Czechoslovak Mathematical Journal

Eduard Čech

Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами. VII

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 3 (1953), No. 2, 123–137

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100077

Чехословацкий математический журнал, т. 3 (78) 1953

ПРОЕКТИВНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРОСТРАНСТВАМИ VII

ЭДУАРД ЧЕХ (Eduard Čech), Прага.

(Поступило в редакцию 3/XII 1952 г.)

В этой и в следующей статьях доказываются основные теоремы существования для задачи о проективном изгибании слоя гиперповерхностей, поставленной уже в предыдущей статье VI. Такие проективные изгибания можно разделить на два типа. Если возможен такой выбор касательной коллинеации K, реализирующей проективное изгибание, при котором K-линеаризирующие прямые всех прямых связки A лежат в K-главной гиперплоскости, то мы говорим о *специальном* проективном изгибании. Теория специальных проективных изгибаний является предметом следующей статьи VIII. В настоящей статье доказано, что только параболические слои гиперповерхностей допускают неспециальные проективные изгибания и что каждый параболический слой пространства S_n допускает такие изгибания, зависящие от $2n + 2$ произвольных функций одного переменного.

1. В статье VI (§ 2) мы формулировали задачу о нахождении тех соответствий между S_n и S'_n, у которых для каждой точки A пространства S_n возможен такой выбор касательной коллинеации K, что в связке A существует K-главная гиперплоскость. Там же мы сказали, что, если K, как обычно, дана через

$$KA = B,\ KA_1 = B_1, \ldots, KA_n = B_n\,, \tag{1,1}$$

то задача аналитически выражается тем свойством K-линеаризирующего преобразования

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \to (\Omega_1, \ldots, \Omega_n)\,, \tag{1,2}$$

что все квадратичные формы Ω_i $(1 \leqq i \leqq n)$ имеют общий линейный делитель

$$\vartheta = a_1\omega_1 + \ldots + a_n\omega_n\,; \tag{1,3}$$

K-главной гиперплоскостью точки A является тогда множество тех прямых

$$[A, \omega_1A_1 + \ldots + \omega_nA_n]\,, \tag{1,4}$$

для которых $\vartheta = 0$. В VI, § 3 мы ввели основное различие голономного и неголономного типов, причем у голономного типа $[\vartheta\, d\vartheta] = 0$, т. е. уравнение $\vartheta = 0$ вполне интегрируемо, а в неголономном случае — $[\vartheta\, d\vartheta] \neq 0$. Хотя предметом исследования этой настоящей и следующей статей является только голономный тип (или проективное изгибание слоя гиперповерхностей), всё же при этих вступительных рассуждениях будет удобно рассматривать пока оба возможных типа вместе.

После сокращения на общий делитель ϑ, (1,2) принимает вид

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \to (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\,, \tag{1,5}$$

где φ_i $(1 \leqq i \leqq n)$ — линейные формы в $\omega_1, \ldots, \omega_n$; стало быть, (1,5) определяет (во многих случаях вырожденное) коллинейное преобразование связки A, названное нами в VI § 2 *K-линеаризирующей коллинеацией* и обозначенное через Λ.

Во всей статье считается $n \geqq 3$, так как случаи $n = 1$ и $n = 2$ для нашей задачи тривиальны.

2. Вообще говоря, в связке A существует определенная гиперплоскость, которую мы назовем *K-сопроводительной гиперплоскостью* точки A, состоящая из тех прямых (1,4), для которых $\omega_1, \ldots, \omega_n$ удовлетворяют (в обозначениях § 1) условию

$$a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n = 0\,. \tag{2,1}$$

Геометрически, K-сопроводительная гиперплоскость состоит из тех прямых (1,4), образы которых при K-линеаризирующей коллинеации лежат в K-главной гиперплоскости. Возможен и случай, что (2,1) имеет место *тождественно* в $\omega_1, \ldots, \omega_n$; в таком случае образы *всех* прямых связки A при коллинеации Λ лежат в K-главной гиперплоскости и тогда мы говорим, что K-сопроводительная гиперплоскость — *неопределена*.

Надо вспомнить, что, как мы уже выяснили в VI § 2, коллинеация K не является вполне определенной, и можно заменить её коллинеацией K^*, где

$$K^*A = B, \quad K^*A_i = B_i - \mu a_i B \qquad (1 \leqq i \leqq n) \tag{2,2}$$

с произвольно выбранным μ. При такой замене получим [см. VI (2,8)] вместо (1,5) K^*-линеаризирующую коллинеацию Λ^*:

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \to (\varphi_1 - 2\mu\omega_1, \ldots, \varphi_n - 2\mu\omega_n)\,. \tag{2,3}$$

Ясно, что K^*-сопроводительная гиперплоскость состоит из тех прямых (1,4), для которых имеет место

$$a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n = 2\mu(a_1\omega_1 + \ldots + a_n\omega_n)\,; \tag{2,4}$$

значит, она неопределена, если (2,4) имеет место тождественно в $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

Не трудно убедиться в том, что возможны два случая. В первом случае существует один (единственный) выбор числа μ такой, что соответствующая K^*-сопроводительная гиперплоскость является неопределенной, а при каждом другом выборе числа μ она совпадает с K-главной гиперплоскостью, которая, как мы знаем, не зависит от μ. *В настоящей статье мы исключаем только что описанный случай, которому будет посвящена следующая статья* VIII. Во втором случае, который и является предметом настоящей статьи, положение K^*-сопроводительной гиперплоскости σ^* (в отличие от K-главной гиперплоскости ϱ) существенно зависит от μ; если изменять μ, то σ^* описывает пучок, $(n-2)$-мерная ось S_{n-2} которого содержится в ϱ и проходит через A; положение гиперплоскости σ^* в указанном пучке подчинено лишь условию $\sigma^* \neq \varrho$. Для краткости назовем S_{n-2} *характеристикой* точки A; очевидно, S_{n-2} состоит из тех прямых (1,4), для которых

$$a_1\omega_1 + \ldots + a_n\omega_n = 0, \quad a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n = 0.$$

