Josef Novák

О некоторых характеристиках упорядоченного континуума

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 2 (1952), No. 4, 369–386

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100057

# О НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ УПОРЯДОЧЕННОГО КОНТИНУУМА

ЙОЗЕФ НОВАК (J. Novák), Прага.

(Поступило в редакцию 19/III 1952 г.)

В работе изучаются свойства характеристических систем $\mathfrak{P}(C), \mathfrak{Q}(C), \mathfrak{S}(C), \mathfrak{J}(C), \mathfrak{J}'(C), \mathfrak{M}(C)$ и $\mathfrak{R}(C)$ упорядоченного континуума $C$, состоящих из некоторых мощностей. Выводятся соотношения между характеристиками, то есть между супремумами или инфимумами характеристических систем. Эти соотношения подтверждаются построением нескольких упорядоченных континуумов.

Настоящая работа посвящена изучению некоторых характеристических систем и некоторых характеристик упорядоченного континуума $C$. Под характеристической системой мы понимаем множество мощностей, находящихся в определенном отношении к некоторым подмножествам данного упорядоченного континуума $C$. Характеристиками упорядоченного континуума мы называем верхние и нижние грани характеристической системы. Каждая характеристическая система и каждая характеристика описывает до некоторой степени структуру и выражает некоторые свойства упорядоченного континуума.

В работе мы рассматриваем характеристические системы $\mathfrak{P}(C)$, $\mathfrak{Q}(C)$, $\mathfrak{S}(C)$, $\mathfrak{J}(C)$, $\mathfrak{J}'(C)$, $\mathfrak{M}(C)$ и $\mathfrak{R}(C)$, которые означают последовательно множество мощностей: $\min(\aleph_\rho, \aleph_\sigma)$, $\max(\aleph_\rho, \aleph_\sigma)$ (причем $c_{\rho\sigma}$ означают характеры точек $x \in C$), монотонных последовательностей, изолированных подмножеств, дизьюнктных систем интервалов, плотных в $C$ подмножеств, порядков последовательных двоичных делений $\Delta$ упорядоченного континуума $C$. Из характеристик мы обратим главное внимание на $\mathfrak{p} = \sup \mathfrak{P}(C)$, $\mathfrak{q} = \sup \mathfrak{Q}(C)$, $\mathfrak{s} = \sup \mathfrak{S}(C)$, $\mathfrak{i} = \sup \mathfrak{J}(C)$, $\mathfrak{i}' = \sup \mathfrak{J}'(C)$, $\mathfrak{m} = \min \mathfrak{M}(C)$, $\mathfrak{r}_1 = \min \mathfrak{R}(C)$, $\mathfrak{r}_2 = \sup \mathfrak{R}(C)$.

К числу характеристик можно также отнести мощность множества всех точек с несимметричным характером и мощность всех точек с симметричным характером. Относительно этой последней характеристики Ф. Хаусдорф доказаль, что она $\geqq \mathfrak{m}$. В настоящей работе доказывается, что первая характеристика $\leqq \mathfrak{m}$, а вторая равна мощности $\mathfrak{n}$ всего упорядоченного континуума $C$. С помощью этой теоремы доказана эквивалентность гипотезы континуума и следующей проблемы: существует ли $\aleph_1$ — сепарабельный упорядоченный континуум мощности $2^{\aleph_0}$ такой, что множество всех точек с несимметричным характером и множество всех точек с симметричным характером имеют одинаковую мощность?

Далее в работе доказывается, что характеристические системы удовлетворяют соотношению $\mathfrak{P}(C) \cup \mathfrak{Q}(C) \subset \mathfrak{S}(C) \subset \subset \mathfrak{J}(C) = \mathfrak{J}'(C)$. Характеристическая система $\mathfrak{R}(C)$ может содержать не более двух элементов. Между характеристиками имеют место следующие соотношения: $\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{q} = \mathfrak{s} \leqq \mathfrak{i} = \mathfrak{i}' \leqq \leqq \mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n} \leqq \min(\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}, 2^{\mathfrak{r}_1})$. Далее имеем $\mathfrak{s} \leqq \mathfrak{r}_1 \leqq \mathfrak{r}_2 \leqq \mathfrak{m} = = \max(\mathfrak{i}, \mathfrak{r}_1) = \max(\mathfrak{i}, \mathfrak{r}_2)$ и наконец $\mathfrak{r}_2 \leqq \mathfrak{s}^+$, где $\mathfrak{s}^+$ означает наименьшую мощность, превосходящую все мощности в характеристической системе $\mathfrak{S}(C)$.

Указанные соотношения подтверждаются рядом построений упорядоченных континуумов. Между прочим доказывается, что существуют упорядоченные континуумы $C$ с характеристическими системами $\mathfrak{R}(C)$, содержащими в точности два элемента. Показано также, что характеристические системы $\mathfrak{P}(C)$ и $\mathfrak{Q}(C)$ могут и не быть сравнимыми.

В конце работы приводится несколько проблем, касающихся упорядоченных континуумов.

Упорядоченным континуумом мы называем упорядоченное множество, содержащее две различные крайние точки и не имеющее ни скачков ни щелей. Как правило мы его будем обозначать буквой $C$. На протяжении всей работы эта буква будет означать упорядоченный континуум. Мощность упорядоченного континуума $C$ будет обозначаться через $\mathfrak{n}(C)$ или просто через $\mathfrak{n}$.

Последовательность точек $\{x^\lambda\}_0^\alpha$, $0 \leqq \lambda < \alpha$, в упорядоченном континууме $C$ мы назовем *возрастающей* (*убывающей*), если $x^\lambda < x^\mu$ ($x^\lambda > x^\mu$) для любой пары порядковых индексов $\lambda < \mu$, где $\mu < \alpha$. Убывающие и возрастающие последовательности мы объединим под одним названием *монотонных* последовательностей. Мы скажем, что монотонная последовательность *сходится* к точке $x \in C$, если каждый интервал,[1]) содержащий $x$ в качестве внутренней точки, содержит почти все точки после-

[1]) Под словом интервал мы будем подразумевать невырожденный интервал, содержащий более одной точки. Открытый интервал мы обозначим через $(x, y)$, замкнутый через $\langle x, y\rangle$, и полузамкнутый через $\langle x, y)$ или $(x, y\rangle$. Если небудет особых оговорок, интервал будет означать любой из четырех указанных типов.

довательности, т. е. все, кроме множества исключений мощности меньшей, чем мощность множества точек, содержащихся в этой последовательности. При этом нужно отметить, что крайняя точка континуума $C$ лежит *внутри* каждого интервала, к которому она принадлежит.

По Ф. Хаусдорфу[2]) *характер точки* $x$ упорядоченного континуума $C$ равен $c_{\rho\sigma}$, если $\omega_\rho$ и $\omega_\sigma$ являются наименьшими порядковыми числами такими, что существует возрастающая последовательность точек типа $\omega_\rho$ и убывающая последовательность точек типа[3]) $\omega_\sigma^*$, сходящиеся в $C$ к точке $x$. Из этого определения вытекает, что мощности $\aleph_\rho$ и $\aleph_\sigma$ обеих монотонных последовательностей регулярны.[4]) Хаусдорф не приписывает крайним точкам никакого характера. Однако же нам представляется целесообразным ввести характер и для крайних точек: характер левой крайней точки $a \in C$ обозначим через $c_{*\sigma}$, а характер правой крайней точки $b \in C$ через $c_{\rho *}$. Мощность $\max(\aleph_\rho, \aleph_\sigma)$ мы назовем *верхним характером*, и $\min(\aleph_\rho, \aleph_\sigma)$ *нижним характером* точки $x$. Если точка $x$ является крайней точкой континнума $C$, то верхний характер равен нижнему характеру точки $x$ и равен $\aleph_\sigma$ или $\aleph_\rho$, смотря по тому, будет ли $x = a$ или $x = b$.

