Miroslav Katětov

О размерности несепарабельных пространств. I

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 2 (1952), No. 4, 333–368

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100056`

# О РАЗМЕРНОСТИ НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ. I

МИРОСЛАВ КАТЕТОВ (Miroslav Katětov), Прага.

(Поступило в редакцию 29/VIII 1952 г.)

Статья содержит результаты, касающиеся размерности метризуемых пространств любого веса (в частности, равносильности двух определений размерности), отображений этих пространств в нормированные линейные пространства, а также некоторых свойств локально конечных покрытий.

Настоящая работа в основном посвящена распространению некоторых предложений теории размерности на любые метризуемые (а иногда даже на любые нормальные) пространства. В частности, в работе доказывается, что „большая“ индуктивная размерность любого метризуемого пространства равна его размерности, определенной при помощи покрытий.*)

Настоящая первая часть работы состоит из трех параграфов. В § 1 доказывается ряд предложений, касающихся главным образом локально конечных покрытий и вообще локально конечных систем множеств. Эти результаты большей частью уже известны и включены в статью в связи с тем, что мы ими пользуемся в § 2 и 3 и во второй части работы; у некоторых из них даются новые доказательства. Новыми являются, насколько известно автору, теорема 1.9, усиливающая один уже известный результат, и некоторые леммы.

В § 2 содержатся результаты, касающиеся нульмерных и близких к нульмерным непрерывных отображений в нормированные линейные пространства, в частности в $E^n$. Нужно отметить, что здесь мы могли бы значительно упростить изложение, ограничиваясь рассмотрением отображений в $E^n$, которыми мы только и пользуемся в § 3; однако, во второй части работы нам понадобятся также отображения в нормированные линейные пространства бесконечной размерности.

В § 3 мы выводим из результатов § 1 и 2 теоремы о размерности метризуемых пространств любого веса.

---

*) Этот результат был доложен на I съезде венгерских математиков в 1950 г. и был опубликован в *ДАН СССР* **79**, 189—191 (1951).

# 1.

Приведем сначала некоторые основные определения и обозначения, а также несколько хорошо известных простых результатов, которыми мы будем постоянно пользоваться.

**1.1.** A. Если каждому элементу $\alpha$ некоторого непустого множества $A$ сопоставлен элемент $x_\alpha$, то мы говорим, что дана *система элементов* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$; множество $A$ мы называем *множеством индексов*. Обычно, множество индексов явно не указывается, и вместо $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ мы пишем $\{x_\alpha\}_\alpha$ или просто $\{x_\alpha\}$. Если мы имеем дело с двойными, тройными и т. д. индексами, то, например, $\{x_{\alpha\beta}\}_{\alpha\beta}$ означает систему $\{x_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in A, \beta \in B}$, а $\{x_{\alpha\beta}\}_\beta$ означает систему $\{x_{\alpha\beta}\}_{\beta \in B}$ (с фиксированным $\alpha$).

B. Пусть задано свойство $V$, которое имеет смысл для любого $x_\alpha$, $\alpha \in A$. Если существует конечное $K \subset A$ такое, что для любого $\alpha \in A - K$ $x_\alpha$ имеет свойство $V$, то мы говорим, что $x_\alpha$ имеет свойство $V$ для *почти всех* $\alpha$, или короче, что *почти все* $x_\alpha$ имеют свойство $V$.

C. Буквы $m$, $n$, $p$, $q$, $r$ обозначают во всей статье числа $-1, 0, 1, 2, \ldots$, а $m$, $n$, $r$ могут кроме того принимать значение $\infty$. Мы полагаем $p < \infty$, $\infty + p = \infty$, $\infty - p = \infty$ для любого $p$. Там, где $\infty$ играет роль мощности, мы считаем, что $\infty = \aleph_0$.

D. *Порядком* системы множеств $\{M_\alpha\}$ *в элементе* $x \in \sum\limits_\alpha M_\alpha$ мы называем наибольшее $n$ такое, что имеется $n + 1$ индексов $\alpha$ таких, что $x \in M_\alpha$. *Порядком* системы $\{M_\alpha\}$ мы назовем в случае $\sum\limits_\alpha M_\alpha \neq \emptyset$ верхнюю границу порядков $\{M_\alpha\}$ в элементах $x \in \Sigma M_\alpha$, а в случае $\Sigma M_\alpha = \emptyset$ число $-1$. Порядок системы $\{M_\alpha\}$ будем обозначать через $\operatorname{ord}\{M_\alpha\}$.

