Štefan Schwarz

К теории периодических полугрупп

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 3 (1953), No. 1, 7–21

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100067

Чехословацкий математический журнал, т. 3 (78) 1953

К ТЕОРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП

ШТЕФАН ШВАРЦ (Štefan Schwarz), Братислава.

(Поступило в редакцию 22/VII 1952 г.)

Периодической полугруппой мы называем такую полугруппу, в которой каждая последовательность вида (1) содержит лишь конечное число различных элементов. Для каждого идемпотента e такой полугруппы существует единственная максимальная группа, содержащая e в качестве единичного элемента. Для идемпотента e может, однако, существовать несколько максимальных полугрупп имеющих e в качестве своего единственного идемпотента. Содержанием настоящей статьи является изучение взаимной связи максимальных групп с такими максимальными полугруппами, равно как и их связи с т. наз. F-классами.

Под полугруппой мы подразумеваем непустое множество элементов S, между которыми определено ассоциативное умножение.

Мы говорим, что элемент a полугруппы S будет конечного порядка, если в последовательности

$$a, a^2, a^3, \ldots \tag{1}$$

содержится лишь конечное число различных элементов.

В настоящей статье мы будем заниматься только полугруппами, составленными исключительно из элементов конечного порядка. Такие полугруппы мы назовем (в соответствии с терминологией теории групп) *периодическими* полугруппами. Слово полугруппа (поскольку не будет оговорено иначе) будет в дальнейшем всегда означать периодическую полугруппу.

Рассмотрим подробнее последовательность (1). По предположению в ней имеется лишь конечное число различных элементов. Пусть $n > 1$ — наименьшее натуральное число, имеющее то свойство, что существует некоторое m, $m < n$, для которого имеет место $a^m = a^n$. Тогда последовательность (1) имеет всего лишь $n - 1$ различных элементов. Все степени выше $(n - 1)$-ой уже содержатся среди элементов $a^m, a^{m+1}, \ldots, a^{n-1}$. Последовательность (1) в более подробной записи выглядит так:

$$a, a^2, \ldots, a^{m-1} | a^m, \ldots, a^{n-1} | a^m, \ldots, a^{n-1} | \ldots \tag{2}$$

Известно и легко доказать (см. напр. *Шварц* [1]), что а) элементы $\{a, a^2, \ldots, \ldots, a^{n-1}\}$ образуют полугруппу, б) элементы $\{a^m, a^{m+1}, \ldots, a^{n-1}\}$ образуют группу $\mathfrak{g}_a$, единичным элементом которой является $e = a^{n-m}$. (Можно даже доказать, что $\mathfrak{g}_a$ является циклической группой.)

Итак, для любого элемента a периодической полугруппы существует такое число $\varrho \geqq 1$, что a^ϱ будет идемпотентом. (Число ϱ зависит, конечно, от элемента a.) Отсюда следует далее: частичная полугруппа периодической полугруппы будет снова периодической полугруппой и любая такая частичная полугруппа имеет сама хоть один идемпотент.

В дальнейшем нам придется изучать частичные полугруппы данной полугруппы S, содержащие только один идемпотент, в особенности некоторые ,,максимальные" полугруппы этого типа. Одновременно мы будем изучать связь этих полугрупп с некоторыми ,,максимальными" группами полугруппы S. В коммутативном случае, как выяснится, эти вопросы решаются особенно просто.

Наконец мы обратим внимание на связь между строением наших максимальных групп и полугрупп с так называемыми F-классами, введенными недавно *Грином* [1].

Замечание. Символ $\subset$ будет в дальнейшем (в отличие от символа $\subseteqq$) всегда означать *собственное* подмножество.

1. Максимальные полугруппы.

Определение 1. *Мы скажем, что элемент $a \in S$ принадлежит к данному идемпотенту e, если существует натуральное число $\varrho \geqq 1$ такое, что $a^\varrho = e$.*

Замечание. Каждый элемент $a \in S$ принадележит к одному и только к одному идемпотенту e. Доказательство: Принадлежность каждого элемента $a \in S$ к какому-либо идемпотенту следует из того, что в последовательности (1) всегда имеется идемпотент. Если далее для какого-либо элемента $a \in S$ имеет место $a^s = e_1$, $a^t = e_2$, $s \geqq 1$, $t \geqq 1$, где e_1, e_2 — идемпотенты, то имеет место и $(a^s)^t = e_1^t = e_1$, $(a^t)^s = e_2^s = e_2$, то есть $e_1 = e_2$, чтд.

Определение 2. *Пусть e — идемпотент. Мы скажем, что частичная полугруппа $P \subseteqq S$ является максимальной полугруппой, принадлежащей к идемпотенту e, если*

а) в P содержится единственный идемпотент e,

б) не существует полугруппы P', содержащей лишь один идемпотент, для которой имело бы место $P \subset P' \subseteqq S$.

