Czechoslovak Mathematical Journal

L. Fuchs

Об абелевых группах, в которых классы изоморфных собственных подгрупп одинаковое число подгрупп

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 2 (1952), No. 4, 387–390

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100058`

ОБ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ, В КОТОРЫХ КЛАССЫ ИЗОМОРФНЫХ СОБСТВЕННЫХ ПОДГРУПП СОДЕРЖАТ ОДИНАКОВОЕ ЧИСЛО ПОДГРУПП

Л. ФУКС (L. Fuchs), Будапешт.

(Поступило в редакцию 12/VII 1952 г.)

Множество всех собственных подгрупп данной группы может быть разбито на классы следующим образом: две подгруппы принадлежат к одному и тому же классу тогда и только тогда, когда они изоморфны. *Т. Селе* недавно показал, что группа, содержащая только одну подгруппу в каждом классе, изоморфна некоторой подгруппе группы всех рациональных чисел mod 1.

Автор рассматривает аналогичную проблему, состоящую в разыскании всех абелевых групп, для которых упомянутые выше классы содержат одинаковое конечное число $k > 1$ подгрупп. Оказывается, что предположение $k > 1$ накладывает сильное ограничение на искомые группы: единственными абелевыми группами, удовлетворяющими этим условиям, являются конечные абелевы группы типа (p, p) или (p, p, p).

Недавно Т. Селе[1]) отыскал все группы, не содержащие различных изоморфных подгрупп; он доказал, что эти группы изоморфны подгруппам группы всех рациональных чисел mod 1 (т. е. группы всех комплексных корней из единицы). Представляется естественным, поставить следующую проблему: Рассмотрим множество всех собственных подгрупп[2]) группы G и поместим две подгруппы из G в тот же класс тогда и только тогда, когда они изоморфны. Нужно найти те группы G, для которых эти классы содержат одинаковое конечное число $k > 1$ подгрупп.

Целью настоящей статьи является решение этой проблемы для случая коммутативных групп. Оказывается, что только два семейства групп обладают указанным свойством, так что решение здесь значительно беднее, чем в случае $k = 1$.

---

[1]) *T. Szele:* On groups with atomic layers, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **3** (1952); находится в печати.

[2]) Т. е. мы исключаем всю группу G и нулевую группу, состоящую из единственного элемента 0. (Мы записываем групповую операцию в виде сложения.)

Теорема. *Пусть G — абелева группа (в аддитивной записи), в которой классы изоморфных собственных подгрупп состоят из одинакового конечного числа $k > 1$ подгрупп. Тогда G будет конечной абелевой группой типа*[3]) (p, p) *или* (p, p, p), *где* p — *простое число.*

Покажем прежде всего, что G является группой с кручением. В самом деле, существование элемента a бесконечного порядка влекло бы за собой существование бесконечного числа изоморфных собственных подгрупп, а именно, образованных соответственно элементами $2a$, $3a$, $4a$, ...

G является p-группой. Действительно, если бы G содержала элементы, порядок которых не являлся бы некоторой степенью одного и того же простого числа p, то G содержала бы циклические подгруппы порядка p и q, где p и q — различные простые числа. По предположению число этих групп есть k. Итак, G содержит $k^2 > k$ подгрупп типа (p, q), что противоречит допущению.

G является конечной элементарной[4]) p-группой. В самом деле, рассмотрим множество всех элементов из G, порядок которых есть p. Это множество вместе с 0 образуют подгруппу H из G. Ясно, что H будет конечной абелевой группой, откуда H будет типа $(p, p, \ldots, p)$ с n прямыми слагаемыми порядка p. Мы имеем $n \geqq 2$, так как из $n = 1$ вытекало бы, что или сама G принадлежит типу (p) или существует только одна собственная подгруппа из G, порядок которой есть p. Принимая во внимание, что H — единственная подгруппа этого типа из G, мы видим, что H не может быть собственной подгруппой G, т. е. $H = G$. Отсюда следует, что G будет типа $(p, p, \ldots, p)$.