3. Перейдем к аналитической формулировке поставленной задачи. При этом мы можем специализировать репер так, чтобы удовлетворить следующим трем требованиям: [1] коллинеациа K дана уравнениями (1,1); [2] K-главная гиперплоскость состоит из тех прямых (1,4), для которых $\omega_n = 0$; значит, в (1,3) можно считать

$$a_i = 0\ (1 \leqq i \leqq n-1)\,, \quad a_n = 1\,;$$

[3] характеристика состоит из тех прямых (1,4), для которых $\omega_1 = \omega_n = 0$. Стало быть, речь идет об отыскании тех соответствий, для которых все квадратичные формы Ω_i делимы на ω_n и, кроме того, форма Ω_n содержит лишь ω_1 и ω_n. Итак, учитывая I (5,15), пы видим, что наша задача состоит в интегрировании дифференциальной системы

$$\tau_{01} = \tau_{02} = \ldots = \tau_{0n} = 0\,; \tag{3,1}$$

$$\tau_{1n} = \varepsilon\omega_n,\ \tau_{nn} - \tau_{00} = \varepsilon\omega_1 + \eta\omega_n\,; \tag{3,2}$$

$$\tau_{in} = 0\ \ (2 \leqq i \leqq n-1)\,; \tag{3,3}$$

$$[\tau_{ii} - \tau_{00}\omega_n] = [\tau_{ij}\omega_n] = 0 \quad \text{для } 1 \leqq i, j \leqq n-1;\ i \neq j\,. \tag{3,4}$$

Кроме того, случай $\varepsilon = 0$ отложен в статью VIII, так что

$$\varepsilon \neq 0\,. \tag{3,5}$$

Внешним дифференцированием мы получаем из (3,1)

$$[\tau_{ii} - \tau_{00}\omega_i] + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}[\tau_{ji}\omega_j] = 0 \quad \text{для } 1 \leqq i \leqq n-1\,, \tag{3,6}$$

затем из (3,2)

$$\left.\begin{aligned}&[\mathrm{d}\varepsilon+\varepsilon(\omega_{00}-\omega_{11})-\eta\omega_{1n}-\tau_{10}\omega_n]-[\tau_{11}-\tau_{00}-2\varepsilon\omega_1\omega_{1n}]-\\&\quad-\sum_{i=2}^{n-1}[\tau_{1i}-\varepsilon\omega_i\omega_{in}]+\varepsilon^2[\omega_1\omega_n]=0\,,\\&[\mathrm{d}\varepsilon+\varepsilon(\omega_{00}-\omega_{11})-\eta\omega_{1n}-\tau_{10}\omega_1]+\\&\quad+[\mathrm{d}\eta+\eta(\omega_{00}-\omega_{nn})-2\varepsilon\omega_{n1}-\varepsilon\tau_{n1}-2\tau_{n0}\omega_n]-\\&\quad-[\tau_{n1}\omega_{1n}]-\sum_{i=2}^{n-1}[\tau_{ni}\omega_{in}]-\sum_{i=2}^{n-1}[\tau_{i0}+\varepsilon\omega_{i1}+\eta\omega_{in}\omega_i]=0,\end{aligned}\right\}\quad(3,7)$$

далее из (3,3)

$$\begin{aligned}&[\tau_{i0}+\varepsilon\tau_{i1}+\varepsilon\omega_{i1}+\eta\omega_{in}\omega_n]+\varepsilon[\omega_{in}\omega_1]+[\tau_{ii}-\tau_{00}\omega_{in}]+\\&\quad+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1}[\tau_{ij}\omega_{jn}]=0\qquad(2\leqq i\leqq n-1)\end{aligned}\qquad(3,8)$$

и, наконец, из (3,4)

$$\sum_{j=1}^{n-1}[\tau_{ii}-\tau_{00}\omega_{jn}\omega_j]+\sum_{j=1}^{n-1}[\tau_{j0}\omega_j\omega_n]+[\tau_{i0}\omega_i\omega_n]+[\omega_{in}\tau_{ni}\omega_n]=0\qquad(3,9)$$

$$(1\leqq i\leqq n-1)\,,$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}[\tau_{ij}\omega_{kn}\omega_k]+[\tau_{i0}\omega_j\omega_n]+[\omega_{in}\tau_{nj}\omega_n]=0\qquad(3,10)$$

для $1\leqq i,j\leqq n-1,\ i\neq j$.

Учитывая (3,4) и (3,5), заключаем из (3,8), что

$$[\omega_{in}\omega_1\omega_n]=0\qquad\text{для }2\leqq i\leqq n-1\qquad(3,11)$$

а из первого уравнения (3,7), что

$$2[\omega_{1n}\omega_1\omega_n]+\sum_{i=2}^{n-1}[\omega_{in}\omega_i\omega_n]=0\,.\qquad(3,12)$$

Из (3,11) и (3,12) вытекает

$$\left.\begin{aligned}\omega_{1n}&=3\alpha_1\omega_1+\sum_{i=2}^{n-1}\alpha_i\omega_i+\beta_1\omega_n\,,\\\omega_{in}&=2\alpha_i\omega_1+\beta_i\omega_n\qquad\text{для }2\leqq i\leqq n-1.\end{aligned}\right.\qquad(3,13)$$

В этой статье мы будем рассматривать только голономный тип (см. VI § 3), у которого $[\omega_n\,\mathrm{d}\omega_n]=0$. Так как всегда

$$[\omega_n\,\mathrm{d}\omega_n]=\sum_{i=1}^{n-1}[\omega_i\omega_{in}\omega_n]\,,$$

то мы будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n-1}[\omega_i\omega_{in}\omega_n]=0.\qquad(3,14)$$

