, $m \in H_1 \wedge H_2 \,.\, X$.

б) Пусть, наоборот, имеет место $m \in H_1 \wedge H_2 \,.\, X$, тогда $m = h_2 \,.\, x$, где $h_2 \in H_2$, $X \in X$, и должно иметь место $h_2 \,.\, X \in H_1$, откуда $h_2 \,.\, x = h_1$, где $h_1 \in H_1$, следовательно, $x = h_2^{-1} \,.\, h_1 \in H_1$ и имеет место $x \in H_1 \wedge X$, откуда следует

$$h_2 \,.\, x \in H_2 \vee (H_1 \wedge X) .$$

Теорема 3,3. *Пусть $G_1\, n\, G_2$ и пусть имеет место $G_1/G_2 \underset{d}{\sim} U_1/U_2$; пусть, наконец, $X_1\, n\, X_2$, так что $G_1 \geq X_1\, n\, X_2 \geq G_2$ и отобразим регулярно вниз:*

$$Y_1 = X_1 \wedge U_1; \quad Y_2 = X_2 \wedge U_1$$

Тогда имеет место

$$X_1/X_2 \underset{d}{\sim} Y_1/Y_2 .$$

Доказательство. По теореме 3,2:

$$X_2 \vee Y_1 = X_2 \vee (X_1 \wedge U_1) = X_1 \wedge X_2 \,.\, U_1.$$

Однако,

$$G_2 \,.\, U_1 = G_1;\ G_2 \leq X_2,$$

а следовательно,

$$X_2 \,.\, U_1 = G_1,$$

значит,

$$X_1 \wedge X_2 \,.\, U_1 = X_1 \wedge G_1 = X_1.$$

Остается показать, что $X_2 \wedge Y_1 = Y_2$, что можно видеть непосредственно:

$$X_2 \wedge Y_1 = X_2 \wedge X_1 \wedge U_1 = X_2 \wedge U_1 = Y_2\,.$$

Теперь приступим к доказательству основной теоремы третьей части

Теорема 3,4. *(Для групп с композиционным рядом.) Пусть дана группа с композиционным рядом. Тогда в ней справедлива теорема:*

Необходимое и достаточное иусловие для того, чтобы построение Цассенхауза не привело к собственному уплотнению данных двух нормальных цепей, следующее:

Нормальные цепи снизу просто подобны.

Доказательство. Ввиду справедливости соотношения, приведенного в теореме 1,5,

$$G_{i,j}/G_{i,j+1} \underset{d}{\sim} G_i \wedge H_j/(G_i \wedge H_{j+1}) \wedge (G_{i+1} \wedge H_j) \overset{d}{\sim} H_{j,i}/H_{j,i+1}\,,$$

где G_i, H_i образуют данные нормальные цепи, условие будет, очевидно, необходимым.

Докажем его достаточность:

Пусть даны две нормальные цепи

$$G = G_0 > G_1 > \ldots > G_n = I\,, \qquad (1)$$

$$G = H_0 > H_1 > \ldots > H_n = I\,, \qquad (2)$$

где I единичная подгруппа.

Пусть далее, цепи (1), (2) снизу просто подобны, другими словами, существует подстановка f чисел $0, 1, 2, \ldots, n - 1$ так, что имеет место

$$G_i/G_{i+1} \underset{j}{\sim} H_j/H_{j+1}\,, \quad j = f(i)\,.$$

Соответствующие промежуточные члены обозначим через

$$U_i/V_i\,.$$

Вложим в цепи (1), (2) композиционные ряды

$$G = X_0 > X_1 > \ldots > X_m = I\,, \qquad (3)$$

$$G = Y_0 > Y_1 > \ldots > Y_m = I\,. \qquad (4)$$

Существуют индексы

$$k_1, k_2, \ldots, k_n\,;$$
$$l_1, l_2, \ldots, l_n$$

так, что

$$G_i = X_{k_i};\quad H_i = Y_{l_i}\,.$$

Возьмем фиксированный индекс i и отобразим цепь

$$G_i = X_{k_i} > X_{k_i+11} > \ldots > X_{k_{(i+1)}} = G_{i+1} \tag{3i}$$

в квоциент U_i/V_i

$$G_i/G_{i+1} \underset{d}{\sim} U_i/V_i \overset{d}{\sim} H_j/H_{j+1}\,,\quad j = f(i)\,.$$

Мы получим цепь

$$U_i = X'_{k_i} > X'_{k_i+1} > \ldots > X' = V_i. \quad (3'_i)$$

Согласно теореме 3,2, имеет место

$$X_t/X_{t+1} \underset{d}{\sim} X'_t/X'_{t+1}$$

и по первой теореме об изоморфизме:

$$|X_t/X_{t+1}| \simeq |X'_t/X'_{t+1}|$$

однако, $|X_t/X_{t+1}|$ являются простыми, а следовательно, также $|X'_t/X'_{t+1}|$, и мы получим

$$X'_t\, p\, X'_{t+1}\,.$$

За ходом доказательства можно следить по схеме (рис. 3):

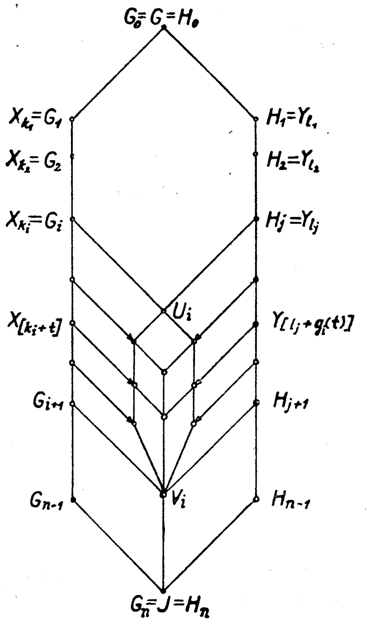

Рис. 3.