Теорема 1. *Пусть e — идемпотент. Тогда существует хоть одна максимальная полугруппа P, принадлежащая к идемпотенту e.*

Доказательство. Если не существует ни одного элемента $a \in S$, для которого имеет место $a^{\varrho} = e$ с некоторым целым числом $\varrho > 1$, то само e является максимальной полугруппой. Если же существует элемент a и натуральное число $\varrho > 1$ такие, что $a^{\varrho} = e$, то множество $P_a = \{a, a^2, \ldots, \ldots, a^{\varrho-1}, e\}$ будет полугруппой, содержащей единственный идемпотент e. Если P_a не максимальна, существует полугруппа P_b такая, что $P_a \subset P_b$. Если же и эта последняя не максимальна, то существует полугруппа P_c такая, что $P_a \subset P_b \subset P_c$, и т. д. Пусть $P_a \subset P_b \subset P_c \ldots$ — упорядоченное множество полугрупп с одним идемпотентом e. Соединение этих полугрупп — полугруппа с единственным идемпотентом e. Пользуясь принципом максимума, известного под названием леммы *Цорна*, можно утверждать, что существует хоть одна максимальная полугруппа P, принадлежащая идемпотенту e (т. е. не содержащая идемпотентов отличных от e).

Замечание 1. Необходимо подчеркнуть, что множество P может оказаться тождественным с самим идемпотентом e.

Замечание 2. Каждый элемент полугруппы P принадлежит, очевидно, (в смысле определения 1) к идемпотенту e. Этим мы, однако, не утверждаем (да это и не соответствовало бы действительности), что множество всех принадлежащих к e элементов образует полугруппу.

Здесь полезно заметить (в связи с дальнейшим), что идемпотент e полугруппы P не будет, вообще говоря, единичным элементом полугриуппы P.

Наконец заметим: так как для каждого элемента $a \in S$ существует такое $\varrho \geqq 1$, что a^{ϱ} является идемпотентом, то ясно, что каждый элемент $a \in S$ принадлежит некоторой (хоть одной) максимальной полугруппе P. Последняя содержит множество $\{a, a^2, \ldots, a^{\varrho-1}, a^{\varrho}\}$ в качестве частичной полугруппы.

Теорема 2. *Две максимальные полугруппы P_α, P_β, принадлежащие к двум различным идемпотентам $e_\alpha \neq e_\beta$ не пересекаются.*

Доказательство. Образуем пересечение $\Delta = P_\alpha \cap P_\beta$. Если бы Δ не было пустым, оно было бы, очевидно, полугруппой (и, конечно, периодической полугруппой). Полугруппа Δ имела бы хоть один идемпотент e. Однако, P_α и P_β имеют только один идемпотент. Следовательно, было бы $e = e_\alpha$, $e = e_\beta$, т. е. $e_\alpha = e_\beta$, что противоречит предположению. Итак, пересечение Δ пусто.

Замечание 1. Теорема 2 не должна быть справедливой для полугрупп, не состоящих исключительно из элементов конечного порядка. Простейшим примером является полугруппа целых неотрицательных чисел $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, в которой умножение понимается в смысле обычного умножения чисел. Частичные полугруппы $\{0, 2, 3, 4, \ldots\}$ и $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ являются в смысле нашего определения максимальными полугруппами с идемпотентами 0 и 1. Их пересечение есть полугруппа $\{2, 3, 4, \ldots\}$, которая не является пустой.

Замечание 2. Из определения 2 и из доказательства 2, конечно, не вытекает, что для данного идемпотента e не может существовать несколько максимальных полугрупп. Мы покажем на примере, что это действительно возможно. Следующий пример некоммутативной полугруппы довольно сложен.[1] Автору не удалось найти пример, который был бы значительно проще этого.[2]

Пример 1. Пусть элементами полугруппы S являются матрицы $0, a_1, a_2, \ldots, a_8$.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$a_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операцией умножения является обычное умножение матриц. Таблица умножения имеет вид:

	0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_1	0	a_1	a_2	0	0	a_5	a_6	0	0
a_2	0	a_2	a_1	0	0	a_6	a_5	0	0
a_3	0	0	0	a_3	a_4	0	0	a_7	a_8
a_4	0	0	0	a_4	a_3	0	0	a_8	a_7
a_5	0	0	0	a_5	a_6	0	0	a_1	a_2
a_6	0	0	0	a_6	a_5	0	0	a_2	a_1
a_7	0	a_7	a_8	0	0	a_3	a_4	0	0
a_8	0	a_8	a_7	0	0	a_4	a_3	0	0

Идемпотентами являются матрицы $0, a_1, a_3$. Максимальные полугруппы имеют вид

$$P_0 = \{0, a_5, a_6\}, \quad P_0' = \{0, a_7, a_8\}, \quad P_1 = \{a_1, a_2\}, \quad P_3 = \{a_3, a_4\}.$$

К идемпотенту 0 принадлежат, очевидно, две максимальные полугруппы, а именно P_0 и P_0'. (Заметим вскользь, что полугруппы P_1, P_3 являются группами.)

Теперь мы охарактеризуем все максимальные полугруппы, принадлежащие к данному идемпотенту e.

Определение 3. *Пусть e — некоторый идемпотент. Обозначим множество всех элементов, принадлежащих к идемпотенту e, символом $K^{(e)}$.*

[1] Из теоремы 4 следует, что коммутативная полугруппа такого рода вообще невозможна.

[2] Этот пример является, между прочим, примером т. наз. вполне простой полугруппы.

Так как каждый элемент полугруппы S принадлежит к какой-либо максимальной полугруппе, то из этого сразу же следует

Теорема 3. *Множество $K^{(e)}$ является соединением всех максимальных полугрупп, принадлежащих к идемпотенту e.*

Пользуясь теоремой 2, мы получаем следующее

Следствие. Пусть $e_\alpha \neq e_\beta$ — два различных идемпотента. Тогда имеет место $K^{(e_\alpha)} \cap K^{(e_\beta)} = \emptyset$.