Напомним (VI § 3), что K-главные гиперплоскости являются касательными гиперплоскостями *K-главных гиперповерхностей* и что изучаемое соответствие является *проективным изгибанием* этого *слоя* (K-главных) *гиперповерхностей.*

(3,14) показывает, что в (3,13) должно быть $\alpha_i = 0$ для $2 \leqq i \leqq n-1$, так что

$$\omega_{1n} = 3\alpha_1\omega_1 + \beta_1\omega_n,\ \omega_{in} = \beta_i\omega_n \quad \text{для } 2 \leqq i \leqq n-1\,. \tag{3,15}$$

Тривиальным решением рассматриваемой задачи являются, как мы знаем (см. VI § 4), соответствия разложимые на ∞^1 коллинейных соответствий между гиперплоскостями; в дальнейшем тривиальный случай исключается. Легко видеть [ср. I, (5,3), (5,4) и (5,11)], что тривиальный случай имеет место тогда, и только тогда, если

$$[\omega_{in}\omega_n] = 0 \qquad \text{для} \quad 1 \leqq i \leqq n-1\,.$$

Следовательно, нам остается исследовать лишь тот случай, когда в (3,15)

$$\alpha_1 \neq 0\,. \tag{3,15*}$$

Кроме того, из только что упомянутых уравнений статьи I следует, ввиду (3,15) и (3,15*), что асимптотические линии K-главных гиперповерхностей даны уравнениями $\omega_1^2 = \omega_n = 0$. Из этого вытекает, во-первых, что *K-главные гиперповерхности являются огибающими* ∞^1 (K-главных) *гиперповерхностей*, а во-вторых, что *каждая K-главная гиперплоскость касается соответствующей огибающей вдоль характеристики* $\omega_1 = \omega_n = 0$.

Согласно (3,15), уравнения (3,9) и (3,10) принимают вид:

$$[\tau_{10}\omega_1\omega_n] + \sum_{j=1}^{n-1}[\tau_{j0}\omega_j\omega_n] - 3\alpha_1[\tau_{n1}\omega_1\omega_n] = 0\,, \tag{3,16}$$

$$[\tau_{i0}\omega_i\omega_n] + \sum_{j=1}^{n-1}[\tau_{j0}\omega_j\omega_n] = 0 \qquad \text{для } 2 \leqq i \leqq n-1, \tag{3,17}$$

$$[\tau_{10}\omega_i\omega_n] - 3\alpha_1[\tau_{ni}\omega_1\omega_n] = 0 \quad \text{для } 2 \leqq i \leqq n-1, \tag{3,18}$$

$$[\tau_{i0}\omega_1\omega_n] = 0,\ [\tau_{i0}\omega_j\omega_n] = 0 \quad \text{для } 2 \leqq i, j \leqq n-1, j \neq 1. \tag{3,19}$$

4. *Пусть сперва $n \geqq 4$.* Тогда из (3,19) вытекает

$$[\tau_{i0}\omega_n] = 0 \qquad \text{для } 2 \leqq i \leqq n-1\,. \tag{4,1}$$

Затем (3,17) дает

$$[\tau_{10}\omega_1\omega_n] = 0\,, \tag{4,2}$$

так что, согласно (3,15*) и (3,16),

$$[\tau_{n1}\omega_1\omega_n] = 0\,; \tag{4,3}$$

уравнение (3,16) остается без изменения. Внешнее дифференцирование (4,1) даст

$$[\omega_{i1}\tau_{10}\omega_n] = 0 \quad \text{для } 2 \leqq i \leqq n-1. \tag{4,4}$$

Теперь мы можем переписать (3,8) в упрощенном виде:

$$\varepsilon[\tau_{i1} + \omega_{i1}\omega_n] + 3\varkappa_1[\tau_{i1}\omega_1] - \varepsilon\beta_i[\omega_1\omega_n] = 0 \quad \text{для } 2 \leqq i \leqq n-1. \tag{4,5}$$

Согласно (3,4), можно положить

$$\tau_{ii} - \tau_{00} = e_{ii}\omega_n, \ \tau_{ij} = c_{ij}\omega_n \quad (1 \leqq i, j \leqq n-1, i \neq j); \tag{4,6}$$

после этого, из (3,6) следует

$$\tau_{ni} = \sum_{j=1}^{n-1} c_{ji}\omega_j + c_i\omega_n \quad (1 \leqq i \leqq n-1). \tag{4,7}$$

Учитывая (4,3) и (4,7), мы видим, что $c_{j1} = 0$ для $2 \leqq j \leqq n-1$ или

$$\tau_{i1} = 0 \qquad \text{для } 2 \leqq i \leqq n-1, \tag{4,8}$$

так что (4,5) упрощается на

$$[\omega_{i1} - \beta_i\omega_1\omega_n] = 0 \qquad (2 \leqq i \leqq n-1). \tag{4,9}$$

Согласно (4,7), (3,18) примет вид

$$[\tau_{10}\omega_i\omega_n] = 3\varkappa_1 \sum_{j=1}^{n-1} c_{ji}[\omega_j\omega_1\omega_n] \quad \text{для } 2 \leqq i \leqq n-1, \tag{*}$$

так что, ввиду (4,2), имеем, с одной стороны, $c_{ji} = 0$ для $2 \leqq i, j \leqq n-1$, $i \neq j$, значит

$$\tau_{ij} = 0 \qquad \text{для } 2 \leqq i, j \leqq n-1, i \neq j, \tag{4,10}$$

