Václav Alda

О поверхностях без касательных плоскостей

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 3 (1953), No. 2, 154–157

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100079

Чехословацкий математический журнал, т. 3 (78) 1953

О ПОВЕРХНОСТЯХ БЕЗ КАСАТЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

ВАЦЛАВ АЛЬДА (Václav Alda), Прага.

(Поступило в редакцию 12/VI 1952 г.)

В статье исправляется ошибочное утверждение, приведенное в работе *Сакса* (*Saks:* „On the surfaces without tangent planes").

В своей работе „*On the surfaces without tangent planes*", Ann. of Math. (2), **34** (1933), 114—124,[1]) *Сакс* ввел пространство U непрерывных функций точек единичного квадрата K_0 которые удовлетворяют еще и другим ограничивающим условиям цитированной статьи.[2]) Это пространство является при введенной в нем норме пространством Банаха, и Сакс доказывает при помощи теоремы Бэра, что поверхности, определенные функциями без касательной плоскости в каждой внутренней точке K_0, образуют в пространстве U резидуальное подмножество.

При доказательстве Сакс пользуется, между прочим, следующим утверждением:

Множество U_2 функций $z = u(x, y)$ в пространстве U, для которых в каждой внутренней точке (x, y) квадрата K_0 имеет место

$$\varlimsup_{t \to 0} \left| \frac{1}{t} [u(x + t\cos\vartheta, y + t\sin\vartheta) - u(x, y)] \right| < \infty$$

для всех ϑ за исключением множества не выше первой категории, образует в пространстве U резидуальное подмножество.

При доказательстве этого утверждения Сакс поступает следующим образом. Разобьем квадрат K_0 для каждого n на n^2 одинаковых взаимно непересекающихся квадратов K_i^n $(i = 1, 2, \ldots, n^2)$ и внутри каждого квадрата K_i^n возьмем конечное число кругов C_{ij}^n $(j = 1, 2, \ldots, s_n)$ так, чтобы имело, между прочим, место

(S_1) для любой точки $(x_0, y_0) \in K_i^n$ и любого интервала $\langle\vartheta_1, \vartheta_2\rangle$,

[1]) Все определения и обозначения заимствованы из этой статьи.

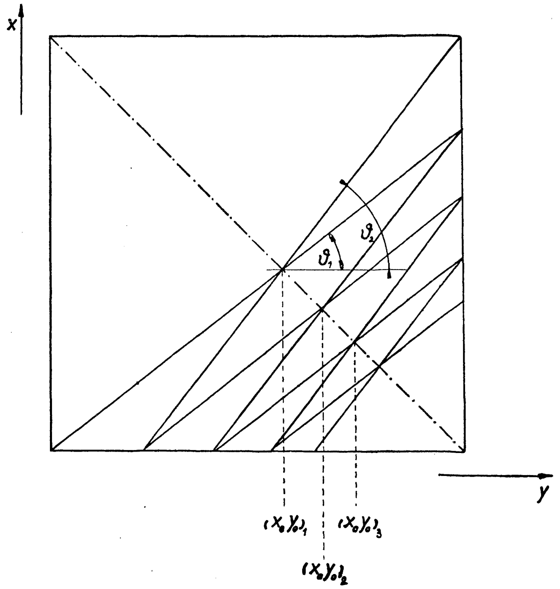
[2]) В условии B (стр. 116) должен быть квадрат K вместо прямоугольника K.

$-\frac{1}{2}\pi \leqq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leqq \frac{1}{2}\pi$, $\vartheta_2 - \vartheta_1 \geqq n^{-1}$, существует такое j $(1 \leqq j \leqq s_n)$, что

$$\tan\vartheta_1 \leqq \frac{x - x_0}{y - y_0} \leqq \tan\vartheta_2$$

для любого $(x, y) \in C_{ij}^n$.

Но это условие невыполнимо, ибо, как видно из приложенного чертежа, можно построить последовательность точек (x_0, y_0) и последовательность



углов данной величины с вершинами в этих точках так, что углы не пересекаются друг с другом внутри квадрата K_i^n. Согласно (S_1) внутри каждого такого угла должен лежать хотя бы один круг C_{ij}^n. Следовательно, внутри квадрата K_i^n должно было бы лежать бесконечное число таких кругов, что противоречит первому требованию $s_n < \infty$, необходимому для хода данного Саксом доказательства.

Слегка видоизменив доказательство, можно, однако, доказать следующую *теорему:*

Пусть U_3 — множество тех $u \in U$, для которых почти во всех $(x, y) \in K_0$ имеет место

$$\varlimsup_{t \to 0+} \left| \frac{1}{t} \left[u(x + t\cos\vartheta,\ y + t\sin\vartheta) - u(x, y) \right] \right| < \infty$$

для всех ϑ за исключением множества не выше первой категории. Тогда U_3 будет резидуальным подмножеством в пространстве U.