Замечание. Если полугруппа имеет нулевой элемент,[3]) который мы обозначим через 0, то $K^{(0)}$ будет, очевидно, множеством всех нульпотентных элементов.

Возникает вопрос: когда множество $K^{(e)}$ будет полугруппой? Другими словами, при каких условиях для каждого идемпотента e существует только *одна* максимальная полугруппа? Еще одна формулировка: когда S будет соединением непересекающихся максимальных полугрупп?

На этот вопрос можно ответить, вообще говоря, просто. Это будет тогда и только тогда, если выполнено следующее условие: если элементы a и b принадлежат к идемпотенту e, то и произведения ab и ba принадлежат к тому же идемпотенту e.

Этот случай наверное наступит в двух ,,крайних'' случаях, выраженных в теоремах 4 и 5.

Теорема 4. *Пусть S — коммутативная полугруппа. Тогда для каждого идемпотента e существует единственная максимальная полугруппа $P^{(e)}$. Следовательно*

$$S = \sum_{(e)} P^{(e)},$$

где полугруппы $P^{(e)}$ не имеют общих елементов.

Доказательство. Пусть a, b — два элемента, принадлежащих к идемпотенту e. Тогда имеются два целых числа $s \geq 1$, $t \geq 1$, такие, что $a^s = e$, $b^t = e$. Для элемента $ab = ba$ имеет место $(ab)^{st} = (a^s)^t \,.\, (b^t)^s = e^t \,.\, e^s = e$. Значит ab принадлежит к идемпотенту e. Множество $K^{(e)}$ есть полугруппа, чтд.

Определение 4. *Мы скажем, что полугруппа S вполне некоммутативна, если она содержит более одного идемпотента и если для любых двух идемпотентов $e_\alpha \neq e_\beta$ имеет место*

$$e_\alpha e_\beta \neq e_\beta e_\alpha.$$

Название объясняется тем, что центр Z такой полугруппы является

[3]) Нулевым элементом мы называем элемент $z \in S$, который для любого $a \in S$ удовлетворяет соотношению $a \,.\, z = z \,.\, a = z$. Обозначение $z = 0$ не может в дальнейшем привести к недоразумению.

пустым.[4]) Доказательство этого утверждения проведем от противного. Пусть Z не будет пустым и a — некоторый элемент $a \in Z$. Пусть a принадлежит к идемпотенту e, т. е. для подходящего $\varrho \geqq 1$ имеет место $a^\varrho = e$. Пусть b — произвольный элемент $\in S$, не принадлежащий к идемпотенту e. Поскольку наша полугруппа является периодической, существует еще другой идемпотент e_1 и натуральное число $\tau \geqq 1$ такое, что $b^\tau = e_1 \neq e$. Если бы было $ab = ba$, то имело бы, очевидно, место и (в чем можно убедиться простой индукцией) $a^r b^t = b^t a^r$ для любых $r \geqq 1$, $t \geqq 1$. Положим $r = \varrho$, $t = \tau$. Имеем $a^\varrho b^\tau = b^\tau a^\varrho$, т. е. $ee_1 = e_1 e$, что противоречит предположению.

Теорема 5. *Пусть S вполне некоммутативна. Тогда для каждого идемпотента $e \in S$ существует одна и только одна максимальная полугруппа $P^{(e)}$. В таком случае будет снова $S = \sum\limits_{(e)} P^{(e)}$, где $P^{(e)}$ — непересекающиеся полугруппы.*

Доказательство. Пусть a, b — два элемента, принадлежащие к идемпотенту e, т. е. $a^s = e$, $b^t = e$ для целых $s \geqq 1$, $t \geqq 1$. Мы докажем, что и ab (а также ba) принадлежит к идемпотенту e. Применим и здесь доказательство от противного. Пусть ab принадлежит к идемпотенту e_1, т. е. $(ab)^u = e_1 \neq e$ для некоторого подходящего $u \geqq 1$. Мы имеем

$$e_1 e = (ab)^u \cdot e = (ab)(ab) \ldots (ab) \cdot e.$$

Так как элемент $e = a^s = b^t$, очевидно, коммутативен с a и с b, то последнее произведение равно $e(ab)(ab) \ldots (ab) = e(ab)^u = ee_1$. Соотношение $e_1 e = ee_1$ противоречит предположению, что и доказывает нашу теорему.

Замечание 1. Нетрудно доказать обратное утверждение: Если полугруппу S можно выразить в виде суммы непересекающихся полугрупп, из которых каждая имеет по одному идемпотенту, то это разложение однозначно, и полугруппы максимальны.

Замечание 2. На примерах можно, конечно, легко показать, что существуют и иные типы полугрупп кроме тех, которые мы привели в теоремах 4 и 5 и которые можно разложить указанным образом на сумму максимальных полугрупп. Таким примером является

Пример 2. Пусть S — полугруппа, элементами которой являются постоянные и полиномы вида $ax + b \pmod 4$, $(a, b = 0, 1, 2, 3)$. Символом $\odot$ обозначим умножение, определенное соотношением

$$(ax + b) \odot (cx + d) = acx + ad + b.$$

Идемпотентами являются элементы $0, 1, 2, 3, x$. Здесь будет например, $1 \odot 2 = 1$, $2 \odot 1 = 2$, $1 \odot x = x \odot 1 = 1$. Значит, полугруппа не будет

[4]) Вполне некоммутативная полугруппа, очевидно, не может содержать нулевого элемента.