Назовем подмножество $A$ упорядоченного континуума $C$ *изолированным*, если для каждой точки $x \in A$ существует интервал, внутри которого не имеется — кроме точки $x$ — ни какой иной точки множества $A$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — множество, элементами которого служат мощности. Так как $\mathfrak{A}$ является вполне упорядоченным множеством, то существует нижний предел (представляющий в то же время минимум) и верхний предел, которые мы обозначаем $\inf \mathfrak{A}$ и $\sup \mathfrak{A}$.

Определение: Пусть $C$ — упорядоченный континуум. Обозначим последовательно символами

$\mathfrak{P}(C)$ множество всех нижних характеров точек $x \in C$,

$\mathfrak{Q}(C)$ множество всех верхних характеров точек $x \in C$,

$\mathfrak{S}(C)$ множество всех мощностей монотонных последовательностей в упорядоченном континууме $C$,

$\mathfrak{I}(C)$ множество всех мощностей изолированных подмножеств континуума $C$,

---

[2]) *F. Hausdorff,* Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914, стр. 143.

[3]) Звездочкой наверху * мы обозначаем тип, обратный данному. В соответствии с этим $\omega_\sigma^*$ означает тип, обратный типу $\omega_\sigma$.

[4]) Мощность $\mathfrak{a}$ будет регулярной, если регулярно наименьшее порядковое число мощности $\mathfrak{a}$.

$\mathfrak{I}'(C)$ множество всех мощностей дизъюнктных систем интервалов континуума $C$,

$\mathfrak{M}(C)$ множество всех мощностей подмножеств, плотных в $C$.

Далее обозначим $\mathfrak{p}(C) = \sup \mathfrak{P}(C)$, $\mathfrak{q}(C) = \sup \mathfrak{Q}(C)$, $\mathfrak{s}(C) = \sup \mathfrak{S}(C)$, $\mathfrak{i}(C) = \sup \mathfrak{I}(C)$, $\mathfrak{i}'(C) = \sup \mathfrak{I}'(C)$, $\mathfrak{m}(C) = \min \mathfrak{M}(C)$. Если не приходится опасаться недоразумения, то можно опустить символ $(C)$; в таких случаях мы будем писать просто $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{m}$. Мощность $\mathfrak{m}(C)$ называется *сепарабельностью* континуума $C$; говорят также, что континуум $C$ является $\mathfrak{m}$ — сепарабельным.

Все определенные таким образом множества мощностей (к ним присоединится в последствии еще множество $\mathfrak{R}(C)$) мы назовем *характеристическими системами* континуума $C$. Ясно, что каждая из указанных характеристических систем однозначно определяется упорядоченным континуумом $C$. Инфимумы и супремумы (нижние и верхние грани) характеристических систем мы называем *характеристиками* упорядоченного континуума $C$.

В упорядоченный континуум $C$ вводится топология при помощи окрестностей. Окрестностью точки $x \in C$ называется каждый интервал, внутри которого лежит точка $x$. Система окрестностей точки $x \in C$ называется *полной*, если каждая окрестность точки $x$ содержит в виде своей части некоторую окрестность этой системы. Наименьшая мощность полной системы окрестностей точки $x \in C$ называется *топологическим характером точки* $x$. Наименьшая мощность системы окрестностей точки $x \in C$, пересечением которых является точка $x$, называется *псевдохарактером точки* $x$. Наименьшая мощность системы окрестностей точки $x \in C$, пересечение которых не содержит ни одной окрестности точки $x$, называется *внутренним характером* точки $x$.

**Теорема 1**. *Характеристика* $\mathfrak{p}$ *упорядоченного континуума* $C$ *равна супремуму множества всех внутренних характеров точки* $x \in C$, *а характеристика* $\mathfrak{q}$ *равна супремуму множества всех топологических характеров точки* $x \in C$.

Доказательство. Легко видеть, что псевдохарактер точки $x \in C$ равен верхнему характеру и что внутренний характер точки $x$ равен нижнему характеру точки $x$. Теперь теорема вытекает из того, что упорядоченный континуум является бикомпактным пространством, в котором топологический характер точки равен ее псевдохарактеру.[5])

---

[5]) *P. Alexandroff* et *P. Urysohn,* Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verhand. der kon. Akademie de Amsterdam, 1929, стр. 65.

Пусть $C$ — упорядоченный континуум. Существует *последовательное двоичное деление* $\Delta$ континуума $C$, определенное следующим трансфинитным предписанием[6]): пусть $i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots$ $(\lambda < \alpha)$ означает двоичную последовательность нулей и единиц, т. е. $i_\lambda = 0$ или $= 1$ для $\lambda < \alpha$. Обозначим $I i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda < 0) = C$ и назовем $C$ интервалом порядка 0. Если мы уже определили интервалы $I i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots$ $(\lambda < \xi)$ всех порядков $\xi < \alpha$, определим и интервалы порядка $\alpha$, различая такие два случая:

1. $\alpha$ — изолированное порядковое число. В этом случае выберем внутри каждого интервала $I i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots$ $(\lambda < \alpha - 1)$ порядка $\alpha - 1$ по одной точке $x$, разбивающей этот интервал на два интервала $I i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda < \alpha)$ порядка $\alpha$, где $i_{\alpha-1} = 0$ для левого, а $i_{\alpha-1} = 1$ для правого интервала. Тогда будет

$$I i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda < \alpha - 1) =$$
$$= I i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots 0(\lambda < \alpha) \cup I i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots 1(\lambda < \alpha),$$
$$I i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots 0(\lambda < \alpha) \cap I i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots 1(\lambda < \alpha) = \{x\}$$

2. $\alpha$ — предельное порядковое число. Образуем все пересечения

$$\bigcap_{\xi<\alpha} I i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots \ (\lambda < \xi).$$

Пересечение, содержащее хоть бы две точки, будет интервалом, который мы назовем интервалом порядка $\alpha$ и обозначим через $I i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda < \alpha)$.

Наименьшее порядковое число $\delta_\Delta$ такое, что не существует ни одного интервала порядка $> \delta_\Delta$, называется *порядком деления* $\Delta$.

Определение. Пусть $C$ — упорядоченный континуум. Пусть $\mathfrak{R}(C)$ означает множество всех мощностей порядков $\delta_\Delta$ двоичных делений $\Delta$ континуума $C$. Это множество будет характеристической системой континуума $C$. Мощности $\mathfrak{r}_1 = \min \mathfrak{R}(C)$ и $\mathfrak{r}_2 = \sup \mathfrak{R}(C)$ являются характеристиками континуума $C$.

Система всех интервалов, возникших при последовательном делении $\Delta$ упорядоченного континуума $C$ имеет мощность, равную[7]) сепарабельности $\mathfrak{m}(C)$ континуума $C$, а множество $K_\Delta \subset C$ всех крайних точек интервалов и даже множество $D_\Delta \subset K_\Delta$ всех разделяющих точек будет плотным в $C$.

---

[6]) Двоичное деление упорядоченного континуума определено аксиоматическим путем в работе: *J. Novák,* On partition of an ordered continuum, Fund. Math., XXXVIII, 1951, стр. 53.

