Štefan Schwarz

О максимальных идеалах в теории полугрупп, I

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 3 (1953), No. 2, 139–153

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100078`

Чехословацкий математический журнал, т. 3 (78) 1953

О МАКСИМАЛЬНЫХ ИДЕАЛАХ В ТЕОРИИ ПОЛУГРУПП, I

ШТЕФАН ШВАРЦ (Štefan Schwarz), Братислава.

(Поступило в редакцию 22/VII 1952 г.)

Максимальным идеалом данной полугруппы S мы называем отличный от S идеал, не содержащийся ни в каком другом идеале (того же рода) из S. Пусть S содержит лишь один максимальный левый идеал L^* (соотв. один максимальный правый идеал R^* или один максимальный двусторонний идеал M^*). Целью настоящей работы является изучение структуры множества $S — L^*$ (соотв. $S — R^*$, $S — M^*$). В статье доказываются некоторые теоремы, типичным примером которых является теорема 6а.

Под полугруппой мы подразумеваем непустое множество элементов S, между которыми определено ассоциативное умножение. Непустое подмножество $L \subseteqq S (R \subseteqq S)$ мы называем левым (правым) идеалом, если имеет место $SL \subseteqq L$ $(RS \subseteqq R)$. Двусторонним идеалом мы называем множество, являющееся одновременно левым и правым идеалом. Если существует элемент z, удовлетворяющий для любого $a \in S$ соотношению $az = za = z$, то мы называем этот элемент нулевым элементом. Нулевой элемент и вся полугруппа являются всегда двусторонними идеалами. Наконец, очевидно: сумма двух идеалов и пересечение двух идеалов (если оно непусто) представляет идеал того же рода.

При изучении колец (напр., алгебр Банаха с единицей) оказывается весьма полезным рассматриват некоторые типы максимальных идеалов данного кольца. Так в книге *Э. Хилле* (E. Hille), *Functional analysis and semigroups*, на стр. 480 и сл. дано несколько результатов, касающихся максимальных идеалов данной алгебры. Значительная часть этих результатов принадлежит советским математикам *Гельфанду*, *Наймарку* и *Шилову*.

Большинство результатов, справедливых для колец, не допускает, конечно, перенесения их на общие полугруппы, так как введенные в теории колец определения часто пользуются в значительной мере и сложением (т. е. второй операцией). Несмотря на это мы покажем, что основное понятие максимального идеала можно перенести и на полугруппы, и — что еще важнее — таким образом можно получить интересные результаты, касающиеся структуры полугрупп. Соответствующая проблематика требует, конечно, иной формулировки, чем в случае колец.

Насколько мне известно, до сих пор никто не занимался подробной разработкой понятия максимального идеала в полугруппах.*)

Интересно, что излагаемая в дальнейшем теория становится более общей, если ввести понятие антиидеала, введенное впервые не так давно *Ляпиным* [1], [2] при изучении гомоморфного отображения полугруппы на другую полугруппу. Это понятие будет в нашей работе обобщено.

Замечание. Символ $\subset$ будет в дальнейшем всегда означать (в отличие от символа $\subseteqq$), что речь идет о собственном подмножестве. Знаки $+, \sum$ или $\{\ \ldots\}$ означают обычное соединение (сумму множеств). Остальные обозначения применяются в обычном смысле.

1.

Определение 1. *Идеал* (*правый*, *левый*, *двусторонний*) *полугруппы* S *мы называем максимальным, если он не равен* S, *но не является собственным подмножеством никакого иного* (*правого*, *левого*, *двустороннего*) *идеала полугруппы* S.

Может, конечно, случиться, что максимальный двусторонний идеал будет собственным подмножеством более широкого левого или правого идеала, отличного от S. Аналогично, может случиться, что максимальный левый идеал будет собственным подмножеством более широкого правого идеала, отличного от S, или, наоборот, максимальный правый идеал будет собственным подмножеством какого-либо максимального левого идеала. Но, конечно, не может случиться, чтобы какой-нибудь максимальный левый идеал был собственным подмножеством некоторого максимального двустороннего идеала. И нулевой идеал может быть максимальным двусторонним идеалом.

На простых примерах можно убедиться, что не каждый элемент данной полугруппы должен лежать в некотором максимальном идеале. Другими словами: не каждую полугруппу можно покрыть максимальными идеалами. Это подтверждается уже следующим примером:

Пример 1. Пусть S — полугруппа, элементами которой являются числа $\{0, 1, 2, \ldots, 11\}$, причем умножением является умножение чисел (mod 12). Главные идеалы имеют вид $(1) = S, (2) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}, (3) = \{0, 3, 6, 9\}$, $(4) = \{0, 4, 8\}$, $(6) = \{0, 6\}$. Отсюда видно, что существует единственный

*) (Замечание при корректуре). Недавно появилась работа *Н. Н. Воробьева* Об идеалах ассоциативных систем (ДАН, LXXXIII, 1952, 641—643), результаты которой стоят в связи с проблематикой настоящей статьи.

(двусторонний) максимальный идеал, а именно $(2) + (3) = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$ Элементы 1, 5, 7, 11 не содержатся ни в одном максимальном идеале [1]).