Очевидно, G содержит $k = \dfrac{p^n - 1}{p - 1}$ различных подгрупп порядка p. Любая пара этих подгрупп образует подгруппу G типа (p, p), но каждую группу типа (p, p) можно представить в виде прямой суммы двух ее подгрупп порядка p, причем $\dbinom{p+1}{2}$ различными способами (ибо она содержит $p + 1$ различных подгрупп порядка p). Следовательно, G содержит

[3]) Вспомним, что конечная абелева группа типа $(m, n, \ldots, t)$, где числа означают степени простых чисел, являются прямой суммой циклических групп порядка $m, n, \ldots, t$, соответственно.

[4]) Элементарная абелева группа определяется как абелева группа, элементы которой (отличные от нуля) суть порядка p.

$$l = \binom{k}{2} : \binom{p+1}{2} = \frac{p^n - 1}{p - 1} \cdot \frac{p^n - p}{p - 1} \cdot \frac{1}{p(p+1)} =$$
$$= \frac{(p^n - 1)(p^{n-1} - 1)}{(p-1)(p^2 - 1)}$$

различных подгрупп типа (p, p). Теперь возможны два случая: или $l = k$, или сама G будет типа (p, p) (т. е. $l = 1$). В первом случае мы получаем $n = 3$, т. е. G будет типа (p, p, p). Так как оба типа групп удовлетворяют условиям теоремы, то доказательство закончено.

Заметим, что не всякое натуральное число большее 1 может выступать в роли числа k подгрупп в классах изоморфных собственных подгрупп некоторой группы, для которой справедлива наша теорема. Действительно, приведенное выше доказательство показывает, что k имеет всегда вид $p + 1$ или $p^2 + p + 1$, где p — простое число.[5])

Не лишено интереса и следующее простое видоизменение нашей проблемы: Какие (абелевы) группы мы получим, если в формулировке нашей проблемы заменить слово „подгруппы" выражением „циклические подгруппы"? Что это новое условие выполняется всеми группами типа $(p, p, \ldots, p)$, является тривиальным фактом. Теперь мы покажем, что никакие другие группы не обладают этим свойством.

Мы могли бы, конечно, поступать тем же путем, как и выше, но ход мыслей, ведущий к заключению $H = G$, в примененном выше виде, уже не является законным. Чтобы установить $H = G$ используя только лишь циклические подгруппы, рассмотрим подгруппу K из G, состоящую по определению из всех элементов G, порядок которых не превосходит p^2. Очевидно, K будет конечной абелевой группой с показателем p или p^2, поэтому она будет типа $(p, \ldots, p, p^2, \ldots, p^2)$; пусть $r \geqq 0$ и $s \geqq 0$ означают число ее прямых слагаемых порядка p и p^2, соответственно, где $r + s = n \geqq 2$. Если $s > 0$, то непосредственно видно, что K, а поэтому и G, содержит $k = \dfrac{p^{r+s} - 1}{p - 1}$ различных подгрупп порядка p и $\dfrac{p^{r+2s} - p^{r+s}}{p^2 - p}$ различных циклических подгрупп порядка p^2. Однако, равенство

$$\frac{p^{r+s} - 1}{p - 1} = \frac{p^{r+2s} - p^{r+s}}{p^2 - p},$$

[5]) Напр., случай $k = 2$ невозможен!

т. е.

$$p^{r+s} - 1 = p^{r+2s-1} - p^{r+s-1}$$

абсурдно, если учесть, что p не делит 1. Отсюда мы заключаем, что $s = 0$, другими словами, что G не содержит элементов порядка выше p. Следовательно, мы приходим к заключению, что $G = H$, т. е. что G будет типа $(p, \ldots, p)$, что мы и хотели доказать.

Предположим, наконец, вниманию читателя следующую

Проблему. Отыскать (абелевы) группы, в которых классы изоморфных собственных подгрупп содержат одну и ту же мощность подгрупп.

Summary.

On abelian groups in which the classes of isomorphic proper subgroups contain the same number of subgroups

L. FUCHS, Budapest.

(Received July 12, 1952.)

The set of all proper subgroups of a given group can be divided into classes in the following manner:

Two groups belong to the same class if and only if they are isomorphic. It has been shown recently by T. Szele that a group with only one subgroup in each class is isomorphic to a subgroup of the group of all rational numbers modulo 1.

The author considers an analogous problem consisting in finding all abelian groups for which the classes mentioned above contain the same finite number $k > 1$ of subgroups.

It turns out that the assumption $k > 1$ forms a heavy restriction: the only abelian groups which satisfy these conditions are finite abelian groups of the type (p, p) or (p, p, p).