[7]) *J. Novák,* цит. соч. стр. 57.

Пусть $\alpha < \delta_\Delta$. Ясно, чро все открытые интервалы порядка $\alpha$, полученные при двоичном делении $\Delta$ континуума $C$, образуют непересекающуюся систему, мощность которой $\leqq \mathfrak{i}(C)$.

Производя последовательное деление $\Delta$ упорядоченного континуума $C$, мы можем для каждой точки $x \in C - D_\Delta$ получить одно выражение, а для каждой точки $x \in D_\Delta$ два выражения в виде пересечения интервалов возрастающих и следующих непосредственно друг за другом порядков

$$\{x\} = \bigcap_{\xi<\alpha} Ij_0j_1 \dots j_\lambda \dots (\lambda < \xi) \ (= \bigcap_{\xi<\beta} Ik_1k_2 \dots k_\lambda \dots (\lambda < \xi).$$

*Порядком точки* $x \in C - D_\Delta$ назовем порядковое число $\alpha$, порядком точки $x \in D_\Delta$ — порядковое число $\max(\alpha, \beta)$. Порядок точки $x \in C$ зависит от деления $\Delta$ и будет $\leqq \delta_\Delta$.

Выбрав один определенный способ выражения точек $x \in D_\Delta$, мы можем каждой точке $x \in C$ поставить в однозначное соответствие последовательность двоичных знаков $j_0j_1 \dots j_\lambda \dots$ $(\lambda < \alpha)$. Дополнением каждой такой последовательности нулями мы переведем ее в последовательность типа $\delta_\Delta$ и получим подобное отображение[8]) упорядоченного континуума $C$ на словарно упорядоченную систему, элементы которой суть трансфинитные последовательности нулей и единиц типа $\delta_\Delta$. Справедливо и обратное утверждение:[9]) если упорядоченный континуум $C$ подобен словарно упорядоченной системе последовательностей нулей и единиц типа $\vartheta$, то существует деление $\Delta$ континуума $C$ порядка $\delta_\Delta \leqq \vartheta$. Отсюда следует, что минимальный тип последовательностей двоичных знаков, представляющих точки континуума $C$, и минимальный порядок деления континуума $C$ суть равные порядковые числа. Поэтому имеет место

**Теорема 2.** *Характеристика $\mathfrak{r}_1(C)$ равна минимальной мощности типа двоичных последовательностей нулей и единиц, которыми можно представить точки континуума $C$ при словарном упорядочении последовательностей.*

Докажем теперь

**Лемму 1.** *Пусть $\mathfrak{T}$ — монотонная система интервалов*

---

[8]) *J. Novák,* цит. соч. стр. 60. Сравни также *W. Sierpiński,* Sur une propriété des ensembles ordonnés, Fund. Math., XXXVI, 1949, стр. 256.

[9]) *M. Novotný,* Sur la représentation des ensembles ordonnés, Fund. Math., XXXVIII, 1951. В этой работе доказана теорема: Пусть $\nu$ — произвольное порядковое число. Для каждого упорядоченного континуума сепарабельности $\aleph_\nu$ существует деление $\Delta$ порядка $\leqq \omega_\nu$. Однако, из доказательства теоремы вытекает еще одно утверждение, и именно: Если упорядоченный континуум допускает представление последовательностями нулей и единиц типа $\vartheta$, то существует деление $\Delta$ порядка $\delta_\Delta \leqq \vartheta$.

*упорядоченного континуума $C$, пересечением которых является точка $x \in C$, отличная от обеих крайних точек континуума $C$. Когда точка $x$ лежит внутри каждого интервала из системы $\mathfrak{I}$ (и только тогда), существует подсистема $\mathfrak{I}' \subset \mathfrak{I}$, пересечением которой является точка $x$, и имеющая то свойство, что ни одна пара различных ее интервалов не имеет общих крайних точек.*

Доказательство. Если мы уже выбрали в системе $\mathfrak{I}$ интервалы $J_0 \supset J_1 \supset \ldots \supset J_\lambda \supset \ldots$ для $\lambda < \alpha$ с указанном в теореме свойством, то рассмотрим теперь пересечение $\bigcap\limits_{\lambda<\alpha} J_\lambda$. Если это пересечение содержит более одной точки, то это интервал, внутри которого лежит точка $x$. Значит это пересечение содержит хоть один интервал $J_\alpha \subset \mathfrak{I}$, не имеющий общих крайних точек с интервалом $\bigcap\limits_{\lambda<\alpha} J_\lambda$.

Из леммы 1 непосредственно следует, что точка $x \in C$, не являющаяся крайней точкой континуума $C$, имеет симметричный[10]) характер $c_{\rho\rho}$ тогда и только тогда, когда существует монотонная система интервалов $\mathfrak{I}$, пересечением которой является точка $x$, лежащая внутри каждого интервала этой системы. Легко видеть, что $\omega_\rho$ — наименьшее порядковое число, конфинальное с системой $\mathfrak{I}$, упорядоченной по включению $\supset$.

Пусть $\Delta$ — последовательное деление упорядоченного континуума $C$. Тогда каждая точка $x \in C$ может быть выражена в виде пересечения монотонной системы интервалов возрастающих и следующих непосредственно друг за другом порядков

$$\{x\} = \bigcap_{\xi<\alpha} Ii_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots (\lambda < \xi).$$

Если точка $x$ не принадлежит к множеству $K_\Delta$, то она не будет крайней точкой какого-либо интервала $Ii_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots$ $(\lambda < \xi)$ порядка $\xi < \alpha$, так что — по только - что приведенным рассуждениям — точка $x$ имеет симметричный характер. Точки континуума $C$, имеющие несимметричный характер, могут встретиться, поэтому, только в множестве $K_\Delta$ крайних точек интервалов, возникших при двоичном делении $\Delta$. Так как мощность множества $K_\Delta$ равна $\mathfrak{m}(C)$, то мощность множества всех точек $x \in C$ несимметричного характера не превосходит сепарабельности $\mathfrak{m}$ континуума $C$.

Мощность множества всех точек несимметричного харак-

---

[10]) Удобно считать крайние точки континуума $C$ точками симметричного характера, ибо в таком случае справедлива теорема: Точка $x \in C$ имеет симметричный характер тогда и только тогда, когда его топологический характер одинаков с его внутренним характером.

тера $c_{\rho\sigma}$, $\varrho \neq \sigma$ и мощность множества всех точек симметричного характера можно считать характеристиками упорядоченного континуума $C$. Этим характеристикам посвящена

**Теорема 3.** *Пусть $C$ — упорядоченный континуум. Мощность множества всех его точек несимметричного характера будет $\leq \mathfrak{m}(C)$. Мощность множества всех его точек симметричного характера равна мощности континуума $\mathfrak{n}(C)$.*

Доказательство. Первую часть теоремы мы только-что доказали. Поэтому достаточно доказать, что мощность множества всех точек $x \in C$ симметричного характера будет $\geq \mathfrak{m}(C)$. Что это действительно так, видно из того, что согласно Хаусдорфу[11] каждый интервал упорядоченного континуума содержит хоть одну точку симметричного характера, так что множество всех точек симметричного характера плотно в континууме $C$.

Теперь нетрудно доказать

**Теорему 4.** *Множество, состоящее из двух крайних точек упорядоченного континуума $C$ и из всех его точек несимметричного характера, равно пересечению $\bigcap_{\Delta} K_\Delta$, где $\Delta$ пробегает все двоичные деления континуума $C$.*

Доказательство. В силу сказанного выше достаточно показать, что для каждой точки $x \in C$, отличной от крайних точек континуума $C$ и имеющей симметричный характер, существует хоть одно двоичное деление $\Delta$ континуума $C$ такое, что $x \in C - K_\Delta$.