С другой стороны легко найти примеры полугрупп, которые можно покрыть максимальными идеалами. Вместо того, чтобы привести какой-либо частный случай, мы покажем способ построения одного из типов таких полугрупп, который можно легко обобщить (см. *Шварц* [3], *Ляпин* [1]).

Пример 2. Пусть даны две произвольные группы G_1 и G_2, не имеющие общего элемента. Присоединим к ним элемент z и определим в образованном таким образом множестве $S = \{z, G_1, G_2\}$ умножение, а именно: а) внутри G_1 и G_2 остается в силе установленная для этих групп операция умножения, б) пусть $z^2 = z$, в) далее, пусть $zG_1 = G_1z = zG_2 = G_2z = z$, г) наконец, если $a \in G_1$, $b \in G_2$, то пусть будет $ab = ba = z$.

Эта полугруппа имеет, очевидно, два и только два максимальных двусторонних идеала, а именно $I_1 = \{z, G_1\}$, $I_2 = \{z, G_2\}$. В сумме $I_1 + I_2$ они дают все множество S.

Ясно, что если бы мы взяли n групп $G_1, G_2, \ldots, G_n$, не имеющих общих элементов, и проделали аналогичное построение, то получилась бы полугруппа, имеющая в точности n максимальных двусторонних идеалов и покрытая ими.

Как показывает следующий пример, может случиться, что полугруппа имеет максимальные левые идеалы, но не имеет ни одного максимального правого и ни одного максимального двустороннего идеала.

Пример 3. Пусть полугруппа имеет три элемента e_1, e_2, e_3. Пусть умножение между ними определено следующим образом: $e_ie_k = e_k$, для любых $i, k = 1, 2, 3$. Очевидно, существуют три максимальных левых идеала, а именно $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, e_3\}$, $\{e_2, e_3\}$. Так как существует только один правый идеал, а именно само $S = \{e_1, e_2, e_3\}$, то в смысле нашего определения не существует ни одного максимального правого и ни одного максимального двустороннего идеала.

Наконец, покажем на почти тривиальном примере, что полугруппа может и вообще не содержать ни одного максимального идеала (даже когда идеалов имеется бесконечное количество).

Пример 4. Пусть S — аддитивная полугруппа всех вещественных положительных чисел. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству $x > \varepsilon$, будет, очевидно, (двусторонним) идеалом. Итак, существует несчетное множество идеалов, но ни один из них не является максимальным.

---

[1]) Нетрудно видеть, что множетсво $\{1, 5, 7, 11\}$ является группой с элементом 1 в качестве единичного элемента. (См. далее теорему 3.)

Зададим себе вопрос, что можно сказать о множестве всех максимальных левых (правых, двусторонних) идеалов.

В дальнейшем символ $L[R, M]$ с различными индексами всегда будет означать максимальный левый (правый, двусторонний) идеал.

Если полугруппу можно покрыть суммой ее максимальных левых идеалов, то мы будем писать $S = \sum\limits_{\alpha} L_\alpha$. Аналогичный смысл имеют обозначения $S = \sum\limits_{\alpha} R_\alpha$ и $S = \sum\limits_{\alpha} M_\alpha$.

Теорема 1а. *Пусть S имеет хоть один максимальный левый идеал. Если не имеет места $S = \sum\limits_{\alpha} L_\alpha$, то существует лишь один максимальный левый идеал. Мы его обозначим символом L^*.*

Доказательство. От противного. Пусть имеются два различных левых идеала L_1, L_2. Их сумма $L_1 + L_2$ будет снова левым идеалом. Если бы $L_1 + L_2 \subset S$, то ни L_1 ни L_2 не были бы максимальными левыми идеалами. Если бы, однако, имело место $L_1 + L_2 = S$, то S было бы покрыто максимальными левыми идеалами, что снова противоречит предположению.

В силу того же доказательства справедливы:

Теорема 1б. *Пусть S имеет хоть один максимальный правый идеал. Если не имеет места $S = \sum\limits_{\alpha} R_\alpha$, то существует лишь один максимальный правый идеал. Мы его обозначим символом R^*.*

Теорема 1в. *Пусть S имеет хоть один максимальный двусторонний идеал. Если не имеет места $S = \sum\limits_{\alpha} M_\alpha$, то существует лишь один максимальный двусторонний идеал. Мы его обозначим символом M^*.*

Замечание. Из доказательства видно, что если полугруппа S покрывается суммой своих максимальных левых идеалов, то для этого покрытия достаточно уже двух максимальных левых идеалов. Аналогично и для правых и двусторонних идеалов.

При изучении максимальных идеалов в кольцах важную роль играет существование единичного элемента. Такое условие мне кажется в случае полугрупп неестественным. Заменим его другим условием. Мы будем требовать, чтобы полугруппа не имела т. наз. антиидеала. Полугруппы с единицей являются частным случаем таких полугрупп.

Поэтому мы дадим в настоящем разделе еще несколько основных определений и фактов, касающихся этого понятия.