Мощностью системы $\{x_\alpha\}$ называется, конечно, мощность множества ее индексов.

E. Система множеств $\{M_\alpha\}$ называется *звездно конечной*, если при любом $\alpha_0$ имеем $M_{\alpha_0} M_\alpha = \emptyset$ для почти всех $\alpha$, *точечно конечной*, если для любого $x \in \Sigma M_\alpha$ имеем $x \text{ non} \in M_\alpha$ для почти всех $\alpha$.

F. Если даны системы множеств $\{C_\alpha\}$, $\{D_\beta\}$ и для любого $\alpha$ существует $\beta$ такое, что $C_\alpha \subset D_\beta$, то мы говорим, что система $\{C_\alpha\}$ *вписана* в $\{D_\beta\}$, и пишем $\{C_\alpha\} \leqq \{D_\beta\}$.

G. Две системы множеств $\{C_\alpha\}$ и $\{D_\alpha\}$ с тем же множеством индексов называются *комбинаторно подобными*, если для любого конечного множества $\sigma$, состоящего из индексов $\alpha$, или

$\prod_{\alpha\in\sigma} C_\alpha = \emptyset = \prod_{\alpha\in\sigma} D_\alpha$, или же $\prod_{\alpha\in\sigma} C_\alpha \neq \emptyset \neq \prod_{\alpha\in\sigma} D_\alpha$. Если $\{C_\alpha\}$ и $\{D_\alpha\}$ комбинаторно подобны, то мы пишем $\{C_\alpha\} \cong \{D_\alpha\}$.

H. Если $F$ — отображение множества $X$ в множество $Y$ и $S \subset X$, то через $F \mid S$ или $F_S$ мы будем обозначать отображение $f$ множества $S$ в $Y$, определяемое равенством $f(x) = F(x)$.

**1.2.** A. Буква $P$ обозначает во всей статье топологическое пространство.

B. Множество $\mathfrak{A}$ открытых подмножеств пространства $P$ называется *открытой базой* $P$, если любое непустое открытое $G \subset P$ является суммой некоторых множеств из $\mathfrak{A}$. Наименьшая мощность открытой базы пространства $P$ называется *весом* $P$.

C. Система множеств $\{M_\lambda\}$, где $M_\lambda \subset P$, называется *локально конечной* в $P$, если любая точка $x \in P$ имеет окрестность $U$ такую, что $UM_\lambda = \emptyset$ для почти всех $\lambda$.

D. Легко доказывается следующее предложение.

*Если $\{M_\lambda\}$ — локально конечная система подмножеств пространства $P$, то $\overline{\sum_\lambda M_\lambda} = \sum_\lambda \overline{M_\lambda}$, а система $\{\overline{M_\lambda}\}$ также локально конечна. В частности, если все $M_\lambda$ замкнуты, то $\sum_\lambda M_\lambda$ также замкнуто.*

E. Отметим следующий хорошо известный результат.

*Всякое $F_\sigma$-подмножество нормального пространства само является нормальным пространством.*

F. Топологическое пространство называется *наследственно нормальным*, если всякое его подпространство нормально; *совершенно нормальным*, если оно нормально и всякое его замкнутое подмножество является $G_\delta$-множеством.

Из E. легко вытекает: *совершенно нормальное пространство наследственно нормально.*

G. *Если $P$ наследственно нормально, $A \subset P$, $B \subset P$, $\overline{A}B + A\overline{B} = \emptyset$, то существуют открытые $U \supset A$, $V \supset B$ такие, что $UV = \emptyset$.*

H. Если $P$ и $T$ — топологические пространства, то $T^P$ будет обозначать множество всех непрерывных отображений $P$ в $T$.

I. Напомним, что метрическим пространством мы называем множество с заданной в нем метрикой, метризуемым пространством — топологическое пространство, в котором можно ввести метрику так, что определяемая ею топология совпадает с заданной.

J. Буква $R$ будет всегда обозначать метрическое пространство. Если $M \subset R$, $M \neq \emptyset$, полагаем $\operatorname{diam} M = \sup\limits_{\substack{x \in M \\ y \in M}} \varrho(x, y)$; полагаем $\operatorname{diam} \emptyset = 0$.