а с другой стороны, можно положить

$$\tau_{10} = -3c\varkappa_1\omega_1 + b\omega_n, \tag{4,11}$$

после чего (*) дает еще $c_{ii} = c$ для $2 \leqq i \leqq n-1$ или

$$\tau_{ii} - \tau_{00} = c\omega_n \qquad (2 \leqq i \leqq n-1). \tag{4,12}$$

Резюмируя, будем иметь $c_{i1} = 0$ для $2 \leqq i \leqq n-1$, $c_{ii} = 0$ для $2 \leqq i \leqq n-1$, $c_{ij} = 0$ для $2 \leqq i, j \leqq n-1$, $i \neq j$, так что (4,7) приобретает вид

$$\tau_{n1} = c_{11}\omega_1 + c_n\omega_n \tag{4,13}$$

$$\tau_{ni} = c_{1i}\omega_1 + c\omega_i + c_n\omega_n \qquad (2 \leqq i \leqq n-1). \tag{4,14}$$

5. В § 3 мы узнали, что каждая K-главная гиперповерхность является огибающей ∞^1 (K-главных) гиперплоскостей. В пространстве S_n имеется всего ∞^2 K-главных гиперплоскостей; в пространстве Σ_n дуальном к S_n, каждая K-главная гиперплоскость Δ является точкой, и все эти точки составляют в пространстве Σ_n *поверхность* (Δ). Эта поверхность (Δ) имеет в своей точке Δ определенную касательную плоскость ϱ, дуальным образом которой в первоначальном пространстве S_n является ($n-3$)-мерное линейное пространство S_{n-3}, которое мы назовем *основанием* рассматриваемого соответствия в точке A; впрочем, S_{n-3} содержит точку A и является основанием всех точек лежащих в характеристике S_{n-2} точки A.

Пусть $A^*, A_1^*, \ldots, A_n^*$ означает репер пространства Σ_n, дуальный к реперу $A, A_1, \ldots, A_n$ пространства S_n, так что

$$A \,.\, A^* = 1,\ A_i \,.\, A_i^* = 1,\ A \,.\, A_i^* = A_i \,.\, A^* = A_i \,.\, A_j^* = 0$$
$$(1 \leqq i, j \leqq n,\ i \neq j).$$

Очевидно,

$$A_n^* = [AA_1 \ldots A_{n-1}] = \varDelta\,.$$

Но из I, (5,3) и (5,11) следует

$$\mathrm{d}A_n^* + \omega_n A^* + \omega_{1n}A_1^* + \ldots + \omega_{nn}A_n^* = 0$$

или, согласно (3,15),

$$\mathrm{d}A_n^* + (3\alpha_1\omega_1 + \beta_1\omega_n)\,A_1^* + \omega_n(A^* + \sum_{i=2}^{n-1}\beta_i A_i^*) + \omega_{nn}A_n^* = 0\,, \tag{5,1}$$

так что [см. также (3,15*)]

$$\varrho = [A^* + \sum_{i=2}^{n-1}\beta_i A_i^*,\ A_1^*,\ A_n^*]\,. \tag{5,2}$$

Возвращаясь к пространству S_n, мы видим, что основание S_{n-3} дано выражением

$$[A_2 - \beta_2 A, \ldots, A_{n-1} - \beta_{n-1}A]\,. \tag{5,3}$$

Дуальным образом каждой (развертывающейся) K-главной гиперповерхности в пространстве Σ_n является кривая γ, лежащая на поверхности $(\varDelta)$ и описываемая точкой A_n^*, причем вдоль γ имеет место $\omega_n = 0$. Из уравнения (5,1) следует, что

$$\mathrm{d}A_n^* + 3\alpha_1\omega_1 A_1^* + \omega_{nn}A_n^* = 0 \quad \text{для } \omega_n = 0\,,$$

причем $\alpha_1 \neq 0$. Далее, из (4,9) вытекает, что

$$\mathrm{d}A_1^* + \omega_1 A^* + \omega_{11}A_1^* + \sum_{i=2}^{n-1}\beta_i\omega_1 \,.\, A_i^* + \omega_{n1}A_n^* = 0\,.$$

Итак, кривая γ — не прямая, и ее соприкасающей плоскостью в точке $A_n^* = \varDelta$ служит плоскость (5,2); значит, γ является асимптотической кривой поверхности $(\varDelta)$. Применяя выражение, которое мы ввели в VI § 10, мы можем формулировать доказанное следующим образом: *Только параболические слои гиперповерхностей допускают проективное изгибание, подчиненное условию* (3,5).

6. Из (3,2), (4,6), (4,8), (4,10),(4,12,) (4,13), и (4,14) следует

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= 2c_{11}\omega_1\omega_n + c_n\omega_n^2\,,\\
\Omega_i &= 2c_{1i}\omega_1\omega_n + 2c\omega_i\omega_n + c_n\omega_n^2 \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,,\\
\Omega_n &= 2\varepsilon\omega_1\omega_n + \eta\omega_n^2
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 2c_{11}\omega_1 + c_n\omega_n,\\ \varphi_i &= 2c_{1i}\omega_1 + 2c\omega_i + c_n\omega_n \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,,\\ \varphi_n &= 2\varepsilon\omega_1 + \eta\omega_n\,.\end{aligned} \tag{6,1}$$

В § 2 мы видели, что коллинеацию $K(1,1)$ можно заменить коллинеацией (2,2), причем соответствующее изменение линеаризирующей коллинеации выражается переходом (1,5) в (2,3). Из этого не трудно заключить, что коллинеацию K можно выбрать таким образом, чтобы в (4,15) было $c = 0$; такой выбор, который мы теперь и сделаем, инвариантен, так как его геометрический смысл заключается в том, что K-линеаризирующая коллинеация Λ (1,5) вырождается таким образом, что образы при Λ прямых связки A, лежащих в характеристике S_{n-2} (см. § 2), т. е. тех прямых (1,4), для которых $\omega_1 = \omega_n = 0$, неопределены.