Определение 2. *Множество $\overline{L} \subset S$ мы называем левым антиидеалом полугруппы S, если $S\overline{L} \cap \overline{L} = \emptyset$.*[2]

[2]) Название оправдывается, очевидно, тем обстоятельством, что для левого идеала наступает как раз обратный ,,экстрем" — именно $S\overline{L} \cap \overline{L} \subseteqq \overline{L}$

Множетсво $\overline{R}$ мы называем правым антиидеалом полугруппы S, если $\overline{R}S \cap \overline{R} = \emptyset$.

Множество $\overline{M}$ мы называем двусторонним антиидеалом полугруппы S, если имеет место $\{S\overline{M}, \overline{M}S, S\overline{M}S\} \cap \overline{M} = \emptyset$.

Очевидно следующее: Если $\overline{L}(\overline{R}, \overline{M})$ — левый (правый, двусторонний) антиидеал, то и каждое подмножество $\overline{L}_1 \subseteqq \overline{L}$ ($\overline{R}_1 \subseteqq R$, $\overline{M}_1 \subseteqq \overline{M}$) будет левым (правым, двусторонним) антиидеалом. Далее видно: Необходимым и достаточным условием для того, чтобы S имело левый антиидеал, является существование хоть одного элемента $a \in S$, для которого $a \cap Sa = \emptyset$. В самом деле, если это условие выполнено, то элемент $\{a\}$ будет сам по себе левым антиидеалом. Необходимость условия следует непосредственно из определения.

Нетрудно привести примеры полугрупп, имеющих антиидеал. Если, например, $S^2 \subset S$, то $S - S^2$ будет, очевидно, двусторонним антиидеалом.[3]) Наоборот, нетрудно привести примеры полугрупп, не имеющих антиидеалов. Пусть, например, полугруппа имеет левую единицу, т. е. элемент e_l, удовлетворяющий для любого $a \in S$ соотношению $e_l a = a$. Тогда полугруппа не может иметь левого антиидеала, так как для любого $a \in S$ получим $a \cap Sa = e_l a \cap Sa = \{e_l a\} = \{a\} \neq \emptyset$. Аналогично полугруппа, имеющая единицу, не может иметь двустороннего антиидеала.

2.

В дальнейшем мы будем изучать полугруппы, которые содержат хоть один максимальный левый (правый, двусторонний) идеал и которые нельзя покрыть левыми (правыми, двусторонними) идеалами. О таких полугруппах мы будем вкратце говорить, что в них с у щ е с т в у е т L^* (R^*, M^*). Это, в частности, значит, что каждый левый (правый, двусторонний) идеал $\neq S$ содержится в L^* (R^*, M^*). Ибо, если бы существовал хотя бы один левый идеал l non $\subset L^*$, то множетсво $L^* + l$ являлось бы левым идеалом; итак, имело бы место соотношение $L^* + l = S$, что противоречит предположению. Для таких полугрупп можно в согласии с теоремами 1а, 1б, 1в написать

$$S = L^* + T_l, \quad L^* \cap T_l = \emptyset, \quad T_l \neq \emptyset;$$

$$S = R^* + T_r, \quad R^* \cap T_r = \emptyset, \quad T_r \neq \emptyset;$$

$$S = M^* + T, \quad M^* \cap T = \emptyset, \quad T \neq \emptyset.$$

---

[3]) Дело в том, что элементы $\in S - S^2$ вообще нельзя выразить в виде произведения двух элементов (они „неразложимы“), поэтому они не могут иметь вид $S \,.\, a$.

Прежде всего докажем

Теорему 2а. *Пусть в полугруппе S существует L^*. Пусть S не содержит левого антиидеала. Тогда T_l будет полугруппой.*

Доказательство. Пусть a есть произвольный элемент из T_l. Построим левый идеал $\{a, Sa\}$. Так как a нельзя покрыть максимальным левым идеалом, то должно быть $\{a, Sa\} = S$. Так как S не содержит левого антиидеала, имеем далее $a \cap Sa \neq \emptyset$, т. е. $a \in Sa$, откуда $Sa = S$. Если же, наоборот, a — произвольный элемент из L^*, то идеал $\{a, Sa\}$, т. е. наименьший идеал, содержащий элемент a, не может равняться S, так как $Sa \subseteqq SL^* \subseteqq L^* \subset S$. Итак, T_l является как раз множеством тех и только тех элементов $a \in S$, для которых имеет место $Sa = S$.

Пусть теперь a, b два элемента из T_l, т. е. $Sa = S$, $Sb = S$. Для элемента ab имеем $Sab = (Sa)\, b = Sb = S$, т. е. T_l содержит ab. Итак, T_l есть полугруппа, чтд.

Аналогично докажем

Теорему 2б. *Пусть в полугруппе существует R^*. Пусть S не содержит правого антиидеала. Тогда T_r будет полугруппой.*

Замечание. Строение полугруппы T_l в некоторых случаях можно описать еще подробнее.