K. Метризуемое пространство называется *топологически полным*, если оно гомеоморфно полному метрическому пространству.

**1.3.** A. Термин *нормированное линейное пространство* (сокращенно н. л. п.) мы применяем в обычном смысле. *Пространством Банаха* мы называем полное н. л. п.

B. При $1 \leqq n < \infty$ $E^n$ обозначает обычное $n$-мерное пространство векторов (а иногда также любое линейно с ним изоморфное н. л. п.); $E^0$ обозначает одноточечное н. л. п. Вместо $E^1$ пишем также $E$.

C. Если дано н. л. п. $R$ и $\emptyset \neq M \subset R$, то через $[M]$ мы обозначим множество всех $\sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k x_k$, где $x_k \in M$; полагаем $[\emptyset] = (0)$.

D. *Линейной размерностью* н. л. п. $R$ (обозначение: $\operatorname{lin} \dim R$) мы называем наименьшую мощность множества $M \subset R$ такого, что $[M]$ плотно в $R$. *Линейной размерностью* линейного множества $L$ (т. е. такого непустого множества $L \subset R$, что с элементами $x_k$ $L$ содержит любое $\sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k x_k$, где $\sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k = 1$) мы называем линейную размерность н. л. п. $L_0$, состоящего из всех $x - y$, где $x \in L$, $y \in L$.

E. Легко доказать: *если $M \subset R$, $R$ — н. л. п., $x \in R$, $y \in R$, $x \in [M + (y)]$, $x \operatorname{non} \in [M]$, то $y \in [M + (x)]$.*

F. Пусть дано н. л. п. $R$ и замкнутое линейное множество $L \subset R$. Тогда множество $L_0$ всех $x - y$, где $x \in L$, $y \in L$, является замкнутым подпространством в $R$. Линейную размерность факторпространства $R/L_0$ мы называем *линейным декрементом* $L$ по отношению к $R$.

G. Система $\{x_\lambda\}$ точек н. л. п. $R$ называется *линейно независимой*, если (при взаимно различных $\lambda_k$) из $\sum\limits_{k=1}^{p} \alpha_k x_{\lambda_k} = 0$ вытекает $\alpha_k = 0$ ($k = 1, \ldots, p$). Система $\{x_\lambda\}$ называется *линейно свободно расположенной* в $R$, если любое линейное множество $L \subset R$ линейной размерности $n < \infty$, отличное от $R$, содержит $x_\lambda$ для не более чем $n + 1$ индексов $\lambda$.

H. Если $p \geqq 0$, система $\{a_k\}_{k=0}^{p}$ линейно свободно расположена в $R$, $\operatorname{lin}\dim R \geqq p$, то множество всех $\sum_0^p \alpha_k a_k$, где $\alpha_k \geqq 0$, $\sum_0^p \alpha_k = 1$, мы называем симплексом размерности $p$, натянутым на $a_0, \ldots, a_p$.

Отметим следующий очевидный факт.

*Наименьшее выпуклое множество, содержащее заданное конечное подмножество некоторого н. л. п., является суммой конечного числа симплексов.*

**1.4.** A. *Комбинаторной размерностью* (обозначение $\dim P$) пространства $P$ назовем наименьшее $n$ такое, что во всякое конечное открытое покрытие пространства $P$ можно вписать конечное открытое покрытие порядка $\leqq n$.

B. Т. наз. *большую индуктивную размерность*, которую впервые рассматривал Э. Чех [2]*), мы обозначаем через Ind и определяем следующим образом: $\operatorname{Ind}\emptyset = -1$; $\operatorname{Ind}P \leqq n$, где $0 \leqq n < \infty$, если для любого замкнутого подмножества $F$ и открытого $G \supset F$ существует открытое $U$ такое, что $F \subset U \subset \subset \overline{U} \subset G$, $\operatorname{Ind}(\overline{U} - U) \leqq n - 1$; $\operatorname{Ind}P = \infty$, если ни для одного $n < \infty$ не имеет места $\operatorname{Ind}P \leqq n$; если $0 \leqq n < \infty$, $\operatorname{Ind}P \leqq n$, но не имеет места $\operatorname{Ind}P \leqq n - 1$, то $\operatorname{Ind}P = n$.

C. Как известно из теории размерности, $\dim P = \operatorname{Ind}P$ для нормальных пространств счетного веса, и $\dim E^n = n$. Однако, мы не будем пользоваться этими теоремами; результаты, которые мы будем применять, приводятся далее (D—G).