ни коммутативной, ни вполне некоммутативной. Максимальные полугруппы имеют вид

$$P^{(1)} = \{1, 2x + 3\},\ P^{(2)} = \{2, 2x + 2\},\ P^{(3)} = \{3, 2x + 1\},\ P^{(0)} = \{0, 2x\},$$
$$P^{(x)} = \{x, x + 1,\ x + 2,\ x + 3,\ 3x + 1,\ 3x + 2,\ 3x + 3,\ 3x\}.$$

Как видно, они взаимно не пересекаются и их соединение исчерпывает всю полугруппу S.

2. Максимальные группы.

Аналогично определению 2 введем понятие максимальной группы.

Определение 5. *Пусть e — идемпотент. Мы скажем, что группа $G \subseteqq S$ является максимальной группой, принадлежащей к идемпотенту e, если*

а) e содержится в G,

б) не существует группы G' такой, что $G \subset G' \subseteqq S$.

Прежде всего ясно, как и в теореме 1, что для каждого идемпотента e существует хоть одна максимальная группа, имеющая e в качестве единичного элемента. Может, конечно, случиться, что e будет само максимальной группой. А именно, если S содержит нулевой элемент 0, то элемент $\{0\}$ всегда будет сам одной из максимальных групп. Но здесь, вообще, справедлива значительно более сильная (см. *Шварц* [1]):

Теорема 6. *Пусть e — идемпотент. Тогда существует одна и только одна максимальная группа $G^{(e)}$, имеющая e в качестве единичного элемента.*

Доказательство. От противного. Пусть $G_1^{(e)}$, $G_2^{(e)}$ — две различные максимальные группы, принадлежащие к идемпотенту e. Построим композицию $G = [G_1^{(e)}, G_2^{(e)}]$. Эта композиция будет полугруппой, содержащей элемент e. Элемент e будет, очевидно, единичным элементом для каждого элемента ϵG_1.[5] Теорема будет доказана, если мы докажем, что G является также группой. Ибо тогда было бы $G_1^{(e)} \subset G$, $G_2^{(e)} \subset G$, что противоречит предположению о максимальности групп $G_1^{(e)}$, $G_2^{(e)}$. Для доказательства, что G — группа, достаточно доказать, что уравнения $ax = e$ и $ya = e$ имеют в G решение для каждого элемента $a \in G$. Пусть напр. $a = pqrs$, где p, q, r, s являются элементами $G_1^{(e)}$ или $G_2^{(e)}$. Так как это элементы одной или другой группы, то существуют всегда и элементы $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, $\bar{s}$ из $G_1^{(e)}$ или $G_2^{(e)}$ такие, что имеет место $p\bar{p} = q\bar{q} = r\bar{r} = s\bar{s} = e$. Элемент $x = \bar{s}\bar{r}\bar{q}\bar{p} \in G$ является, очевидно, решением уравнения $ax = e$. Аналогично для уравнения $ya = e$. Теорема 6 доказана.

Замечание. Группа $G^{(e)}$ содержится, очевидно, целиком в $K^{(e)}$. Положение схематически представлено на рис. 1. Элементы e_α, e_β, e_γ, ...

[5]) Сравни с замечанием 2 за теоремой 1.

суть различные идемпотенты. Множества P, P', P'', ... означают максимальные полугруппы, принадлежащие к отдельным идемпотентам, $G^{(e)}$ означает максимальную группу, принадлежащую к e. Множество $K^{(e)}$ является соединением всех максимальных полугрупп, принадлежащих к e. Полугруппа S есть соединение всех множеств $K^{(e)}$. Если S имеет нулевой элемент 0, то $G^{(0)}$, конечно, тождественно равна единственному элементу $\{0\}$.

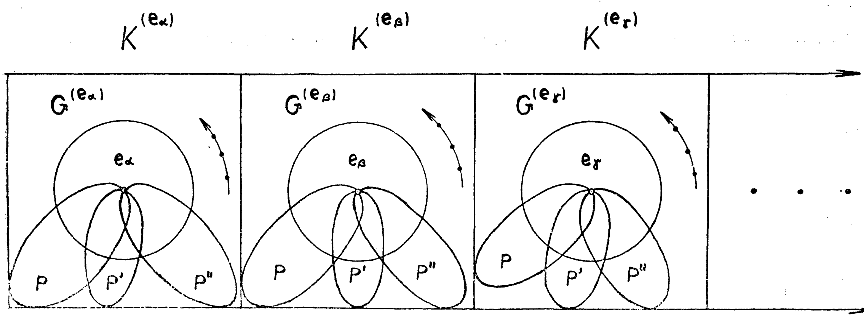

Рис. 1.

Обратим теперь внимание на разницу между элементами, входящими в $G^{(e)}$ и элементами, входящими в $K^{(e)} - G^{(e)}$.

Рассмотрим произвольный элемент $a \in S$. Вместе с a в S входят и все члены последовательности (1):

$$a, a^2, a^3, \ldots, a^m, \ldots$$

Рассуждение, которое нас привело к (2), приводит нас к определению:

Определение 6. *Мы скажем, что элемент $a \in S$ имеет предпериод длины $m - 1 \geqq 1$, если самая низкая степень элемента a, повторяющаяся в последовательности (2), есть a^m.*

Если $m = 1$, мы говорим, что a не имеет предпериода.