Пусть $a \in T_l$. Рассмотрим идеал L^*a. Это левый идеал. Значит, будет или $L^*a \subseteqq L^*$ или $L^*a = S$. Обозначим через P множетсво тех $x \in T_l$, для которых имеет место $L^*x \subseteqq L^*$, а через Q множество тех $y \in T_l$, для которых $L^*y = S$. Множество P (если оно не пусто) является полугруппой. Ибо, если $x_1 \in P$, $x_2 \in P$, т. е. $L^*x_1 \subseteqq L^*$, $L^*x_2 \subseteqq L^*$, то будет и $L^*x_1x_2 \subseteqq \subseteqq L^*x_2 \subseteqq L^*$, т. е. $x_1x_2 \in P$. Аналогично множество Q (если оно не пусто) будет полугруппой. Ибо если $y_1 \in Q$, $y_2 \in Q$, т. е. $L^*y_1 = S$, $L^*y_2 = S$, то будет и $L^*y_1y_2 = Sy_2 \supseteqq L^*y_2 = S$, т. е. $L^*y_1y_2 = S$, откуда $y_1y_2 \in Q$. Итак, если $P \neq \emptyset$, $Q \neq \emptyset$, можно записать T_l в виде суммы двух непересекающихся полугрупп $T_l = P + Q$, $P \cap Q = \emptyset$.

Для множества T докажем теорему, аналогичную теоремам 2а, б, только для специальных типов полугрупп, но зато сразу же со значительно более сильным результатом.

Определение 3. (*Хилле* [1], стр. 481.) *Полугруппу мы называем двусторонней, если каждый ее идеал является двусторонним.*

Коммутативные полугруппы представляют собой, очевидно, частный случай таких полугрупп.

Теорема 3. *Пусть S есть двусторонняя полугруппа, в которой существует M^*. Пусть S не имеет ни левого, ни правого антиидеала. Тогда T является группой.*

Доказательство. а) Прежде всего докажем, что T есть полугруппа. Выберем произвольный элемент $a \in T$ и рассмотрим идеал $I = \{a, Sa, aS, SaS\}$. Так как a не содержится ни в одном максимальном идеале, то $I = S$. Так как S не содержит ни правого ни левого антиидеала, будет $a \in Sa$, $a \in aS$. Так как далее по предположению Sa является не только левым, но и правым идеалом, получаем $(Sa)\, S \subseteq Sa$. Аналогично будет $S(aS) \subseteq aS$. Уравнение $S = (a, Sa, aS, SaS)$ можно поэтому записать и в таком виде: $S = (aS, Sa)$. Оба (двусторонних) идеала aS, Sa содержат a. Значит, они оба равны S.

Обратно, если $a \in M^*$, покажем, что ни один из (двусторонних) идеалов aS, Sa не может равняться S. Так как S не содержит антиидеала, то a опять принадлежит Sa и aS. Так как a входит в Sa, соотношение $Sa = S$ означало бы, что наименьшим (двусторонним) идеалом, содержащим a, является все S. Это противоречит выбору $a \in M^*$. Аналогично и в случае $aS = S$.

Итак, T будет как раз множеством тех и только тех элементов $a \in S$, для которых одновременно справедливы оба соотношения $aS = S$, $Sa = S$.

Возьмем теперь два элемента $a, b \in T$. Покажем, что и ab входит в T. По предположению $Sa = aS = bS = Sb = S$. Высчитаем идеалы Sab, abS. Получим $Sab = (Sa)\, b = Sb = S$; аналогично $abS = S$. Итак $ab \in T$; T является полугруппой.

б) Уравнения $Sa = S$, $aS = S$ выглядят в раскрытом виде так: для любого $a \in T$ имеет место

$$(M^* + T)\, a = M^* + T\,, \tag{1}$$

$$a(M^* + T) = M^* + T\,. \tag{2}$$

Так как $M^*a \subseteq M^*$, $aM^* \subseteq M^*$ для каждого $a \in S$ (а, значит, и $a \in T$) и так как оба слагаемых в правой части уравнений (1) и (2) не имеют общих элементов, то $T \subseteq Ta$, $T \subseteq aT$ для любого $a \in T$. Отсюда, в частности, имеем $T \subseteq Ta \subseteq T^2$. Но T — полугруппа, т. е. $T^2 \subseteq T$. Следовательно $T = Ta = T^2$. Аналогично $T = aT = T^2$.

Уравнения $aT = T$, $Ta = T$ имеют следующий смысл: для каждой пары $a, b \in T$ существуют элементы $x, y \in T$ такие, что имеет место $ax = b$, $ya = b$. Из основ аксиоматики алгебры известно, что полугруппа такого свойства является группой. Теорема 3 доказана.

Замечание. Собрав все сделанные нами предположения, мы можем сформулировать теорему 3 более пространно:

Теорема 3′. *Пусть S — двусторонняя полугруппа, содержащая хоть один максимальный идеал. Пусть S не содержит ни левого, ни правого антиидеала. Тогда*

а) или S является суммой своих идеалов $\neq S$, *б) или можно написать $S = M^* + T$, $M^* \cap T = \emptyset$, где M^* есть единственный существующий максимальный идеал, а T есть группа.*

Следствие 3. *Пусть S — коммутативная полугруппа с единицей e, имеющая хоть один максимальный идеал. Тогда можно написать $S = M^* + T$, $M^* \cap T = \emptyset$, где M^* является единственным максимальным идеалом, а T группой, единичный элемент которой есть e.*

Доказательство. Если S имеет единицу e, то T наверно не будет пустой, ибо e не может входить ни в один идеал $\neq S$. Так как, далее, группа может содержать только один идемпотент, e будет, очевидно, единичным элементом группы T.