Вполне аналогичным образом построим цепь ($4i'$):

$$U_i = Y'_{l_j} > Y'_{l_j+1} > \ldots > Y'_{l_{(j+1)}} = V_i\,. \tag{4i'}$$

Рассмотрим две нормальные цепи в подгруппе U_i:

$$U_i = X'_{k_i} > X'_{k_i+1} > \ldots > V_i \geq I\,, \tag{$3\overline{i'}$}$$
$$U_i = Y'_{l_j} > Y'_{l_j+1} > \ldots > V_i \geq I\,. \tag{$4\overline{i'}$}$$

Нормальные цепи ($3\overline{i'}$), ($4\overline{i'}$) отличаются тем свойством, что построение Цассенхауза их не уплотняет, потому что эти цепи являются между U_i и V_i максимальными и между V_i и I совпадают.

По теореме 1,5 квоциенты цепей ($3\overline{i'}$), ($4\overline{i'}$) состоят во взаимно однозначном соответствии так, что соответствующие друг другу квоциенты связаны отношением $\underset{r}{\sim}$. По теореме 1,3 квоциент V_i/I, поскольку он вообще не является единичным, отображается сам на себя, а потому цепи ($3i'$), ($4i'$) обладают тем же свойством, как и ($\overline{3i'}$), ($\overline{4i'}$).

Итак, существует некоторая подстановка g_i, отображающая квоциенты цепи ($3i'$) на квоциенты цепи ($4i'$) так, что соответствующие друг другу квоциенты связаны соотношением $\underset{r}{\sim}$. По теореме 3,3 имеет место

$$X_{[k_i+t]}/X_{[k_i+t+1]} \underset{d}{\sim} X'_{[k_i+t]}/X'_{[k_i+t+1]}$$

и по предыдущему

$$X'_{[k_i+t]}/X'_{[k_i+t+1]} \underset{r}{\sim} Y'_{[l_j+g_i(t)]}/Y'_{[l_j+g_i(t)+1]}$$

согласно 3,3, будет снова

$$Y'_{[l_j+g_i(t)]}/Y'_{[l_j+g_i(t)+1]} \overset{d}{\sim} Y_{[l_j+g_i(t)]}/Y_{[l_j+g_i(t)+1]}$$

и следовательно,

$$X_{[k_i+1]}/X_{[k_i+t+1]} \underset{j}{\sim} Y_{[l_j+g_i(t)]}/Y_{[l_j+g_i(t)+1]} \; .$$

Подстановка g_i отображает, следовательно, квоциенты цепей ($3i$), ($4i$) друг на друга взаимно однозначно так, что соответствующие друг другу квоциенты связаны соотношением $\underset{j}{\sim}$.

Это справедливо для всех i и мы получаем таким образом систему подстановок $g_0, g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$ и каждая из них отображает некоторый сегмент композиционного ряда (3) на сегмент композиционного ряда (4); все вместе они определяют некоторую подстановку g чисел $1, 2, 3, \ldots, m$, отображающую квоциенты композиционного ряда (3) на квоциенты композиционного ряда (4) так, что соответствующие квоциенты находятся в отношении $\underset{j}{\sim}$.

С другой стороны композиционные ряды имеют то свойство, что построение Цассенхауза их не уплотняет, и следовательно, по теореме 1,5 существует подстановка G, отображающая квоциенты ряда (3) на квоциенты ряда (4) так, что взаимно соответствующие квоциенты состоят в соотношении $\underset{r}{\sim}$:

По теореме 1,9 мы имеем, однако, $G = g$, значит, все подстановки g_i имеют и то свойство, что отображают цепи ($3i$), ($4i$) так, что соответствующие квоциенты связаны соотношением $\underset{r}{\sim}$.

Однако, из теоремы 3,1 следует

$$G_i/G_{i+1} \underset{r}{\sim} H_j/H_{j+1}\,, \quad j = f(i)\,,$$

что по теореме 1,4 означает, что построение Цассенхауза не приводит к собственному уплотнению цепей (1), (2), что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Garrett Birkhoff:* Lattice theory. (American mathematical society. Colloquium publications. Volume XXV.)

[2] *Vladimir Kořinek:* Lattices in which the theorem of Jordan-Hölder is generally true. (Bulletin international de l'Académie tchèque des Sciences 1949, 2e Anné, IV° 23.)

[3] *Vladimir Kořinek:* Rozhovory o theorii grup a oborech příbuzných. Лекция, прочитанная в 1948/49 и 1949/50 гг. в математическом институте Чешской Академии Наук и Исскуств. (Не было опубликовано.)

[4] *Oystein Ore:* On the foundation of abstract algebra I. (Annals of mathematics, 2. ser. 36, 1935, 406—437.)

Summary

PROPERTIES OF THE ZASSENHAUS REFINEMENT

L. JANOŠ, Praha.

(Received June 18, 1952.)

The present paper is devoted to the study of the well-known Zassenhaus construction in lattices and groups. The main result of the first part is the following theorem: Let S be a modular lattice. Then the necessary and sufficient condition that the Zassenhaus refinement of two given chains is not a proper refinement is that the given chains be lower simply similar. In the second part we discuss another characteristic feature of Zassenhaus refinements.

We prove that the Zassenhaus refinement is the only Schreier refinement which lies in the sublattice generated by the elements of the given chains.

In the third part of the paper we prove a theorem for groups with composition series. This theorem is similar to the theorem on lattices mentioned above.