Ясно, что ни одни элемент из группы $\mathfrak{g}_a = \{a^m, a^{m+1}, \ldots, a^{n-1}\}$ не имеет предпериода. Наоборот, каждый элемент из совокупности элементов $\{a, a^2, \ldots, a^{m-1}\}$ имеет предпериод длины $\geqq 1$.

Пусть теперь будет $b \in K^{(e)}$. Если b не имеет предпериода, то элементы $\{b, b^2, \ldots, b^{n-1} = e\}$, где $n \geqq 1$ есть некоторое целое положительное число, образуют, очевидно, циклическую группу $\mathfrak{g}_b$ с производящим элементом b. Из определения группы $G^{(e)}$ и из доказательства теоремы 6 следует $\mathfrak{g}_b \subseteq G^{(e)}$. Пусть, наоборот, элемент $b \in K^{(e)}$ имеет предпериод точной длины $m - 1$, где $m > 1$. Тогда нетрудно доказать, что обязательно будет

b non $\epsilon\ G^{(e)}$. Пусть n — целое число $\geqq m$ такое, что $b^m = b^n$ (из определения числа m следует, что таких чисел $n > m$ бесконечно много). Если бы b входило в $G^{(e)}$, то в эту группу входили бы и все степени элемента b. В группе $G^{(e)}$ справедливо, однако, правило сокращения; тогда имело бы место и $b^{m-1} = b^{n-1}$, т. е. b имело бы предпериод длины $m - 2$, что противоречит предположению.

Отсюда следует

Теорема 7. *Группа $G^{(e)}$ состоит из тех и только из тех элементов $\epsilon\ K^{(e)}$, которые не имеют предпериода.*

Этот результат допускает и такую формулировку:

Теорема 8. *Для группы $G^{(e)}$ имеет место следующее соотношение:*

$$G^{(e)} = K^{(e)} \,.\, e = e \,.\, K^{(e)}.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что те и только те элементы $x \in K^{(e)}$ не обладают предпериодом, которые можно выразить в виде $x = xe$.

а) Пусть x не имеет предпериода. Тогда элементы $\{x, x^2, \ldots, x^{s-1}\}$, где $s \geqq 1$ — наименьшее число, для которого $x^s = x$, образуют группу, единичным элементом которой является x^{s-1}. Элемент x^{s-1} будет поэтому идемпотентном $\epsilon\ K^{(e)}$. Так как единственным идемпотентом $K^{(e)}$ является e, то будет $x^{s-1} = e$. Очевидно $x = x^s = x^{s-1} \,.\, x = ex = xe$, чтд.

б) Пусть, наоборот, x имеет предпериод точной длины $m - 1 \geqq 1$. Тогда (как и раньше) элементы $\{x^m, x^{m+1}, \ldots, x^{s-1}\}$ (где $s > m$ — наименьшее число, для которого $x^s = x^m$) образуют группу $\mathfrak{g}_x$. Ее единичным элементом будет x^{s-m}. Так как $K^{(e)}$ имеет только один идемпотент, будет снова $x^{s-m} = e$. Если бы было можно написать $x = xe$, то имело бы место $x = x \,.\, x^{s-m}$, т. е. $x = x^{s-m+1}$. Но это значило бы, что в последовательности

$$x, x^2, x^3, \ldots$$

элементы повторяются, начиная с первого, т. е. что x не имеет предпериода. Это противоречит предположению.

Из теорем 6, 7, 8 непосредственно следует

Теорема 9. *Полугруппа S является суммой максимальных полугрупп тогда и только тогда, если ни один элемент $\epsilon\ S$ не имеет предпериода.*

В общем случае мы видели, что, конечно, $K^{(e)} \neq G^{(e)}$ и что $K^{(e)}$ является только соединением максимальных полугрупп $P, P', P'', \ldots$ принадлежащих к идемпотенту e. Каждая из полугрупп $P, P', P'', \ldots$ содержит в свою очередь некоторую максимальную группу (с единичным элементом e). Более точно это выражает

Теорема 10. *Пусть $P^{(e)}$ — произвольная максимальная полугруппа, принадлежащая к идемпотенту e. Пусть $G^{(e)}$ — максимальная группа полугруппы S, принадлежащая к e. Тогда*

а) Пересечение $P^{(e)} \cap G^{(e)}$ будет максимальной группой полугруппы $P^{(e)}$,

б) имеет место $P^{(e)} \cap G^{(e)} = P^{(e)} \cdot e$.

Доказательство. а) Ясно, что пересечение $T = P^{(e)} \cap Q^{(e)}$ является полугруппой. Ни один элемент полугруппы T не имеет предпериода. Следовательно (по теореме 9), T будет суммой (максимальных) групп. Но T обладает только одним идемпотентом. Значит, T есть группа. Если бы $P^{(e)}$ содержало какую-либо группу $\supset T$, то $P^{(e)}$ содержало бы обязательно некоторый элемент, не имеющий предпериода и не лежащий в $G^{(e)}$. Но это невозможно, ибо $G^{(e)}$ является в точности совокупностью всех элементов $\in K^{(e)}$, не обладающих предпериодом.

б) Утверждение $T = P^{(e)} \cdot e$ вытекает непосредственно из теоремы 8, если ее применить к случаю полугруппы $P^{(e)}$.