3.

В одном важном случае можно ближе охарактеризовать строение полугрупп T_l и T_r. Именно в том случае, когда $L^*(R^*)$ является двусторонним идеалом данной полугруппы.

Прежде всего введем следующее

Определение 4. *Полугруппу S мы называем слева простой, если уравнение $xa = b$ имеет решение $x \in S$ для каждой пары $a, b \in S$.*

Полугруппу S мы называем справа простой, если уравнение $ay = b$ имеет решение $y \in S$ для каждой пары $a, b \in S$.[4])

Теорема 4а. *Пусть в полугруппе S существует L^*. Пусть S не содержит левого антиидеала. Пусть L^* будет одновременно двусторонним идеалом полугруппы S. Тогда $S = L^* + T_l$, $L^* \cap T_l = \emptyset$, где T_l есть слева простая полугруппа.*

Доказательство. Напишем $S = L^* + T_l$, $T_l \neq \emptyset$. Пусть a есть произвольный элемент из T_l. По теореме 2а $Sa = S$. Следовательно

$$(L^* + T_l)\,a = L^* + T_l\,,$$

$$L^*a + T_la = L^* + T_l\,.$$

Так как по предположению $L^*a \subseteqq L^*$, то будет обязательно $T_l \subseteqq T_la$, т. е. $T_l \subseteqq T_l^2$. Но так как T_l — полугруппа, будет $T_l^2 \subseteqq T_l$. Итак, мы получим $T_l = T_la$.

Это значит: полугруппа T_l такова, что уравнение $b = xa$ имеет в ней решение для каждой пары $a, b \in T_l$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 4а не утверждает, конечно, что уравнение $xa = b$ имеет однозначное решение.

---

[4]) Полугруппа, простая слева и одновременно справа будет, очевидно, группой.

Аналогично докажем

Теорему 4б. *Пусть полугруппа S имеет идеал R^*. Пусть S не имеет правого антиидеала. Пусть R^* будет в то же время двусторонним идеалом полугруппы S. Тогда получим $S = R^* + T_r$, $R^* \cap T_r = \emptyset$, где T_r — справа простая полугруппа.*

Замечание. Легко доказать, что для того, чтобы полугруппу S можно было запииать в виде $S = \mathfrak{l} + \mathfrak{t}, \mathfrak{l} \cap \mathfrak{t} = \emptyset$, где $\mathfrak{l}$ — левый идеал, а $\mathfrak{t}$ должно быть слева простой полугруппой, необходимо, чтобы $\mathfrak{l}$ было максимальным левым идеалом.

Доказательство. Предположим, что $S = \mathfrak{l} + \mathfrak{t}, \mathfrak{l} \cap \mathfrak{t} = \emptyset$ и $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{l}_1 \subset S$, где $\mathfrak{l}_1$ — левый идеал. Выберем элемент $a \in \mathfrak{t} \cap \mathfrak{l}_1 = (S - \mathfrak{l}) \cap \mathfrak{l}_1$ и элемент $b \in S - \mathfrak{l}_1 \subset \mathfrak{t}$. В силу предположения такие элементы a, b существуют. Уравнение $xa = b$ не может иметь решения для $x \in \mathfrak{t}$ (и даже для $x \in S$), так как для любого $x \in S$ имеет место $x\,a \in Sa \subseteqq S\mathfrak{l}_1 \subseteqq \mathfrak{l}_1$. Следовательно, $xa \neq b$ для любого $x \in S$. Предположение о существовании $\mathfrak{l}_1$ приводит к противоречию.[5])

4.

Возникает вопрос, существуют ли такие типы полуѓрупп, в которых L^* (или R^*) является в то же время двусторонним идеалом. Оказывается, что к этому типу полуѓрупп принадлежат все конечные полугруппы и вообще все т. наз. периодические полуѓруппы. (Кроме того, конечно, все двусторонние полугруппы-случай, который мы разобрали уже в теореме 3.)

Ясно, что L^* будет двусторонним идеалом тогда и только тогда, если полугруппа Q, приведенная в замечании за теоремой 2, пуста.

Мне не удалось найти пример полуѓруппы, в которой существовало бы L^*s не являясь двусторонним идеалом (т. е. случай $Q \neq \emptyset$). Существование таких полуѓрупп мне представляется все же весьма вероятным.

Определение 5. *Мы скажем, что полугруппа S будет периодической полугруппой, если для каждого $a \in S$ в последовательности*

$$a, a^2, a^3, \ldots$$

имеется только конечное число различных элементов.