В самом деле, пусть

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_\lambda < \ldots \text{ и } y_0 > y_1 > \ldots > y_\lambda > \ldots \quad (\lambda < \omega_\rho)$$

представляют две монотонные последовательности точек континуума $C$, сходящиеся к точке $x$ симметричного характера $c_{\rho\rho}$. Двоичное деление $\Delta_x$ произведем по следующему правилу $(\pi)$: В интервале четного порядка, внутри которого содержится точка $x$, в качестве делящей точки мы выбираем из точек $x_\lambda$ возрастающей последовательности ту, которая имеет наименьший индекс, и в интервале нечетного порядка, внутри которого содержится точка $x$, в качестве делящей точки мы выбираем из точек $y_\lambda$ ту, которая имеет наименьший индекс. В остальных интервалах, не содержащих $x$ в виде внутренней точки, делящую точку можно выбрать произвольно. Очевидно будет $x = \bigcap_{\xi < \omega_\varrho} I j_0 j_1 \ldots j_\lambda \ldots \ (\lambda < \xi)$, где $j_\lambda = 0$ или $= 1$, смотря по тому,

[11] *F. Hausdorff*, цит. соч. стр. 142.

будет ли $\lambda$ нечетным или четным порядковым числом. Так как точка $x$ лежит внутри каждого интервала $I j_0 j_1 \ldots j_\lambda \ldots$ $(\lambda < \xi)$, где $\xi < \omega_\rho$, то имеет место $x \in C - K_{\Delta_x}$.

Замечание. При помощи теоремы 3 можно решить следующую проблему:[12]) *Существует ли упорядоченный континуум $C$ мощности $2^{\aleph_0}$ с плотной частью мощности $\aleph_1$ такой, что множество всех точек несимметричного характера и множество всех точек симметричного характера имеют одинаковую мощность?*

Оказывается, *эта проблема эквивалентна гипотезе континуума*. Действительно, если существует упорядоченный континуум $C$ указанного свойства, то по теореме 3 каждое из наших двух множеств должно иметь мощность $2^{\aleph_0}$, однако по той же теореме $2^{\aleph_0} \leqq \mathfrak{m}(C) = \aleph_1$, так что $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

С другой стороны известно,[13]) что существуют $\aleph_1$-сепарабельные упорядоченные континуумы мощности $2^{\aleph_0}$ такие, что множество всех точек несимметричного характера имеет мощность $\aleph_1$. Если $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, то из теоремы 3 следует, что каждый такой континуум обладает указанными в проблеме свойствами.

Обратимся теперь к соотношениям между отдельными характеристическими системами. Имеет место

**Теорема 5.** $\mathfrak{P}(C) \cup \mathfrak{Q}(C) \subset \mathfrak{S}(C) \subset \mathfrak{J}(C) = \mathfrak{J}'(C)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}(C)$. Тогда существует изолированное подмножество $A \subset C$ мощности $\mathfrak{a}$. Поставим в соответствие каждой точке $x \in A$, отличной от последней точки $b$ континуума $C$ точку $x' > x$, и точке $b$ — поскольку она принадлежит к $A$ — точку $b' < b$ так, чтобы в интервалах $(x, x')$ и $(b', b)$ не было ни одной точки множества $A$. Мы получим непересекающуюся систему интервалов мощности $\mathfrak{a}$, так что $\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}'(C)$. Если наоборот $\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}'(C)$, выберем внутри каждого интервала из непересекающейся системы интервалов мощности $\mathfrak{a}$ по одной точке, чем и получим изолированное множество мощности $\mathfrak{a}$, так что $\mathfrak{a} \in \mathfrak{J}(C)$.

Этим мы доказали последнее равенство, приведенное в теореме. Остальные соотношения ясны и их доказательство можно предоставить читателю.

**Теорема 6.** $\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{q} = \mathfrak{s} \leqq \mathfrak{i} = \mathfrak{i}' \leqq \mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n} \leqq \min(\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}},\ 2^{\mathfrak{r}_1})$.

Доказательство. Докажем прежде всего, что $\mathfrak{q} = \mathfrak{s}$. Если $\aleph_\mu$ — мощность с изолированным индексом $\mu$, которая $\leqq \mathfrak{s}$, то в упорядоченном континууме $C$ существует монотонная последовательность точек регулярного типа $\omega_\mu$ или $\omega_\mu^*$. Так как

[12]) Эту проблему я предложил своим сотрудникам в г. Брно в 1950 г.

континуум $C$ не имеет щелей, существует точка $x \in C$, к которой эта последовательность сходится. Характер точки $x$ будет поэтому $c_{\rho\mu}$ и $c_{\mu\sigma}$, где $\varrho$ и $\sigma$ суть порядковые числа или символ $*$. Поэтому $\aleph_\mu \leqq \mathfrak{q}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{s} \leqq \mathfrak{q}$; обратное соотношение $\mathfrak{q} \leqq \mathfrak{s}$ следует из теоремы 5.

Теперь докажем соотношение $\mathfrak{n} \leqq \min(\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}, 2^{\mathfrak{r}_1})$. Прежде всего имеет место $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$. Действительно, пусть $M$ — подмножество мощности $\mathfrak{m}$, плотное в упорядоченном континууме $C$. Тогда всякая точка $x \in C$ нижнего характера $\aleph_\tau$ будет однозначно определена монотонной последовательностью точек множества $M$ типа $\omega_\tau$ или $\omega_\tau^*$, которая сходится к точке $x$. Точки этой последовательности образуют множество мощности $\leqq \mathfrak{p}$, и мощность системы всех монотонных последовательностей точек, выделенных из множества $M$ и имеющих мощности $\leqq \mathfrak{p}$, будет $\leqq \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$. Далее имеем $\mathfrak{n} \leqq 2^{\mathfrak{r}_1}$. В самом деле, пусть $\Delta_{\min}$ — двоичное деление упорядоченного континуума $C$ возможно меньшего порядка $\delta_{\Delta_{\min}}$. Тогда существует подобное отображение континуума $C$ в множество всех последовательностей двоичных знаков $i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots$ $(\lambda < \delta_{\Delta_{\min}})$; эго множество имеет мощность $2^{\mathfrak{r}_1}$, ибо мощность порядка $\delta_{\Delta_{\min}}$ равна $\mathfrak{r}_1$.

Остальные приведенные в теореме соотношения или очевидны или вытекают прямо из теоремы 5.

Пусть $\mathfrak{A}$ — характеристическая система и пусть $\mathfrak{b} = \sup \mathfrak{A}$. Символом $\mathfrak{b}^+$ обозначим наименьшую мощность такую, что $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}^+$ для каждой мощности $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$.