3. F-классы.

В этом последнем разделе мы покажем, в какой связи стоят наши максимальные группы и полугруппы данной полугруппы S с так называемыми F-классами, введенными недавно *Грином* [1].

Определение 7. *Мы скажем, что элемент x порождает главный идеал и тот I, если имеет место $I = \{x, Sx, xS, SxS\}$.*

Определение 8. *Множество всех элементов $a \in S$, порождающих один же идеал I, мы назовем классом F_a.*

Вся полугруппа S распадается таким образом на взаимно непересекающиеся F-классы.

Теорема 11. *Пусть G — произвольная группа $G \subseteqq S$. Тогда все элементы группы G принадлежат к одному и тому же F-классу.*

Доказательство. Пусть a, $b \in G$. Элемент a порождает идеал $I_a = \{a, Sa, aS, SaS\}$. Так как b лежит в G, то существуют элементы c_1, $c_2 \in G \subseteqq S$ такие, что $b = ac_1$, $b = c_2a$. Следовательно,

$$I_b = \{b, Sb, bS, SbS\} = \{ac_1, Sc_2a, ac_1S, Sac_1S\} \subseteqq \{aS, Sa, aS, SaS\} \subseteqq I_a,$$

т. е. $I_b \subseteqq I_a$. Аналогично докажем, что $I_a \subseteqq I_b$. Итак, $I_a = I_b$.

Следствие. Каждая *максимальная* группа в целом всегда принадлежит к одному и тому же F-классу.

На простых примерах можно убедиться, что для максимальных полугрупп это следствие не будет иметь места. Другими словами: максимальная полугруппа не обязательно должна попасть целиком в тот же F-класс (даже и в коммутативном случае).

Возникает, наоборот, вопрос: не является ли максимальная полугруппа суммой некоторых F-классов? Эта теорема (в некоммутативном случае) также не обязательно имеет место. Она не имеет места даже в том (некоммутативном) случае, когда S представляет сумму взаимно непересекающихся максимальных полугрупп. В этом легко убедиться на примере полугруппы S из примера 2.

В этом примере F-классами являются следующие множества: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{2x, 2x+2\}$, $\{2x+1, 2x+3\}$, $\{x, x+1, x+2, x+3, 3x, 3x+1, 3x+2, 3x+3\}$. Класс $\{2x, 2x+2\}$ имеет непустое пересечение с двумя максимальными полугруппами, а именно

$$\{2x, 2x+2\} \cap P^{(2)} = \{2x+2\},$$
$$\{2x, 2x+2\} \cap P^{(0)} = \{2x\}.$$

Однако, положение существенно упрощается для *коммутативных* полугрупп. Докажем прежде всего

Теорему 12. *Пусть S — коммутативная полугруппа. F-класс, имеющий хоть один идемпотент, является группой (и имеет поэтому всего лишь один идемпотент).*

Доказательство.[6]) Пусть F-класс имеет идемпотент e и пусть он не совпадает с самым элементом $\{e\}$. Пусть $a \in F$.

а) Так как $(e, Se) = (a, Sa)$, то существует $\bar{a}$ такое, что $a = \bar{a}e$. Отсюда $ae = (\bar{a}e)e = \bar{a}e = a$. Т. е. e является единицей для каждого злемента $a \in F$.

б) Пусть $a \in F$, $b \in F$. Тогда в силу определения $(a, Sa) = (b, Sb) = (e, Se)$. Умножим уравнение $(a, Sa) = (e, Se)$ на элемент b. Имеем $(ab, Sab) = (eb, Seb) = (b, Sb)$. Это значит, что элемент ab входит в F. Значит F — полугруппа.

в) Покажем, наконец, что уравнение $ax = e$ имеет решение $x \in F$ для любого $a \in F$. Так как $(a, Sa) = (e, Se)$, то существует $u \in S$ такое, что $e = ua$. Значит, имеет место и $e \,.\, e = eu \,.\, ea$, т. е. $e = eue \,.\, a$. Теперь нам достаточно только доказать, что $x = eue$ входит в F. Очевидно,

$$Se = Sa(eue) \subseteq S^2(eue) \subseteq Sx = Seue \subseteq Se,$$

т. е. $Sx = Se$. Так как, далее, $e = ax \in Sx$ и $x = eue \in Se$, то будет $(e, Se) = (x, Sx)$. Итак, x входит в F, чтд.

Из теорем 11 и 12 непосредственно следует, что F-класс или не содержит идемпотента[7]), или является максимальной группой. В частности имеем

---

[6]) Идея доказательства по существу совпадает с идеей доказательства теоремы 7 Грина (*Green* [1], стр. 169—170).

[7]) Мы убедимся на примерах, что этот случай может действительно наступить.

Теорему 13. *Пусть S — коммутативная полугруппа. Тогда каждая максимальная группа будет сама по себе F-классом.*

Замечание. Теорема 13 не обязательно верна для некоммутативных полугрупп.

По теореме 4 в коммутативном случае полугруппа S является суммой непересекающихся максимальных полугрупп, каждая из которых имеет один идемпотент. Исследуем теперь более подробно структуру этих максимальных полугрупп.