Известно, что в такой полугруппе для любого элемента существует

---

[5]) Предположение, что L максимально, само по себе недостаточно даже в коммутативном случае. Пусть напр. S будет множеством положительных четных чисел $S = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$. Пусть умножением является обычное умножение чисел. Единственным максимальным идеалом будет $L^* = M^* = \{4, 6, 8, \ldots\}$. Множество $T = \{2\}$ не будет, очевидно, группой. (Это отнюдь не противоречит теореме 4, так как наша полугруппа содержит антиидеалы. Больше того, каждый ее элемент содержится в каком-либо антиидеале.)

такое натуральное число ϱ, что $a^\varrho = e$, где e — идемпотент. (См. напр. *Шварц* [1]).

Теорема 5а. *Пусть S — периодическая полугруппа. Пусть в S существует идеал L^*. Тогда L^* будет и двусторонним идеалом полугруппы S.*

Доказательство. Достаточно доказать, что L^* будет также правым идеалом, т. е. для любого $s \in S$ будет $L^*s \subseteqq L^*$. Множество L^*s является левым идеалом полугруппы S. Следовательно, будет или $L^*s \subseteqq L^*$ или $L^*s = S$. Мы покажем, что вторая альтернатива невозможна.

Если бы имело место $L^*s = S$, то было бы тем более $Ss = S$. Из этого уравнения далее следовало бы

$$S = Ss = Ss^2 = Ss^3 = \ldots = Ss^n = \ldots$$

Так как S — периодическая полугруппа, то существует такое $\varrho > 0$, что $s^\varrho = e$ будет идемпотентом. Тогда было бы $S = Se$, где e — идемпотент. Отсюда видно, что e является правой единицей для каждого элемента из S.

Теперь мы рассуждаем так: Если бы было $L^*s = S$, имело бы место

$$L^*s^2 = Ss = S,\ L^*s^3 = S, \ldots, L^*s^\varrho = S\,,$$

т. е. $L^*e = S$. Однако, так как e является правой единицей для каждого элемента из S, должно быть $L^*e = L^*$. Итак, мы получили бы $L^* = S$, что противоречит основному предположению. Теорема 5а доказана.

Теорема 5б. *Пусть S — периодическая полугруппа. Пусть в S существует R^*. Тогда R^* будет и двусторонним идеалом в S.*

Замечание. Если S — конечная полугруппа, имеющая m элементов, то можно применить более простую аргументацию, а именно: Пусть максимальный левый идеал L^* имеет n элементов. Ясно, что $n < m$. Идеал L^*s не может равняться S, так как L^*s имеет не больше n различных элементов. Итак, должно быть $L^*s \subseteqq L^*$, чтд.

В периодическом случае теперь можно описать структуру полугрупп T_r, T_l значительно подробнее, чем в теоремах 4а, б.

Это выражает

Теорема 6а. *Пусть S — периодическая полугруппа, имеющая хоть один максимальный левый идеал. Пусть S не имеет ни одного левого антиидеала. Тогда*

а) или S является суммой левых идеалов $\neq S$,

б) или можно написать $S = L^* + T_l$, $L^* \cap T_l = \emptyset$, где L^* — единственный существующий максимальный левый идеал, а T_l — сумма взаимно непересекающихся изоморфных групп.

Доказательство. По теореме 4а мы знаем, что T_l является слева простой полугруппой. Полугруппа T_l — будучи частичной полугруппой периодической полугруппы — сама является периодической полугруппой. Следовательно, T_l имеет хоть один идемпотент. Структура слева простой полугруппы, имеющей идемпотент, известна и весьма интересна. Впервые эта структура была исследована (в связи с другими проблемами) *Клиффордом* [1] и независимо от него в периодическом случае *Шварцом* [1]. (Другое доказательство в общем случае см. *Шварц* [2], в случае конечной полугруппы также *Сушкевич* [1]). В цитированных работах доказано: в такой полугруппе уравнение $xa = b$ имеет однозначно определенное решение. Кроме того такая полугруппа является суммой непересекающихся изоморфных групп. Таким образом теорема 6а доказана.

Аналогично имеет место

Теорема 6б. *Пусть S — периодическая полугруппа, имеющая хоть один максимальный правый идеал. Пусть S не имеет ни одного правого антиидеала. Тогда*

а) или S является суммой правых идеалов $\neq S$,

б) или имеет место $S = R^* + T_r$, $R^* \cap T_r = \emptyset$, где R^* — единственный максимальный правый идеал, а T_r — сумма взаимно непересекающихся изоморфных групп.[6])

Пример 5. Чтобы показать, что доказанные в теореме 6а, б соотношения могут, действительно, иметь место и что, следовательно, $S - L^*$ (соотв. $S - R^*$, $S - M^*$) в общем случае не сводится к единственной группе (как это было в теореме 3), рассмотрим еще следующий поучительный пример. Пусть S — полугруппа, имеющая пять элементов $S = \{0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и пусть умножение определяется следующей таблицей

	0	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0	0	0	0	0
a_1	0	a_1	a_2	a_3	a_4
a_2	0	a_2	a_1	a_4	a_3
a_3	0	a_1	a_2	a_3	a_4
a_4	0	a_2	a_1	a_4	a_3

Нетрудно доказать, что это действительно полугруппа, т. е. что умножение ассоциативно. Из таблицы видно, что не существует ни правый ни левый антиидеал. Имеются два максимальных левых идеала, а именно $L_1 =$

[6]) Типичным примером слева простой полугруппы является каждый минимальный левый идеал $\mathfrak{l}$ полугруппы, не содержащей нулевого элемента. Если $\mathfrak{l}$ имеет идемпотент, то $\mathfrak{l}$ будет суммой непересекающихся изоморфных групп.