Кроме того, мы будем еще, что очевидно допустимо, специализировать репер так, чтобы основание (5,3) было дано просто выражением

$$[A_2 \dots A_{n-1}]\,; \tag{6,2}$$

тогда будет $\beta_i = 0$ $(2 \leqq i \leqq n-1)$ или [ср. (3,15) и (4,9)]

$$\omega_{in} = [\omega_{i1}\omega_n] = 0 \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,. \tag{6,3}$$

Заметим еще, что, учитывая (3,3), (3,4), (4,10) и (6,3), получаем из (4,8) внешним дифференцированием $[\tau_{i0}\omega_1] = 0$ для $2 \leqq i \leqq n-1$; сопоставляя с (4,1), получаем

$$\tau_{i0} = 0 \qquad \text{для} \quad 2 \leqq i \leqq n-1\,.$$

Резюмируя, мы приходим к заключению, что задача проективного изгибания слоя гиперповерхностей, подчиненного условию (3,5), выражается аналитически дифференциальной системой

$$\left.\begin{aligned}\omega_{1n} &= 3\alpha_1\omega_1 + \beta_1\omega_n\,,\\ \omega_{in} &= 0 \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,,\\ [\omega_{i1}\omega_n] &= 0 \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,;\end{aligned}\right\} \tag{6,4}$$

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{01} = \tau_{02} = \dots = \tau_{0n} = 0\,,\\ &\tau_{i0} = \tau_{i1} = \dots = \tau_{ii} - \tau_{00} = \tau_{in} = 0 \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,,\\ &\tau_{ij} = 0 \quad (2 \leqq i, j \leqq n-1,\ i \neq j)\,,\\ &\tau_{1n} = \varepsilon\omega_n,\ \tau_{nn} - \tau_{00} = \varepsilon\omega_1 + \eta\omega_n\,,\\ &[\tau_{11} - \tau_{00}\omega_n] = 0\,,\\ &[\tau_{1i}\omega_n] = 0 \quad (2 \leqq i \leqq n-1)\,,\\ &[\tau_{10}\omega_n] = 0\,;\end{aligned}\right\} \tag{6,5}$$

предполагается, что соблюдены неравенства

$$\varepsilon \neq 0\,, \quad \alpha_1 \neq 0\,. \tag{6,6}$$

Уравнения (6,4) выражают, что данный слой гиперповерхностей в S_n — параболический, и что репер $A, A_1, \ldots, A_n$ выбран согласно следующим условиям: касательной гиперплоскостью гиперповерхности слоя, проходящей через точку A, служит гиперплоскость $[AA_1 \ldots A_{n-1}]$, причем касание имеет место вдоль пространства (характеристики) $[AA_2 \ldots A_{n-1}]$; кроме того, основанием является пространство $[A_2 \ldots A_{n-1}]$. Напомним, что основание можно определить двумя способами: во-первых, вдоль него касается гиперплоскость $[AA_1 \ldots A_{n-1}]$ огибающей системы всех ∞^2 гиперплоскостей, элементом которой она и есть; во-вторых, основание является также, на гиперповерхности слоя, проходящей через него и состоящей из ∞^1 характеристик, ребром возврата на соответствующей характеристике. Вообще говоря, основание занимает ∞^2 различных положений в пространстве S ; однако, возможен также случай *неподвижного основания* $[A_2 \ldots A_{n-1}] = S_{n-3}$; в таком случае все гиперповерхности данного слоя — конические: каждая из них состоит из ∞^1 $(n-2)$-мерных линейных пространств, проходящих через неподвижное пространство S_{n-3}.

Если в пространстве S_n задан произвольно параболический слой гиперповерхностей, то уравнения (6,4) — тождества, и проективное изгибание данного слоя зависит от интеграции дифференциальной системы (6,5), условия совместимости которой имеют вид

$$\begin{gathered}[\tau_{11} - \tau_{00}\omega_1] + [\tau_{n1}\omega_n] = 0\,, \\ [\tau_{10}\omega_1] + [\tau_{n0}\omega_n] = 0\,, \\ [\tau_{1i}\omega_1] + [\tau_{ni}\omega_n] = 0 \quad \text{для} \quad 2 \leqq i \leqq n-1\,;\end{gathered} \tag{6,7}$$

$$\begin{gathered}[\mathrm{d}\varepsilon + \varepsilon(\omega_{00} - \omega_{11}) - \tau_{10} - 3\alpha_1\tau_{n1}\omega_n] + (\varepsilon^2 + 2\varepsilon\beta_1 - 3\eta\alpha_1)\,[\omega_1\omega_n] = 0\,, \\ [\mathrm{d}\varepsilon + \varepsilon(\omega_{00} - \omega_{11}) - \tau_{10} - 3\alpha_1\tau_{n1}\omega_1] + [\mathrm{d}\eta + \eta(\omega_{00} - \omega_{nn}) - \\ - 2\varepsilon\omega_{n1} - (\beta_1 + \varepsilon)\,\tau_{n1} - 2\tau_{n0}\omega_n] - \varepsilon\sum_{i=2}^{n-1}[\omega_{i1}\omega_i] + \eta\beta_1[\omega_1\omega_n] = 0\,.\end{gathered} \tag{6,8}$$

Из этих условий заключаем, что система (6,5) находится в инволюции относительно решений, удовлетворяющих (6,6), и что такие решения зависят от $2n + 2$ произвольных функций одного переменного. Следовательно, *каждый параболический слой гиперповерхностей допускает проективные изгибания, подчиненные условию* (3,5), *зависящие от* $2n + 2$ *произвольных функций одного переменного.*

7. Справедливость результатов §§ 5 и 6 доказана пока только для $n \geqq 4$; однако, как мы покажем, они *остаются в силе без изменения также для* $n = 3$. Итак, пусть $n = 3$. В пространстве S_3 имеют место уравнения (3,15), т. е.

$$\omega_{13} = 3\alpha_1\omega_1 + \beta_1\omega_3, \quad \omega_{23} = \beta_2\omega_3\,. \tag{7,1}$$