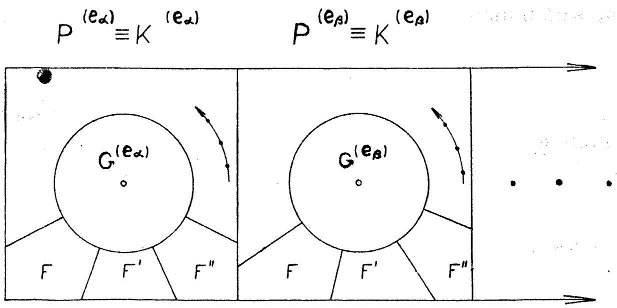

Рис. 2.

Теорема 14. *Пусть S — коммутативная полугруппа. Тогда каждая максимальная полугруппа $P^{(e)}$ будет суммой (непересекающихся) F-классов полугруппы S.*

Доказательство. Достаточно доказать: все элементы одного и того же фиксированного класса F_a попадут в одну и ту же максимальную полугруппу $P^{(e)}$.

Пусть $a \neq b$ входят в класс F. Так как оба они конечного порядка, то существуют такие два целых числа $\varrho_1 > 0$, $\varrho_2 > 0$, что $a^{\varrho_1} = e_1$, $b^{\varrho_2} = e_2$, где e_1, e_2 — идемпотенты. Нужно доказать, что $e_1 = e_2$. Так как по предположению $(a, Sa) = (b, Sb)$, то существуют такие элементы x, y, что $a = xb$, $b = ya$. Возведя в степень ϱ_1, ϱ_2, получим $a^{\varrho_1\varrho_2} = x^{\varrho_1\varrho_2} \,.\, b^{\varrho_1\varrho_2}$, $b^{\varrho_1\varrho_2} = y^{\varrho_1\varrho_2} \,.\, a^{\varrho_1\varrho_2}$, т. е. $e_1 = x'e_2$, $e_2 = y'e_1$, где $x' \in S$, $y' \in S$. Следовательно,

$$Se_1 = Sx'e_2 \subseteqq S^2e_2 \subseteqq Se_2,$$

т. е.

$$Se_1 = (e_1, Se_1) \subseteqq Se_2 = (e_2, Se_2).$$

Аналогично получаем $(Se_2, e_2) \subseteqq (Se_1, e_1)$. Следовательно $(e_1, Se_1) = (e_2, Se_2)$. Это значит: идемпотенты e_1, e_2 входят в один и тот же класс F_1 (который, конечно, в общем случае отличается от класса F!!). По теореме 12 это возможно только тогда, если $e_1 = e_2$, чтд.

Замечание. Положение схематически изображено на рис. 2. Символы F, F', F'', ... здесь означают различные F-классы.

Классы, образующие данную максимальную полугруппу имеют еще одно свойство, выраженное теоремой 16. Для формулировки этой теоремы нам понадобится новое понятие, т. наз. регулярность. Следующее определение было дано в своей сущности И. фон *Нейманом* (см. *Грин* [1], стр. 169).

Определение 9. *Мы называем элемент $a \in S$ регулярным тогда и только тогда, если существует $z \in S$ такое, что $aza = a$.*

В коммутативном случае свойство регулярности совпадает с понятием несуществования предпериода. Действительно, верна

Теорема 15. *Пусть полугруппа S коммутативна. Элемент $a \in S$ регулярен тогда и только тогда, если у него нет предпериода.*

Доказательство. а) Пусть a не имеет предпериода. Тогда a лежит в некоторой максимальной группе $G^{(e)}$ с единичным элементом e. Отыщем в $G^{(e)}$ элемент $z = \bar{a}$, удовлетворяющий соотношению $\bar{a}a = e$. Тогда будет, очевидно, $a\bar{a}a = a$. Следовательно, a регулярно.

б) Пусть a имеет предпериод. Покажем, что элемент $z \in S$, который удовлетворял бы соотношению $aza = a$, не может существовать. Доказательство проведем от противного. Предположим, что такое z существует. Из уравнения $az \,.\, az = az$ следует, что элемент az является идемпотентом. Обозначим его знаком e^*. Элемент e^* входит в некоторую максимальную группу $G^{(e^*)}$, которая сама по себе образует (по теореме 13) класс F_{e^*}. Имеем

$$Se^* = Saz \subseteqq S^2a \subseteqq Sa = Saza \subseteqq S^2az = S^2e^* \subseteqq Se^*.$$

Из написанного видно, что в этом уравнении везде имеет место знак равенства. В частности, значит, получаем $Sa = Se^*$. Так как, далее, $a \in Se^*$, $e^* \in Sa$, то $(a, Sa) = (e^*, Se^*)$. Следовательно, a входит в F_{e^*}, то есть в $G^{(e^*)}$. Элемент a лежит в некоторой максимальной группе и не может поэтому иметь предпериод. Это противоречит предположению и теорема 15 доказана.

Замечание 1. Для некоммутативных полугрупп теорема 15 неверна. Это видно, напр., уже из приведенного нами выше примера 1. Элемент a_5 регулярен, так как имеет место $a_5a_7a_5 = a_5$. Поскольку, однако, $a_5^2 = 0$, элемент a_5 имеет предпериод.

Замечание 2. Полугруппу, каждый элемент которой регулярен, Грин называет регулярной. Из теоремы 9 и 15 следует: коммутативная полугруппа регулярна тогда и только тогда, если она является суммой максимальных групп. (Можно даже ограничиться требованием, чтобы она была суммой взаимно непересекающихся групп, так как в этом случае группы будут автоматически максимальными.)