Если при исследовании полугруппы, имеющей нулевой элемент z, под минимальным левым идеалом мы подразумеваем идеал, не содержащий кроме z никаких других левых подидеалов (как это делает *Клиффорд* в работе [2]), то он, конечно, не будет слева простой полугруппой в смысле нашего определения 4. Структура таких минимальных идеалов была недавно подробно исследована автором (см. *Шварц* [3], стр. 246—250, теорема 6,4).

$= \{0, a_1, a_2\}$, $L_2 = \{0, a_3, a_4\}$. Следовательно, не существует L^*, так как $S = L_1 + L_2$. Зато существует единственный максимальный правый идеал $R^* = \{0\}$, являющийся в то же время единственным максимальным двусторонним идеалом M^*. В самом деле, мы получаем (в соответствии с теоремой 6б) $S = R^* + \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2$, где $\mathfrak{G}_1 = \{a_1, a_2\}$ и $\mathfrak{G}_2 = \{a_3, a_4\}$ суть две непересекающиеся изоморфные группы.

5.

Для исследования зависимости между максимальными идеалами L^*, R^*, M^* введем известное предположение, сформулированное впервые *Э. Нетер* (*E. Noether*).

Условие N. (*Предположение о возрастающей цепи левых идеалов*). *Мы скажем, что полугруппа выполняет условие* **N** *для левых идеалов, если в каждой последовательности левых идеалов*

$$\mathfrak{l}_1 \subseteq \mathfrak{l}_2 \subseteq \mathfrak{l}_3 \subseteq \ldots$$

имеется только конечное число различных идеалов.

Аналогичный вид имеет условие **N** для правых или двусторонних идеалов.

Лемма. *Пусть полугруппа S удовлетворяет условию* **N** *для левых идеалов. Тогда каждый максимальный двусторонний идеал M содержится в некотором максимальном левом идеале L.*

Доказательство. M является само левым идеалом. Рассмотрим последовательность левых идеалов, содержащих M, которую уже нельзя уплотнить:

$$M \subseteq \mathfrak{l}_1 \subset \mathfrak{l}_2 \ldots \subset S .$$

Эта последовательность имеет только конечное число различных членов. Ее последний член будет обязательно S, а предпоследний член этой цепи будет во всяком случае максимальным левым идеалом в смысле нашего определения. (Может, конечно случиться, что таковым будет само M).

Теорема 7а. *Пусть полугруппа S выполняет условие N для левых идеалов. Тогда, если $S = \sum\limits_{\alpha} M_\alpha$ будет также $S = \sum\limits_{\alpha} L_\alpha$.*

Доказательство. По предположению каждый элемент $a \in S$ можно поместить в какой-либо максимальный двусторонний идеал $M(a)$. Согласно лемме можно, следовательно, каждый элемент a погрузить в некоторый максимальный левый идеал $L(a)$. Итак, получаем $S = \sum\limits_{\alpha} L_\alpha$, чтд.

Теорема 7б. *Пусть S удовлетворяет условию* **N** *для правых идеалов. Тогда, если $S = \sum\limits_{\alpha} M_\alpha$, будет также $S = \sum\limits_{\alpha} R_\alpha$.*

Теорема 8а. *Пусть S удовлетворяет условию* $\mathbf{N}$ *для левых идеалов. Пусть S содержит хоть один двусторонний идеал, отличний от S. Тогда, если существует L^*, существует и M^* (причем, конечно, $M^* \subseteqq L^*$).*

Доказательство. Если существует L^*, то не имеет места $S = \sum_\alpha L_\alpha$. Следовательно, по теореме 7а не может быть $S = \sum_\alpha M_\alpha$. По предположению S содержит хоть один двусторонний идеал, значит, (ввиду условия $\mathbf{N}$) и хоть один максимальный двусторонний идеал M. Не имеет места $S = \sum_\alpha M_\alpha$; из этого следует (см. теорему 1а), что M будет единственным максимальным двусторонним идеалом, $M = M^*$.

Аналогично имеет место

Теорема 8б. *Пусть S удовлетворяет условию* $\mathbf{N}$ *для правых идеалов. Пусть S содержит хоть один двусторонний идеал $\neq S$. Тогда, если существует R^*, то существует и M^* (причем ,конечно, $M^* \subseteqq R^*$)*

Из теоремы 8а, б следует

Теорема 8в. *Пусть S удовлетворяет условию* $\mathbf{N}$ *для правых и левых идеалов. Пусть существует R^* и L^* Пусть, кроме того, существует хоть один двусторонний идеал $\neq S$. Тогда существует и M^* и имеет место $M^* \subseteqq \subseteqq L^* \cap R^*$.*

Теорема 9а. *Пусть S удовлетворяет условию* $\mathbf{N}$ *для левых одеалов. Пусть L^* существует и является двусторонним идеалом. Тогда $L^* = M^*$.*

Доказательство. Следует из теоремы 8а, так как в этом случае не может быть $M^* \subset L^*$.