Внешнее дифференцирование второго равенства (7,1) даст

$$[d\beta_2 + \beta_2(\omega_{00} - \omega_{22}) - \omega_{20} - \beta_1\omega_{21}\omega_3] - 3\alpha_1[\omega_{21}\omega_1] + \\ + \beta_2[\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2\omega_3] = 0, \tag{7,2}$$

так что $[\omega_{21}\omega_1\omega_3] = 0$. Стало быть, существует такое γ_1, что $[\omega_{21} - \gamma_1\omega_1\omega_3] = 0$. Но тогда

$$d(A_2 - \gamma_1 A) = (.)\, A + (.)\, A_2 \quad \text{для } \omega_3 = 0,$$

т. е. прямая $[AA_2]$ (характеристика; ср. §§ 2, 3) касается своей огибающей в точке $A_2 - \gamma_1 A$. Специализируя репер, мы получаем $\gamma_1 = 0$, так что можно положить

$$\omega_{21} = \gamma\omega_3\,. \tag{7,3}$$

Следствием (7,3) является соотношение $[\omega_{21}\omega_3] = 0$, внешнее дифференцирование которого дает

$$[\omega_{20}\omega_1\omega_3] = 0\,. \tag{7,4}$$

Согласно (7,1) и (7,3), мы имеем

$$dA_2 = \omega_{20}A + \omega_{22}A_2 + (\gamma A_1 + \beta_2 A_3)\,\omega_3\,. \tag{7,5}$$

Предположим сначала, что

$$[\omega_{20}\omega_3] \neq 0\,, \tag{7,6}$$

$$\beta_2 \neq 0\,. \tag{7,7}$$

Покажем, что это невозможно. Из (7,5) и (7,6) следует, что г. местом точек A_2 является поверхность (A_2), касательная плоскость которой $[A, A_2, \gamma A_1 + \beta_2 A_3]$ отлична от (K-главной) плоскости $[AA_1A_2]$. Дальнейшая специализация репера дает, что названная касательная плоскость совпадает с $[AA_2A_3]$, т. е. что $\gamma = 0$ или

$$\omega_{21} = 0\,. \tag{7,8}$$

Теперь мы имеем

$$dA = \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3\,,$$
$$dA_2 = \omega_{20}A + \omega_{22}A_2 + \beta_2\omega_3 A_3\,.$$

Прямая $[AA_2]$ образует конгруенцию с двумя отличными друг от друга фокусами A_2, $A_2 - \beta_2 A$. Новая специализация репера даст, что вторым фокусом является точка $A - A_2$, т. е. что $\beta_2 = 1$ или

$$\omega_{23} = \omega_3\,. \tag{7,9}$$

Согласно (3,4), можно положить

$$\tau_{11} - \tau_{00} = a_{11}\omega_3, \quad \tau_{12} = a_{12}\omega_3\,,$$
$$\tau_{21} = a_{21}\omega_3, \quad \tau_{22} - \tau_{00} = a_{22}\omega_3\,. \tag{7,10}$$

Учитывая (7,1), (7,8), (7,9) и (7,10), получаем из (3,8) для $i = 2$:

$$[\tau_{20} - (3\alpha_1 a_{21} + \varepsilon)\, \omega_1 \omega_3] = 0\,. \tag{7,11}$$

По (3,6), (7,10) и (7,11), можно положить

$$\begin{aligned} \tau_{31} &= a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2 + a_{31}\omega_3\,, \\ \tau_{32} &= a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2 + a_{32}\omega_3\,, \end{aligned} \tag{7,12}$$

$$\tau_{20} = (3\alpha_1 a_{21} + \varepsilon)\omega_1 + c\omega_3\,. \tag{7,13}$$

Затем, (3,17) и (7,13) позволяет положить

$$\tau_{10} = c_1\omega_1 + 2(3\alpha_1 a_{21} + \varepsilon)\, \omega_2 + c_2\omega_3\,. \tag{7,14}$$

Из (3,16), (7,12), (7,13) и (7,14) следует

$$\varepsilon = -\, 2\alpha_1 a_{21}\,, \tag{7,15}$$

так что

$$\begin{aligned} \tau_{20} &= -\, \tfrac{1}{2}\varepsilon\omega_1 + c\omega_3\,, \\ \tau_{10} &= c_1\omega_1 - \varepsilon\omega_2 + c_2\omega_3\,. \end{aligned} \tag{7,16}$$

Согласно (3,18), мы имеем еще

$$c_1 = -\, 3\alpha_1 a_{22}\,. \tag{7,17}$$

Простое вычисление показывает, что уравнения (3,7) теперь принимают вид

$$[\mathrm{d}\varepsilon + \varepsilon(\omega_{00} - \omega_{11}) + (\varepsilon^2 + 2\varepsilon\beta_1 + 3\alpha_1 a_{11}\omega_1 - 3\alpha_1\eta - c_1)\, \omega_1 + 2\varepsilon\omega_2\omega_3] = 0\,, \tag{7,18}$$

$$\left.\begin{aligned} &[\mathrm{d}\varepsilon + \varepsilon(\omega_{00} - \omega_{11}) + 2\varepsilon\omega_2 - (\beta_1\eta + c_2)\, \omega_3\omega_1] + \\ &+ [\mathrm{d}\eta + \eta(\omega_{00} - \omega_{33}) - \varepsilon(6\alpha_1 + a_{11})\, \omega_1 - \varepsilon a_{21}\omega_2 - 2\tau_{30}\omega_3] + \\ &+ (3\alpha_1 a_{31} - \beta_1 a_{11} - a_{12})\, [\omega_1\omega_3] + (c - \eta - \beta_1 a_{21} - a_{22}]\, [\omega_2\omega_3] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7,19}$$

Из равенств (7,8) и (7,9) следует внешним дифференцированием

$$[\omega_{20}\omega_1] - [\omega_{31}\omega_3] = 0,\ [\omega_{22} - \omega_{00} + \omega_{20} - \beta_1\omega_1 - \omega_2\omega_3] = 0,$$