Из основного предположения, что S содержит только элементы конечного порядка, следует, что какая-то степень каждого элемента будет идемпотентом и поэтому входит в некоторую максимальную группу $G^{(e)}$. Введем более тонкое понятие:

Определение 10. *Пусть s — наименьшее целое число такое, что a^s регулярно. Число $s - 1$ мы называем индексом иррегулярности элемента a.*

Регулярные элементы получают по этому определению индекс иррегулярности, равный нулю.

Теорема 16. *Пусть полугруппа S коммутативна. Все элементы одного и того же F-класса имеют одинаковый индекс иррегулярности.*

Доказательство. а) Пусть a, b — два элемента одного и того же класса F. Пусть ϱ — целое число, $\varrho > 0$. Покажем прежде всего, что и элементы a^ϱ, b^ϱ входят в один и тот же класс F_1 (в общем случае отличный от F!). По предположению имеем $(a, Sa) = (b, Sb)$, т. е. существуют $x, y \in S$ такие, что $a = bx$, $b = ay$. Пусть a^ϱ входит в класс F_1. Элемент a^ϱ порождает идеал $I_1 = (a^\varrho, Sa^\varrho)$, елемент b^ϱ порождает идеал $I_2 = (b^\varrho, Sb^\varrho)$. Очевидно, имеет место

$$I_2 = (b^\varrho, Sb^\varrho) = (a^\varrho y^\varrho, Sa^\varrho y^\varrho) \subseteqq Sa^\varrho \subseteqq (a^\varrho, Sa^\varrho) = I_1.$$

Точно так же будет, конечно,

$$I_1 = (a^\varrho, Sa^\varrho) = (b^\varrho x^\varrho, Sb^\varrho x^\varrho) \subseteqq Sb^\varrho \subseteqq (b^\varrho, Sb^\varrho) = I_2,$$

т. е. $I_1 = I_2$. Значит, и b^ϱ входит в класс F_1.

б) Пусть элемент a (а значит и b) принадлежит к идемпотенту e. Пусть $s - 1$ означает индекс иррегулярности элемента a, т. е. $a^s \in G^{(e)}$, но a^{s-1} non $\in G^{(e)}$. По только что доказанному будет также $b^s \in G^{(e)}$. Не может быть, чтобы тоже $b^{s-1} \in G^{(e)}$, ибо, согласно а), тогда и a^{s-1} входило бы в $G^{(e)}$ вопреки предположению. Итак, b имеет тот же индекс иррегулярности $s - 1$, как и a, чтд.

Замечание. На простых примерах можно, конечно, убедиться, что теорему 16 нельзя обратить. Два элемента, лежащих в одной и той же максимальной полугруппе и имеющих одинаковый индекс иррегулярности, не обязательно входят в один и тот же F-класс.

Summary.

CONTRIBUTION TO THE THEORY OF TORSION SEMIGROUPS.

ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava.

(Received July 22, 1952.)

By a semigroup we mean a non-vacuous set S of elements closed under an associative univalent operation.

A semigroup is called a torsion semigroup if for every $a \in S$ the sequence (1) contains only a finite number of different elements.

Only torsion semigroups are treated in this paper.

A torsion semigroup contains always idempotents. To every idempotent $e \in S$ there exists always at least one semigroup $P^{(e)}$ — called maximal semigroup belonging to e — having the following properties: a) $P^{(e)}$ contains the single idempotent e, b) there does not exist a semigroup P' having the single idempotent e with the property $P^{(e)} \subset P' \subseteqq S$.

Two maximal semigroups belonging to two different idempotents have no element in common.

The semigroup given in Example 1 shows that there can exist also more than one maximal semigroups belonging to a given idempotent e.

On the other side there are classes of semigroups in which there exists just one maximal semigroup belonging to every idempotent $e \in S$. Two "extrem" classes of semigroups have this property, namely: a) the commutative semigroups, b) the totally non-commutative semigroups (i. e. semigroups in which every couple of idempotents does not commute). Such semigroups can be written in the form $S = \sum_e P^{(e)}$, where $P^{(e)}$ are disjoint semigroups, each containing only one idempotent.

Analogously as above we define a maximal group $G^{(e)}$ belonging to a given idempotent e. It is shown that there exists just one maximal group $G^{(e)}$ belonging to every idempotent e. It is clearly always $G^{(e)} \subseteqq P^{(e)}$. In section 2 some theorems concerning the connection between $P^{(e)}$ and $G^{(e)}$ (including a new proof of an older result of the author) are given.

In section 3 we treat mostly commutative semigroups.

An element x is called to generate the ideal I if $I = \{x, Sx, xS, SxS\}$. The set of all elements $\in S$ generating the same ideal I is called (according to GREEN) an F-class. The semigroup is decomposed in a set of F-classes. It is shown (in Theorem 14) that in the commutative case every maximal semigroup $P^{(e)}$ is the sum of (disjoint) F-classes of S, one of the classes being just the maximal group $G^{(e)}$. Some other properties of the F-classes in connection with maximal groups and semigroups are proved.

ЛИТЕРАТУРА

J. A. Green: [1] On the structure of semigroups, Annals of Mathematics, *54* (1951), 163—172.

Št. Schwarz: [1] Teória pologrúp, Sborník prác Prírodovedeckej fak. Slov. univerzity, Bratislava, *6* (1943), str. 61.