Теорема 9б. *Пусть S удовлетворяет условию* $\mathbf{N}$ *для правых идеалов Пусть R^* существует и является двусторонним идеалом. Тогда $R^* = M^*$.*

Теорема 9в. *Пусть S удовлетворяет условию* $\mathbf{N}$ *для правых и левых идеалов. Пусть R^* и L^* существуют и являются оба двусторонними идеалами. Тогда существует и M^* и имеет место $R^* = L^* = M^*$.*

Из теоремы 9в вытекают, в частности, такие следствия:

Следствие А. *Пусть S — периодическая полугруппа, удовлетворяющая условию* $\mathbf{N}$ *для левых и правых идеалов. Пусть существуют L^* и R^*. Тогда существует и M^* и имеет место $L^* = R^* = M^*$.*

Следствие Б. *Пусть S — конечная полугруппа. Пусть существуют R^* и L^*. Тогда существует и идеал M^* и имеет место $R^* = L^* = M^*$.*

ЛИТЕРАТУРА

E. Hille: [1] Functional analysis and semigroups. Amer. Math. Soc. Coll. Publ., *XXXI*, New York, 1948.

A. H. Clifford: [1] A system arising from a weakened set of group postulates, Ann. of Math. *34* (1933), 865—871.

[2] Semigroups without nilpotent ideals, Amer. J. Math. *71* (1949), 834—844.

[3] Semigroups containing minimal ideals, Amer. J. Math. *70* (1948), 521—526.

E. C. Ляпин: [1] Нормальные комплексы ассоциативных систем, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., **14** (1950), 179—192.

[2] Простые коммутативные ассоциативные системы, Изв. Ак. Наук, СССР, серия матем., **14** (1950), 275—282.

[3] Полупростые коммутативные ассоциативные системы, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., **14** (1950), 367—380.

A. Suschkewitsch: [1] Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbahrkeit, Math. Ann. *99* (1928), 30—50.

Št. Schwarz: [1] Teória pologrúp. Sborník prác Prírodovedeckej fak. Slov. univerzity, č. *6* (1943), 1—64.

[2] Структура простых полугрупп без нуля, Чехословацкий математический журнал, **1** (**76**), 1951, 51—65.

[On the structure of simple semigroups without zero, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. *1*(*76*), 1951, 41—53].

[3] О полугруппах, имеющих ядро, Чехословацкий математический журнал, **1** (**76**), 259—301.

[On semigroups having a kernel, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. *1*(*76*), 1951, 229—264].

Summary.

ON MAXIMAL IDEALS IN THE THEORY OF SEMIGROUPS, I

ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava.

(Received July 22, 1952.)

By a semigroup we mean a non-vacuous set S of elements closed under an associative univalent operation.

A (left, right, two-sided) ideal is said to be maximal if it is not equal to the whole semigroup S and is not properly contained in any other ideal of the same kind.

Suppose that S contains at least one maximal left ideal. It is almost apparent that there are then only two possibilities: a) either S is overlapped by the set of all maximal left ideals, b) or there exists exactly one maximal left ideal L^*.

In this second case we shall suppose moreover that every left ideal $\neq S$ is contained in L^*. (This is clearly equivalent to the supposition that every left ideal $\neq S$ can be embedded in a maximal left ideal).

Analogous meaning has the maximal right ideal R^* and the maximal two-sided ideal M^*.

The purpose of this paper is to study the structure of the sets $S - L^*$, $S - R^*$, $S - M^*$ (supposing that the ideals L^*, R^*, M^* — in the meaning just introduced — exist).

To this end we introduce a new notion: a set $\bar{L}$ is called a left antiideal of the semigroup S if $S\bar{L} \cap \bar{L} = \emptyset$ holds. A right antiideal is defined analogously.

We quote here some of *the theorems* proved above.

1. Let S contain L^*. Let us suppose that S does not contain any left antiideal. Then there holds: $S = L^* + T_l$, $L^* \cap T_l = \emptyset$, where T_l is a semigroup. If moreover L^* is at the same time a two-sided ideal, then T_l is a left simple semigroup. (A semigroup A is called left simple if the equation $xa = b$ has a solution $x \in A$ for every $a, b \in A$).

2. A semigroup S is called a torsion semigroup if for every $a \in S$ the sequence $a, a^2, a^3, \ldots$ has only a finite number of different elements. In a torsion semigroup the ideal L^* (if it exists) is always a two-sided ideal.

Suppose that in the torsion semigroup S the ideal L^* exists. Suppose further that S does not contain any left antiideal. Then there holds $S = L^* + T_l$, $L^* \cap T_l = \emptyset$, where T_l is a class sum of disjoint isomorphic groups.

3. Let S be a semigroup all ideals of which are two-sided. Let S contain M^* and not contain any left or right antiideal. Then there holds $S = M^* + T$, $M^* \cap T = \emptyset$, where T is a group.

4. In section 5 we are studying some theorems concerning the existence of R^*, L^* and M^*.