так что можно положить

$$\left.\begin{aligned} \omega_{22} - \omega_{00} &= r_0\omega_1 + \omega_2 + r_0\omega_3\,, \\ \omega_{20} &= (\beta_1 - r_0)\, \omega_1 + r_1\omega_3\,, \\ \omega_{31} &= -\, r_1\omega_1 + r_3\omega_3\,. \end{aligned}\right\} \tag{7,20}$$

Внешнее дифференцирование первого равенства (7,1) дает

$$\begin{aligned} 3[\mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1(\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{33})\, \omega_1] + [\mathrm{d}\beta_1 + \beta_1(\omega_{00} - \omega_{11}) - \omega_{10} - \omega_{12}\omega_3] + \\ + (\beta_1^2 + 3\alpha_1 r_1)\, [\omega_1\omega_3] + \beta_1[\omega_2\omega_3] = 0\,; \end{aligned} \tag{7,21}$$

итак, можно положить

$$\mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1(\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{33}) = \alpha_{11}\omega_1 + \alpha_{13}\omega_3\,. \tag{7,22}$$

Внешним дифференцированием третьего равенства (7,10) получаем

$$[\mathrm{d}a_{21} + a_{21}(\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}) + (\beta_1 a_{21} + a_{11} + c)\,\omega_1 + 2a_{21}\omega_2\omega_3] = 0. \tag{7,23}$$

Из (7,21) и (7,23) заключаем, что

$$[\mathrm{d}\alpha_1\omega_1\omega_3] = -\alpha_1[\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{33}\omega_1\omega_3]\,,$$
$$[\mathrm{d}a_{21}\omega_1\omega_3] = -a_{21}[\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}\omega_1\omega_3] + 2a_{21}[\omega_1\omega_2\omega_3]\,.$$

С другой стороны, (7,15) дает

$$\mathrm{d}\varepsilon = -2a_{21}\,\mathrm{d}\alpha_1 - 2\alpha_1\,\mathrm{d}a_{21}\,,$$

так что

$$[\mathrm{d}\varepsilon\omega_1\omega_3] = -\varepsilon[2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + 2\omega_2\omega_1\omega_3]\,. \tag{7,24}$$

Однако, (7,18) дает

$$[\mathrm{d}\varepsilon\omega_1\omega_3] = -\varepsilon[\omega_{00} - \omega_{11} + 2\omega_2\omega_1\omega_3]\,. \tag{7,25}$$

Сопоставляя (7,24) и (7,25), получаем

$$[\omega_{22} - \omega_{00}\omega_1\omega_3] = 0\,,$$

что противоречит первому равенству (7,20). Итак, рассматриваемый случай, как и сказано выше, невозможен.

8. В предыдущем параграфе мы показали, что если

$$[\omega_{20}\omega_3] \neq 0\,, \tag{8,1}$$

то должно быть $\beta_2 = 0$ или, согласно (7,1),

$$\omega_{23} = 0\,. \tag{8,2}$$

Напомним еще, что мы имеем равенство (7,3). Из (7,3) и (8,2) следует внешним дифференцированием

$$[\mathrm{d}\gamma + \gamma(\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33})\omega_3] + [\omega_{20}\omega_1] + \beta_1\gamma[\omega_1\omega_3] = 0, \tag{8,3}$$
$$[\omega_{20} - 3\alpha_1\gamma\omega_1\omega_3] = 0\,. \tag{8,4}$$

Введем снова величины a_{ik} удовлетворяющие (7,10). В настоящем случае следует из (3,8)

$$[\tau_{20} - 3\alpha_1 a_{21}\omega_1\omega_3] = 0\,. \tag{8,5}$$

Далее мы опять можем считать, что имеет место равенство (7,12). Из (8,5) следует, что при надлежащем выборе величины c имеет место

$$\tau_{20} = 3\alpha_1 a_{21}\omega_1 + c\omega_3\,. \tag{8,6}$$

Согласно (3,17), можно положить

$$\tau_{10} = c_1\omega_1 + 6\alpha_1 a_{21}\omega_2 + c_2\omega_3\,. \tag{8,7}$$

Подставляя в равенство (3,16) выражения (7,12), (8,6) и (8,7) для τ_{31}, τ_{20},

τ_{10}, получаем $a_{21} = 0$, так что K-линеаризирующая коллинеация Λ (1,5) принимает вид

$$\omega_1 \to 2a_{11}\omega_1 + a_{31}\omega_3, \quad \omega_2 \to 2a_{12}\omega_1 + 2a_{22}\omega_2 + a_{32}\omega_3 ,$$
$$\omega_3 \to 2\varepsilon\omega_1 + \eta\omega_3 .$$

Как мы подробно выяснили в статье VI и кратко повторили в § 2 настоящей статьи, коллинеация K не является вполне определенной. Из упомянутых рассуждений весьма легко заключить, что можно выбрать K таким образом, чтобы $a_{22} = 0$. Впрочем, такой выбор является инвариантным, так как его геометрический смысл дан тем, что образ прямой $[AA_2]$ (для которой $\omega_1 = \omega_3 = 0$) при K-линеаризирующей коллинеации Λ является неопределенным. Итак, мы можем считать, что $a_{21} = a_{22} = 0$, т. е. что

$$\tau_{21} = \tau_{22} - \tau_{00} = 0 , \tag{8,8}$$

после чего

$$\tau_{20} = c\omega_3 , \tag{8,9}$$

$$\tau_{31} = a_{11}\omega_1 + a_{31}\omega_3 , \quad \tau_{32} = a_{12}\omega_1 + a_{32}\omega_3 . \tag{8,10}$$