**Теорема 7.** *Имеют место соотношения*

$$\mathfrak{s} \leqq \mathfrak{r}_1 \leqq \mathfrak{r}_2 \leqq \mathfrak{m} = \max(\mathfrak{i}, \mathfrak{r}_1) = \max(\mathfrak{i}, \mathfrak{r}_2),$$
$$\mathfrak{r}_2 \leqq \mathfrak{s}^+.$$

Доказательство. Пусть $\Delta_{\min}$ — двоичное деление упорядоченного континуума $C$ возможно меньшего порядка $\delta_{\Delta_{\min}}$. Пусть $x \in C$ — произвольная точка, отличная от крайних точек континуума $C$. Его порядок (относительно деления $\Delta_{\min}$) обозначим через $\tau$, а его характер через $c_{\rho\sigma}$. Тогда, очевидно, имеет место соотношение $\max(\omega_\rho, \omega_\sigma) \leqq \tau \leqq \delta_{\Delta_{\min}}$. Поэтому верхним характером точки $x$ будет $\max(\aleph_\rho, \aleph_\sigma) \leqq \mathfrak{r}_1(C) = \mathfrak{r}_1$. Это соотношение верно и тогда, когда точка $x$ является крайней точкой континуума $C$. По теореме 6 будет $\mathfrak{q} = \mathfrak{s}$, так что $\mathfrak{s} \leqq \mathfrak{r}_1$.

Чтобы доказать неравенство $\mathfrak{r}_2 \leqq \mathfrak{m}$, примем во внимание, что в системе (мощность которой всегда равна $\mathfrak{m}$) всех интервалов упорядоченного континуума $C$, возникших при произвольном двоичном делении $\Delta$, существует такая подсистема интервалов всех порядков $\alpha < \delta_\Delta$, мощность которой равна мощности порядка деления $\delta_\Delta$. Поэтому мощность порядка $\delta_\Delta$ каждого деления $\Delta$ будет $\leqq \mathfrak{m}$; отсюда $\mathfrak{r}_2 \leqq \mathfrak{m}$.

Из только-что доказанного и из теоремы 6 следует, что $\max(\mathfrak{i}, \mathfrak{r}_1) \leqq \max(\mathfrak{i}, \mathfrak{r}_2) \leqq \mathfrak{m}$. С другой стороны имеем $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1$. Действительно, множество $K_\Delta \subset C$ всех крайних точек интервалов, возникших при двоичном делении $\Delta_{\min}$ возможно меньшего порядка $\delta_{\Delta_{\min}}$, является плотным в континууме $C$ и все открытые интервалы одного и того же порядка $\alpha$ образуют непересекающуюся систему мощности $\leqq \mathfrak{i}$; поэтому мощность множества $K_\Delta$ будет $\leqq \mathfrak{i}\mathfrak{r}_1 = \max(\mathfrak{i}, \mathfrak{r}_1)$, и значит $\mathfrak{m} \leqq \max(\mathfrak{i}, \mathfrak{r}_1)$, $\mathfrak{m} \leqq \max(\mathfrak{i}, \mathfrak{r}_2)$.

Второе соотношение докажем от противного. Предположим, что $\mathfrak{s}^+ < \mathfrak{r}_2$. Тогда существует мощность $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R}(C)$ такая, что $\mathfrak{s}^+ < \mathfrak{r}$. Следовательно, существует двоичное деление $\Delta$ упорядоченного континуума $C$ и хоть один интервал, мощность порядка которого $\geqq \mathfrak{s}^+$. К одной из его крайних точек сходится монотонная последовательность точек мощности $\geqq \mathfrak{s}^+$. Значит $\mathfrak{s}^+ \in \mathfrak{S}(C)$, и это является противоречием.

Произведем теперь несколько построений упорядоченных континуумов. Основное построение мы определим вообще так:

Пусть $P$ — упорядоченное множество с первым и последним элементом, не содержащее щелей. Пусть для $x \in P$ символ $P_x$ означает или произвольное множество выродженное в единственную точку или произвольный упорядоченный континуум; если же непосредственно за элементом $x$ в множестве $P$ следует какой-либо иной элемент — и только в таком случае — пусть $P_x$ означает упорядоченное множество, которое получится из упорядоченного континуума путем устранения его последней точки (такое множество мы назовем открытым справа упорядоченным континуумом). Рассмотрим теперь множество $\mathbf{P}$, элементами которого являются пары $(x, y)$, где $x \in P$, $y \in P_x$. Множество $\mathbf{P}$ можно словарно упорядочить, и именно так: $(x, y) < (x', y')$ если $x < x'$ в $P$ или $x = x'$, но $y < y'$ в $P_x$.

Имеет место следующая[13])

**Теорема 8.** *Множество* $\mathbf{P}$ *является упорядоченным континуумом.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{P}$, где $\mathbf{A} < \mathbf{B}$. Пусть $A \subset P$ — подмножество всех точек $x \in P$ таких, что $(x, y) \in \mathbf{A}$

[13]) В частном случае, когда $P$ является упорядоченным континуумом, эта теорема доказана в исследовании *J. Novák,* О некоторых упорядоченних континуумах мощности $2^{\aleph_0}$, содержащих плотное подмножество мощности $\aleph_1$, чехослов. матем. журнал, 1 (76), 1951, стр. 96 (лемма 5). On some ordered continua of power $2^{\aleph_1}$ containing a dense subset of power $\aleph_1$, Czechoslovak Math. Journal, 1 (76), 1951, стр. 78. (Лемма 5.)

хоть для одного элемента $y \in P_x$. Пусть $B = P - A$. Тогда $A \cup B = P$, где $A < B$. По предположению пара $(A, B)$ не определяет щели в $P$, так что могут настать следующие случаи: 1. $A$ содержит последний элемент $x_1 \in P$, $B$ содержит первый элемент $x_2 \in P$, так что $P_{x_1}$ является открытым справа упорядоченным континуумом. 2. $A$ содержит последний элемент $x_1$, $B$ не содержит первого элемента; тогда $P_{x_1}$ будет или множеством вырожденным в единственную точку или упорядоченным континуумом. 3. $A$ не содержит последнего элемента, $B$ содержит первый элемент $x_2$; в таком случае $P_{x_2}$ будет множеством из одной точки или открытым справа упорядоченным континуумом или упорядоченным континуумом.

Легко видеть, что в случае 1. $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ не определяет ни щели ни скачка в $\mathbf{P}$. В случае 2. нижняя часть, $\mathbf{A}$, содержит последний элемент $(x_1, z) \in P$, где $z$ — последний элемент множества $P_{x_1}$, и верхняя часть, $\mathbf{B}$, не имеет первого элемента. В случае 3. часть $\mathbf{A}$ не содержит последнего элемента, однако точка $(x_2, t) \in \mathbf{P}$, где $t$ — первый элемент множества $P_{x_2}$, будет первым элементом в верхней части, $\mathbf{B}$. Этим теорема доказана.

Теперь мы применим основную конструкцию и построим упорядоченный континуум $C_{\omega_\alpha}$.

Пусть $\alpha$ — произвольное порядковое число и пусть $\omega_\alpha$ — наименьшее порядковое число мощности $\aleph_\alpha$. Обозначим согласно Хаусдорфу символом $W(\beta)$ множество всех порядковых чисел $\xi < \beta$. Для $x \in P = W(\omega_\alpha + 1)$, $x \neq \omega_\alpha$ пусть будет $P_x = \langle 0, 1)$ и $P_{\omega_\alpha} = \{0\}$. Обозначим теперь множество $\mathbf{P}$ всех элементов $(x, y)$, где $x \in W(\omega_\alpha + 1)$ и $y \in P_x$ символом $C_{\omega_\alpha}$. Согласно теореме 8 множество $C_{\omega_\alpha}$ будет упорядоченным континуумом.