Доказательство. Разобьем K_0 на n^2 одинаковых взаимно непересекающихся квадратов K_i^n $(i = 1, 2, \ldots, n^2)$. В каждом K_i^n построим концентрический квадрат $^*K_i^n$ со стороной $n^{-1} - n^{-3}$. Имеем $\mu(K_i^n - {}^*K_i^n) \leqq \leqq 2n^{-4}$ и, следовательно, $\mu('K^n) = \mu(\bigcup_i (K_i^n - {}^*K_i^n)) \leqq 2n^{-2}$; таким образом $\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n \geqq j} {}'K^n$ будет множеством меры 0.

Пусть A_n — множество тех функций $u \in U$, для которых имеется точка (x_0, y_0), $n^{-1} \leqq x_0$, $y_0 \leqq 1 - n^{-1}$, $(x_0, y_0) \in \bigcup_i {}^*K_i^n$ и интервал $\langle \vartheta_1, \vartheta_2 \rangle$, $-\pi \leqq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leqq \pi$, $\vartheta_2 - \vartheta_1 \geqq n^{-1}$ такие, что для всех $\vartheta \in \langle \vartheta_1, \vartheta_2 \rangle$ и всех t, $0 < t \leqq 2n^{-1}$ будет

$$\left| \frac{1}{t} [u(x_0 + t \cos\vartheta, \;\; y_0 + t \sin\vartheta) - u(x_0, y_0)] \right| \geqq 1. \tag{1}$$

Если u non $\in U_3$, то найдется такая внутренняя точка квадрата K_0, (x_0, y_0) non $\in \bigcap_j \bigcup_{n>j} {}'K^n$, что lim inf левой части неравенства (1) для $t \to 0+$ будет ∞, если ϑ элемент множества второй категории. При достаточно большом n должно быть $u \in A_n$ (рассуждение в общем совпадающее с доказательнстом теоремы 1 в статье Сакса). Итак, будет $u \in B_N = \bigcap_{n \geqq N} A_n$ для достаточно большого N. Отсюда следует $U - U_3 \subset \bigcup_N B_N$. Множества A_n замкнуты, поэтому достаточно доказать, что $U - B_N$ плотны.

Выберем $u \in U$. Обозначим $\sigma_n = \sup|u(x, y) - u(x', y')|$ для $|x - x'| \leqq \leqq n^{-1}$, $|y - y'| \leqq n^{-1}$. Разобьем теперь $K_i^n - {}^*K_i^n$ на конечное число неперекрывающихся квадратов Q_{ij}^n так, чтобы в каждом угле, большем чем n^{-1} и с вершиной в $^*K_i^n$, лежал один из этих квадратов Q_{ij}^n. Возможность такого построения следует из того, что такой угол, пересекая границу квадрата K_i^n образует отрезок величиной по меньшей мере $(2n)^{-1} (2n^3)^{-1} = = (4n^4)^{-1}$. В каждоп квадрате Q_{ij}^n построим круг C_{ij}^n так, чтобы

(P) каждая прямая пересекала не более двух кругов C_{ij}^n для $i = 1, 2, \ldots, n^2$, $j = 1, 2, \ldots$;

этого мы достигнем тогда, если выбранные нами центры не будут лежать по трех на одной прямой; тогда для каждой тройки этих центров можно найти круги, удовлетворяющие указанному выше условию (P). Тогда для того, чтобы удовлетворить условию (P) вообще достаточно наименьшего из всех возможных радиусов для всех возможных троек. В каждом круге C_{ij}^n построим два круговых конуса с непересекающимися основаниями $C_{ij}'^n$ и $C_{ij}''^n$ и с высотами соответственно σ_n и $-\sigma_n$. Определенную этими конусами и равную нулю вне их оснований функцию мы обозначим через w. Очевидно, $w \in U$ и $\|w\| \leqq 8\sigma_n$. Далее ясно, что все те значения, которые принимает u, а значит и $u + w$, в $^*K_i^n$, принимает функция

$u + w$ уже на $C'^n_{ij} \cup C''^n_{ij}$. Но из этого следует, что $u + w$ не лежит в A_n, ибо всегда найдутся такие $\vartheta \in \langle\vartheta_1, \vartheta_2\rangle$ и $t \in (0, 2n^{-1})$, что левая часть в (1) для функции $u + w$, будет равна нулю.

Выберем теперь $\varepsilon > 0$ и натуральное число N. Существует $n > N$ такое, что $8\sigma_n < \varepsilon$ и поэтому будет $\|u - (u + w)\| < \varepsilon$ и $u + w$ non $\in A_n \supset B_N$. Итак, множество $U - B_N$ будет действительно плотным.

Замечание. При доказательстве нам нигде не понадобилось, что функции из U удовлетворят условию B (Сакс, стр. 116).

Summary.

ON THE SURFACES WITHOUT TANGENT PLANES

Václav Alda, Praha.

(Received August 12, 1952.)

In his paper "On the surfaces without tangent planes", Ann. of Math. (2), **34** (1933), 114—124, Saks has given a demonstration for a theorem concerning the Baire category of the set U_2 (notation of Saks' paper) of surfaces in the linear normed space U. The demonstration is based on a geometric construction which is false.

In this paper a modified theorem (valid almost everywhere with a oneside limit) is demonstrated.