Кроме того, мы имеем $\tau_{10} = c_1\omega_1 + c_2\omega_3$, а (3,18) даст $c_1 = 0$, откуда

$$\tau_{10} = c_2\omega_3 . \tag{8,11}$$

Внешнее дифференцирование первого равенства (8,8) дает $[\tau_{20}\omega_1] = 0$, так что, согласно (8,9),

$$\tau_{20} = 0 . \tag{8,12}$$

Теперь равенства (6,4) для $n = 3$ тождественны с равенствами (7,1), (8,2) и (7,3), а равенства (6,5) — с равенствами (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (8,8), (8,12) и (8,11). Уравнения (6,4), как мы знаем, выражают, что речь идет о проективном изгибании параболического слоя поверхностей в S_3, который пока подчинен условию (8,1), а иначе является произвольным. При данном параболическом слое поверхностей условия совместимости системы (6,5) сохраняют для $n = 3$ вид (6,7), (6,8), так что проективное изгибание зависит от $2n + 2 = 8$ произвольных функций одного переменного. Итак результаты §§ 5 и 6 остаются в силе, пока $[\omega_{20}\omega_3] \neq 0$. Нужно еще только показать, что то же самое имеет место и в случае $[\omega_{20}\omega_3] = 0$ или

$$\omega_{20} = c\omega_3 . \tag{8,13}$$

Уравнения (7,1) и (7,3) остаются в силе; то же самое можем сказать о (7,10) и (7,12). Соотношения (3,8) и (3,17) позволяют положить

$$\tau_{20} = (3\alpha_1 a_{21} + \varepsilon\beta_2)\,\omega_1 + c\omega_3 , \tag{8,14}$$

$$\tau_{10} = c_1\omega_1 + 2(3\alpha_1 a_{21} + \varepsilon\beta_2)\,\omega_2 + c_2\omega_3 . \tag{8,15}$$

После этого, соотношения (3,16) и (3,18) дают

$$2\alpha_1 a_{21} + \varepsilon\beta_2 = 0 \,, \tag{8,16}$$

$$c_1 + 3\alpha_1 a_{22} = 0 \,. \tag{8,17}$$

Внешнее дифференцирование равенств (7,1) и третьего равенства (7,10) дает

$$[\mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1(\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{33})\, \omega_1\omega_3] = 0 \,,$$

$$[\mathrm{d}\beta_2 + \beta_2(\omega_{00} - \omega_{22}) - \omega_{20} + \beta_2^2\omega_2\omega_1\omega_3] = 0 \,,$$

$$[\mathrm{d}a_{21} + a_{21}(\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}) + 2\beta_2 a_{21}\omega_2\omega_1\omega_3] = 0 \,;$$

кроме того, надо вспомнить, что первое равенство (3,7) теперь принимает вид

$$[\mathrm{d}\varepsilon + \varepsilon(\omega_{00} - \omega_{11}) - (6\alpha_1 a_{21} + \varepsilon\beta_2)\, \omega_2\omega_1\omega_3] = 0 \,.$$

Дифференцируя (8,16), получаем после простых упрощений

$$\beta_2^2[\omega_1\omega_2\omega_3] = 0 \,,$$

так что $\beta_2 = 0$ или $\omega_{23} = 0$. Согласно (8,16) будет теперь $a_{21} = 0$, и надлежащий выбор коллинеации K дает снова $a_{22} = 0$, так что опять имеет место (8,8). Помимо этого, (8,17) дает $c_1 = 0$, так что, учитывая показанные уже равенства $\beta_2 = 0$, $a_{21} = 0$, получаем $[\tau_{10}\omega_3] = 0$, $[\tau_{20}\omega_3] = 0$. С другой стороны, внешнее дифференцирование первого равенства (8,8) дает $[\tau_{20}\omega_1] = = 0$, так что $\tau_{20} = 0$. Резюмируя все выведенные формулы, заключаем, что гипотеза (8,13) дает лишь частичный случай системы (6,4) + (6,5), что и требовалось доказать.

Résumé.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE DES CORRESPONDANCES ENTRE DEUX ESPACES VII

EDUARD ČECH, Praha.

(Reçu le 3 Décembre 1952.)

Au Mémoire VI de cette série, j'ai déjà défini la notion de déformation projective d'une couche σ d'hypersurfaces de l'espace S_n. Nous savons que cette notion comprend le *cas trivial* d'une correspondance entre S_n et S'_n qui se laisse décomposer en ∞^1 homographies d'hyperplans; ce cas trivial est exclu dans ce qui suit. Pour chaque point A de S_n, soit K l'homographie réalisante la déformation; K n'est pas déterminée sans ambiguïté, mais, pour chaque choix de K, toutes les droites passant par A et contenues dans l'hyperplan τ tangent en A à l'hypersurface correspondante de la couche σ, sont des droites

K-linéarisantes au sens de Mémoire I. Si l'on peut, pour chaque position de A, arranger le choix de K de telle façon que, pour chaque droite p passant par A (qui ne soit pas K-principale), la droite K-linéarisante de p soit toujours contenue dans l'hyperplan τ, je dirai que la déformation projective de la couche σ est *spéciale*. Le cas des déformations spéciales est très compliqué; les théorèmes d'existence relatifs seront donnés au Mémoire VIII. Ici je prouve: *Seulement les couches paraboliques* (v. plus loin) *sont susceptibles d'une déformation projective non singulière. Chaque couche parabolique de l'espace* S_n *admet des déformations projectives non spéciales et de telles déformations d'une couche parabolique donnée dépendent de* $2n + 2$ *fonctions arbitraires d'un argument.* La couche σ s'appelle *parabolique* si, en premier lieu, chaque hypersurface appartenante à la couche σ est enveloppe de ∞^1 hyperplans et que, deuxièmement, la transformée dualistique de la famille de tous les ∞^2 hyperplans tangents aux hypersurfaces de la couche est une surface sur laquelle les transformées dualistiques des hypersurfaces de la couche forment une famille de lignes *asymptotiques* (courbes ou droites).