Каждая убывающая последовательность точек в $C_{\omega_\alpha}$ будет не более чем счетной. Отсюда ясно, что верхний характер точки $(\omega_\rho, 0) \in C_{\omega_\alpha}$, где $\omega_\rho$ — произвольное регулярное число $\leqq \omega_\alpha$, равен $\aleph_\rho$. Поэтому $\sup \mathfrak{Q}(C_{\omega_\alpha}) = \aleph_\alpha$. Далее будет $\mathfrak{m}(C_{\omega_\alpha}) = \min(\aleph_\alpha, 2^{\aleph_0})$, так как множество всех точек $(x, y) \in C_{\omega_\alpha}$, где $x \in W(\omega_\alpha)$, а $y$ — рациональное число, причем $0 \leqq y < 1$, плотно в $C_{\omega_\alpha}$. Примем еще во внимание, что мощность множества $C_{\omega_\alpha}$ будет $\aleph_\alpha 2^{\aleph_0} = \max(\aleph_\alpha, 2^{\aleph_0})$. Итак, по теореме 6 выполнено неравенство

$$\aleph_\alpha = \mathfrak{q}(C_{\omega_\alpha}) = \mathfrak{i}(C_{\omega_\alpha}) = \mathfrak{m}(C_{\omega_\alpha}) \leqq \mathfrak{n}(C_{\omega_\alpha}) = \max(\aleph_\alpha, 2^{\aleph_0}).$$

Заметим еще, что единственной точкой с нижним характером $> \aleph_0$ может быть только точка $(\omega_\alpha, 0)$. Поэтому характеристическая система $\mathfrak{P}(C_{\omega_\alpha})$ содержит не более двух элементов, из которых один всегда будет $\aleph_0$.

**Теорема 9.** *Пусть даны две мощности* $\aleph_\mu \leqq \aleph_\nu$, *причем* $2^{\aleph_0} \leqq \aleph_\nu$. *Тогда существует упорядоченный континуум $C$ такой что*

$$\aleph_\mu = \mathfrak{p}(C) \leqq \aleph_\nu = \mathfrak{q}(C) = \mathfrak{n}(C).$$

Доказательство. Пусть $P = C_{\omega_\nu}$ и пусть для $x \neq (\omega_\nu, 0)$ будет $P_x = \{x\}$, и для $x = (\omega_\nu, 0)$ пусть $P_x = C^*_{\omega_\mu}$. Множество всех точек $(x, y)$, где $x \in P$, $y \in P_x$, обозначим через $C_{\omega_\nu;\omega_\mu}$. По теореме 8 множество $C_{\omega_\nu;\omega_\mu}$ будет упорядоченным континуумом.

Для доказательства теоремы мы будем различать три случая: 1. мощности $\aleph_\mu$ и $\aleph_\nu$ регулярны. Тогда достаточно положит $C = C_{\omega_\nu;\omega_\mu}$. 2. мощность $\aleph_\mu$ регулярна, $\aleph_\nu$ не регулярна. Для $x \in P = C_{\omega_\nu}$, $x \neq (\omega_{\mu+1}, 0)$, $x \neq (\omega_\nu, 0)$ положим $P_x = \{x\}$, и для $x = (\omega_{\mu+1}, 0)$ возьмем $P_x = C_{\omega_\mu;\omega_\mu}$; наконец для $x = (\omega_\nu, 0)$ возьмем $P_x = \langle 0, 1\rangle$. Согласно теореме 8 множество $\mathbf{P}$ всех точек $(x, y)$, где $x \in P$, $y \in P_x$, представляет упорядоченный континуум; в этом случае достаточно положить $C = \mathbf{P}$. 3. мощность $\aleph_\mu$ не регулярна. Пусть $\omega_0 < \omega_1 < \ldots < \omega_\lambda < \ldots \to \omega_\mu$. Для $x \in P = C_{\omega_\nu}$, $x \neq (\omega_\lambda, 0)$, $\lambda < \mu$, $x \neq (\omega_\nu, 0)$ пусть $P_x = \{x\}$, и для $x = (\omega_\lambda, 0)$, $\lambda < \mu$ положим $P_x = C_{\omega_\lambda;\omega_\lambda}$; наконец для $x = (\omega_\nu, 0)$ пусть $P_x = \langle 0, 1\rangle$. И здесь по теореме 8 множество $\mathbf{P}$ всех точек $(x, y)$, $x \in P$, $y \in P_x$ будет упорядоченным континуумом и достаточно положить $C = \mathbf{P}$.

Легко убедиться, что этими тремя случаями исчерпаны все возможности и что в любом из них упорядоченный континуум $C$ обладает приведенными в теореме свойствами.

Характеристическая система $\mathfrak{S}(C)$ всех известных до сих пор упорядоченных континуумов $C$ содержит максимальный элемент, являющийся характеристикой $\mathfrak{s}(C)$. Возникает вопрос, всегда ли это должно быть так. Ответ на этот вопрос будет отрицательным. Характеристическая система $\mathfrak{S}(\mathbf{R})$ упорядоченного континуума $\mathbf{R}$, которые мы теперь построим, не содержит максимального элемента.

*Построение упорядоченного континуума* $\mathbf{R}$. Рассмотрим упорядоченный континуум $P$ со свойством[14]) $\mathfrak{m}(P) < \mathfrak{n}(P)$. Выверем в $P$ множество точек

$$x_0, x_1, \ldots, x_\lambda, \ldots \ (\lambda < \omega_\alpha),$$

где $\omega_\alpha$ — наименьшее порядковое число мощности $\aleph_\alpha = \mathfrak{n}(P)$. Положим $P_x = \{x\}$ для $x \in P$, $x \neq x_\lambda$ и $P_{x_\lambda} = C_{\omega_\lambda}$ для $\lambda < \omega_\alpha$.

[14]) Такой упорядоченный континуум существует, напр. интервал действительных чисел $\langle 0, 1\rangle$. Ф. Хаусдорф доказал существование таких континуумов мощности $2^{\aleph_{\xi+1}}$, поскольку $2^{\aleph_{\xi+1}} > 2^{\aleph_\xi}$. См. *F. Hausdorff*, цит. соч. стр. 180.

Рассмотрим словарно упорядоченный континуум **R** точек $(x, y)$, где $x \in P$, $y \in P_x$ и приведем прежде всего к противоречию предположение, что существует монотонная последовательность точек в **R** типа $\omega_{\omega_\alpha}$. Так как $\mathfrak{m}(P) < \aleph_\alpha$, то по теореме 6 в упорядоченном континууме $P$ не существует монотонной последовательности точек типа $\omega_{\omega_\alpha}$; отсюда вытекает существование точки $x \in P$ такой, что континуум $P_x$ содержит монотонную последовательность типа $\omega_{\omega_\alpha}$. Имеем $P_x = C_{\omega\lambda}$ при подходящем индексе $\lambda < \omega_\alpha$, так что в $C_{\omega\lambda}$ существует монотонная последовательность наивысшего типа $\omega_\lambda < \omega_{\omega_\alpha}$, что противоречит предположению.

Очевидно будет $\aleph_\lambda \in \mathfrak{S}(\mathbf{R})$ для любого $\lambda < \omega_\alpha$, так что $\sup \mathfrak{S}(\mathbf{R}) = \aleph_{\omega_\alpha}$. Поэтому характеристическая система $\mathfrak{S}(\mathbf{R})$ не имеет максимума.

По теореме 7 имеет место соотношение $\mathfrak{s} \leqq \mathfrak{r}_1 \leqq \mathfrak{r}_2 \leqq \mathfrak{s}^+$. Отсюда следует, что характеристическая система $\mathfrak{R}(C)$ может содержать единственный элемент $\mathfrak{s}$ или единственный элемент $\mathfrak{s}^+$ или в точности два элемента $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{s}^+$. Покажем теперь на примерах, что все три случая могут действительно наступить.

Соотношение $\mathfrak{s}(\langle 0, 1\rangle) = \mathfrak{r}_1(\langle 0, 1\rangle) = \mathfrak{r}_2(\langle 0, 1\rangle)$ доказывает что характеристическая система $\mathfrak{R}(\langle 0, 1\rangle)$ содержит единственный элемент $\mathfrak{s} \neq \mathfrak{s}^+$.

Пример континуума **R** показывает, что существуют упорядоченные континуумы, характеристические системы которых $\mathfrak{S}(C)$ не содержат максимального элемента; здесь имеет место $\mathfrak{s}^+(C) = \sup \mathfrak{S}(C) = \mathfrak{s}$. Для этих континуумов $C$ характеристическая система $\mathfrak{R}(C)$ содержит единственный элемент $\mathfrak{s}^+ = \mathfrak{s}$.

Мне не известно, существует ли упорядоченный континуум $C$ такой, что характеристическая система $\mathfrak{R}(C)$ содержит единственный элемент $\mathfrak{s}^+ \neq \mathfrak{s}$. Для наименьшей бесконечной мощности $\mathfrak{s} = \aleph_0$ этот вопрос равносилен известной проблеме Суслина, а именно, будет ли упорядоченный континуум, каждая непересекающаяся система интервалов которого является счетной, континуумом, упорядоченным подобно интервалу действительных чисел.

Для доказательства существования характеристической системы $\mathfrak{R}(C)$, состоящей из двух различных элементов $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{s}^+$, заметим, что для каждого счетного предельного порядкового числа $\alpha$ существует деление $\Delta_\alpha$ упорядоченного континуума действительных чисел $\langle 0, 1\rangle$, порядок которого будет $\delta_{\Delta_\alpha} \geqq \alpha$.

Действительно, достаточно из интеврала $\langle 0, 1\rangle$ выделить монотонные последовательности точек $x_0 < x_1 < \ldots < x_\lambda < < \ldots, y_0 > y_1 > \ldots > y_\lambda > \ldots,$ где $\lambda < \alpha$, так, чтобы $y_\lambda - x_\lambda \to 0$ для $\lambda \to \alpha$, и производить последовательое двоичое деление $\Delta_\alpha$ интервала $\langle 0, 1\rangle$ по правилу $(\pi)$, приведенному на стр. 376.

Пусть теперь $K$ означает множество комплексных чисел $x + \mathrm{i}y$, где $0 \leqq x \leqq 1$ и $0 \leqq y \leqq 1$. Упорядочим это множество следующим образом: $x + \mathrm{i}y < x' + \mathrm{i}y'$, если $x < x'$ или $x = x'$ и $y < y'$. Для $x \in \langle 0, 1\rangle$ обозначим через $P_x$ множество всех точек $x + \mathrm{i}y \in P$, где $0 \leqq y \leqq 1$. Определим два вида двоичного деления $\Delta_1$ и $\Delta_2$ упорядоченного континуума $K$.

Двоичное деление $\Delta_1$ получим путем последовательного деления пополам интервалов континуума $K$. Интервалы порядка $n$ будут иметь вид $\langle\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\rangle$, где $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 2$, $2^n(1 + \mathrm{i}) - 1$. Очевидно, что система всех интервалов порядка $\omega$ образована континуумами $P_x$, $x \in \langle 0, 1\rangle$. Интервалы порядка $\omega + n$ будут иметь вид $\langle x + \mathrm{i}\frac{k}{2^n}, x + \mathrm{i}\frac{k+1}{2^n}\rangle \subset P_x$, где $k = 0, 1, \ldots, 2^n-1$.

Двоичное деление $\Delta_2$ мы определим так: выделим прежде всего из интервала $\langle 0, 1\rangle$ множество иррациональных чисел

$$z_0, z_1, \ldots, z_\mu, \ldots \quad (\mu < \omega_1)$$

мощности $\aleph_1$. Из каждого континуума $P_{z_\mu}$, $\mu < \omega_1$, который упорядочен подобно интервалу действительных чисел $\langle 0, 1\rangle$, выделим монотонные последовательности

$$x_0^\mu < x_1^\mu < \ldots < x_\lambda^\mu < \ldots \text{ и } y_0^\mu > y_1^\mu > \ldots > y_\lambda^\mu > \ldots \ (\lambda < \omega_\mu),$$
$$y_\lambda^\mu - x_\lambda^\mu \to 0 \quad \text{для} \quad \lambda \to \omega_\mu.$$

Двоичное деление $\Delta_2$ получим путем последовательного деления пополам интервалов порядка $n$, так что интервалы порядка $\alpha \leqq \omega$ будут такие же, как и при делении $\Delta_1$. При дальнейшем делении мы будем различать два случая. В каждом интервале $P_{z_\mu}$, $\mu < \omega_1$ мы производим деление по правилу $(\pi)$, так что в $P_{z_{\mu+1}}$ существует хоть один интервал порядка $\omega_\mu$. В каждом интервале $P_x$, $x \neq z_\mu$ для $\mu < \omega_1$, произведем дальнейшее деление путем последовательного „деления пополам" упорядоченного континуума $P_x$ (подобного интервалу $\langle 0, 1\rangle$).

Ясно, что порядок первого деления $\delta_{\Delta_1} = \omega 2$ и что порядок второго деления $\delta_{\Delta_2} = \omega_1$. Поэтому будет $\mathfrak{r}_1(K) = \aleph_0$, и $\mathfrak{r}_2(K) = \aleph_1$, так что $\mathfrak{s} = \mathfrak{r}_1 \neq \mathfrak{r}_2 \neq \mathfrak{s}^+$.

Выясним еще, в каком отношении друг к другу стоят характеристические системы $\mathfrak{P}(C)$ и $\mathfrak{Q}(C)$. Так как нижний характер какой-либо точки не превосходит верхнего характера той же точки, то для каждого $\mathfrak{b} \in \mathfrak{Q}(C)$ существует такое $\mathfrak{a} \in$

$\in \mathfrak{P}(C)$, что $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$. Здесь возникает вопрос, будет ли $\mathfrak{P}(C) \subset \mathfrak{Q}(C)$ или $\mathfrak{Q}(C) \subset \mathfrak{P}(C)$. Это не должно быть всегда так. В самом деле, пусть $P$ означает множество всех трансфинитных последовательностей нулей и единиц типа $\omega_1$. Упорядочим $P$ словарно и идентифицируем соседние точки. Мы получим упорядоченный континуум $Q$ такой, что $\mathfrak{P}(Q) = \{\aleph_0, \aleph_1\}$, $\mathfrak{Q}(Q) = \{\aleph_1\}$. В этом случае будет $\mathfrak{P}(Q) - \mathfrak{Q}(Q) \neq 0$. С другой стороны для $\alpha > 0$ будет $\mathfrak{P}(C_{\omega_\alpha}) = \aleph_0$, но $\aleph_1 \in \mathfrak{Q}(C_{\omega_\alpha})$, так что $\mathfrak{Q}(C_{\omega_\alpha}) - \mathfrak{P}(C_{\omega_\alpha}) \neq 0$.

## Проблемы.

В теореме 9 было доказано, что можно построить $\mathfrak{m}$ — сепарабельный упорядоченный континуум произвольной мощности $\mathfrak{m}$.

**Проблема[15]) 1.** *Для каких мощностей $\mathfrak{n}$ существует упорядоченный континуум мощности $\mathfrak{n}$ с плотной частью мощности $< \mathfrak{n}$?*

**Проблема 2.** *Существует ли упорядоченный континуум $C$ такой, что характеристическая система $\mathfrak{J}(C)$ не содержит максимального элемента?*

Большинство построенных в настоящем исследовании континуумов отличается значительной степенью неоднородности. Упорядоченный континуум $T$ мы назовем квазиоднородным,[16]) если в каждом интервале существует интервал, подобный континууму $T$.

**Проблема 3.** *Найти общий способ, позволяющий из данного упорядоченного континуума построить квазиоднородный и симметричный упорядоченный континуум с сохранением определенных характеристик.*

---

[15]) При рецензии работы *М. Катетов* обратил внимание автора на то, что проблема имеет отрицательное решение для каждой мощности $\mathfrak{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{a}_k$, где $\mathfrak{a}_n \geqq 2^{\mathfrak{a}_{n-1}}$ для $n = 1, 2, \ldots$, причем $\mathfrak{a}_0 = \aleph_0$.

Доказательство. Предположим, что упорядоченный континуум $C$ имеет мощность $\mathfrak{n}$ и что существует плотная часть $M \subset C$, имеющая мощность $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$. Тогда, очевидно, для подходящего $k$ будет $\mathfrak{m} < \mathfrak{a}_k$ и одновременно ясно, что мощность $C$ не превосходит $2^{\mathfrak{m}}$, так что $\mathfrak{n} \leqq \mathfrak{a}_{k+1}$, что противоречит предположению.

[16]) *J. Novák,* цит. соч. ad [13]), стр. 90(73).

Summary.

## On some characteristics of an ordered continuum.

JOSEF NOVÁK, Praha.

(Received March 19, 1952).

Let $C$ be an ordered continuum containing two different end-points. Let us denote by $\mathfrak{P}(C)$, $\mathfrak{Q}(C)$, $\mathfrak{S}(C)$, $\mathfrak{J}(C)$, $\mathfrak{J}'(C)$, $\mathfrak{M}(C)$ and $\mathfrak{R}(C)$ respectively the set of cardinal numbers: min $(\aleph_\rho, \aleph_\sigma)$ of every point $x \in C$ with the character $c_{\rho\sigma}$, max $(\aleph_\rho, \aleph_\sigma)$, of all monotone sequences of points in $C$, of all subsets isolated in $C$, of all disjoint systems of non-degenerate intervals in $C$, of all subsets which are dense in $C$, of all orders of dyadic partitions $\Delta$ of the ordered continuum $C$. The cardinal numbers $\mathfrak{p} = \sup \mathfrak{P}(C)$, $\mathfrak{q} = \sup \mathfrak{Q}(C)$, $\mathfrak{s} = \sup \mathfrak{S}(C)$, $\mathfrak{i} = \sup \mathfrak{J}(C)$, $\mathfrak{i}' = \sup \mathfrak{J}'(C)$, $\mathfrak{m} = \min \mathfrak{M}(C')$, $\mathfrak{r}_1 = \min \mathfrak{R}(C)$, $\mathfrak{r}_2 = \sup \mathfrak{R}(C)$ are called the characteristics of the ordered continuum $C$.

The scope of the present paper is to study the characteristics mentioned above. F. Hausdorff proved that the cardinal number of the set of all points with symmetrical characters $c_{\rho\rho}$ is $\leqq \mathfrak{m}$. In the paper it is proved that it equals the cardinality $\mathfrak{n}(C)$ of the ordered continuum $C$, while the cardinal number of the set of all points with non-symmetrical character is $\leqq \mathfrak{m}$ (Theorem 3). From this we obtain the equivalence of the continuum hypothesis with the following problem: Does there exist or not an ordered continuum of power $2^{\aleph_0}$ such that $\aleph_1$ is the least power of the subset dense in it and such that the cardinal number of the set of all points with non-symmetrical character is $2^{\aleph_0}$.

The following relations (Theorem 5, 6 and 7) hold true:

$$\mathfrak{P}(C) \cup \mathfrak{Q}(C) \subset \mathfrak{S}(C) \subset \mathfrak{J}(C) = \mathfrak{J}'(C),$$
$$\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{q} = \mathfrak{s} \leqq \mathfrak{i} = \mathfrak{i}' \leqq \mathfrak{m} \leqq \mathfrak{n} \leqq \min (\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}, 2^{\mathfrak{r}_1}),$$
$$\mathfrak{s} \leqq \mathfrak{r}_1 \leqq \mathfrak{r}_2 \leqq \mathfrak{m} = \max (\mathfrak{i}, \mathfrak{r}_1) = \max (\mathfrak{i}, \mathfrak{r}_2),$$
$$\mathfrak{r}_2 \leqq \mathfrak{s}^+,$$

where $\mathfrak{s}^+$ is the least cardinal number such that $\mathfrak{a} < \mathfrak{s}^+$ for every $\mathfrak{a} \in \mathfrak{S}(C)$.

At the end of the paper some constructions of ordered continua are given. The basic construction is defined as follows: Let $P$ be an ordered set containing no gaps. Let $x \in P$ and let $P_x$ denote a one-point-set or an ordered continuum with two end-points or an ordered continuum without the last end-point; let the third possibility occur if and only if there is in $P$ a point $x_0 > x$ such that $z \in C$, $z > x$ implies $z \geqq x_0$. Now, let $\mathbf{P}$ be a set whose points are couples $(x, y)$, where $x \in P$ and $y \in P_x$. It is proved that the lexicographically ordered set $P$ is an ordered continuum (Theorem 5).

Let $P$ be the set of all ordinals $x \leqq \omega_\nu$ where $\omega_\nu$ is the least ordinal of power $\aleph_\nu$. Let $P_x = \langle 0,1)$ for $x \in P$, $x \neq \omega_\nu$ and $P_x = \{0\}$ for $x = \omega_\nu$. The ordered continuum of all elements $(x, y)$, $x \in P$, $y \in P_x$ will be denoted by $C_{\omega_\nu}$.

Let $\aleph_\mu \leqq \aleph_\nu$ and $2^{\aleph_0} \leqq \aleph_\nu$. Let $P = C_{\omega_\nu}$ and $P_x = \{x\}$ for $x \in P$, $x \neq (\omega_\nu, 0)$ whereas $P_x = C^*_{\omega_\mu}$ for $x = (\omega_\nu, 0)$. The set $C$ of all elements $(x, y) \in C$, $x \in P$, $y \in P_x$ is an ordered continuum and has the following property (Theorem 9):

$$\aleph_\mu = \mathfrak{p}(C) \leqq \aleph_\nu = \mathfrak{q}(C) = \mathfrak{n}(C).$$

By means of the basic construction an ordered continuum $\mathbf{R}$ is constructed such that sup $\mathfrak{S}(\mathbf{R})$ non $\in \mathfrak{S}(\mathbf{R})$; therefore $\mathfrak{s}^+(\mathbf{R}) =$ sup $\mathfrak{S}(\mathbf{R}) = \mathfrak{s}$. Since $\mathfrak{s} \leqq \mathfrak{r}_1 \leqq \mathfrak{r}_2 \leqq \mathfrak{s}^+$, we have $\mathfrak{R}(C) = \{\mathfrak{s}\}$ or $= \{\mathfrak{s}'\}$ or $= \{\mathfrak{s}, \mathfrak{s}'\}$. The examples $c = \langle 0,1 \rangle$, $C = \mathbf{R}$ and $C = K$, where $K$ denotes the lexicographically ordered set of all numbers $x + \mathrm{i}y$, $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, are given to prove that each of the three cases can occur.

At the end some problems are put forward concerning ordered continua.