D. *Если $S \subset P$, $S$ замкнуто, то* $\dim S \leqq \dim P$.

E. $\dim E^n \leqq n$, $\operatorname{Ind}E^n \leqq n$.

F. *$E^n$ является суммой $n + 1$ множеств размерности (комбинаторной) нуль.*

G. *Если $P$ нормально, $A_k \subset P$ замкнуты,* $\dim A_k \leqq n$, *то* $\dim \sum_{k=1}^{\infty} A_k \leqq n$ (см. [3]). Отметим, что в § 1—3 (кроме теоремы 1.9, которая однако в дальнейшем не применяется) мы не будем пользоваться этим результатом.

**1.5.** Переходим теперь к основному содержанию параграфа — к рассмотрению локально конечных открытых покрытий (сокращенно: л. к. о. п.).

---

*) Цифры в квадратных скобках означают ссылки на список литературы, приведенный в конце статьи.

**Лемма**. *Пусть $P$ нормально $G_\lambda \subset P$ открыты, $\Sigma G_\lambda = P$. Если $\{G_\lambda\}$ точечно конечно, то существуют замкнутые $F_\lambda \subset G_\lambda$ такие, что $\Sigma F_\lambda = P$.*

Доказательство опускаем; см. [4].

**1.6. Лемма.** *Если $P$ нормально, $\{G_\lambda\}$ — его локально конечное открытое покрытие, то существуют непрерывные функции $\varphi_\lambda$ в $P$ такие, что (1) $\varphi_\lambda(x) = 0$ для $x \in P - G_\lambda$; (2) $\varphi_\lambda(x) \geqq 0$, $\sum\limits_\lambda \varphi_\lambda(x) = 1$ для любого $x \in P$.*

*Если $R$ — нормированное линейное пространство, $a_\lambda \in R$ и если непрерывные функции $\varphi_\lambda$ имеют свойство (1), а $f(x) = \sum\limits_\lambda \varphi_\lambda(x)\, a_\lambda$ для любого $x \in P$, то $f$ непрерывно. Если $\varphi_\lambda$ имеют также свойство (2), то любое $f(x)$ содержится в симплексе, натянутом на некоторые из точек $a_\lambda$.*

Доказательство. Согласно 1.5, существуют замкнутые $F_\lambda \subset G_\lambda$ такие, что $\Sigma F_\lambda = P$. Для каждого $\lambda$ возьмем $\psi_\lambda \in [0, 1]^P$ такую, что $\psi_\lambda(x) = 0$ для $x \in P - G_\lambda$, $\psi_\lambda(x) = 1$ для $x \in F_\lambda$. Для любого $x \in P$ положим $\psi(x) = \sum\limits_\lambda \psi_\lambda(x)$; сумма $\sum\limits_\lambda \psi_\lambda(x)$ имеет смысл, так как при любом $x \in P$ имеем $x \in P - G_\lambda$, $\psi_\lambda(x) = 0$ для почти всех $\lambda$. Для любого $x \in P$ существует окрестность $U$ такая, что $UG_\lambda = \emptyset$ для почти всех $\lambda$, так что для почти всех $\lambda$ мы имеем $\psi_\lambda(z) = 0$ для каждого $z \in U$. Из этого легко вытекает, что $\psi$ непрерывна в точке $x$ и, следовательно, вообще непрерывна.

Из $\Sigma F_\lambda = P$ далее вытекает $\psi(x) \geqq 1$ для любого $x \in P$. Положим $\varphi_\lambda(x) = \psi_\lambda(x) : \psi(x)$. Легко видеть, что $\varphi_\lambda$ удовлетворяют требованиям (1), (2).

Если $\varphi_\lambda$ удовлетворяют (1), то любое $x \in P$ имеет окрестность $U$ такую, что для почти всех $\lambda$ имеем $\varphi_\lambda(U) = (0)$. Из этого вытекает непрерывность отображения $f$, заданного равенством $f(x) = \sum\limits_\lambda \varphi_\lambda(x)\, a_\lambda$. Последнее утверждение леммы следует из того, что при любом $x \in P$ имеем $\varphi_\lambda(x) = 0$ для почти всех $\lambda$, и из 1.3 Н.

**1.7.** Следующий результат имеет основное значение для всего параграфа.

**Лемма.** *Пусть $P$ нормально, $\{G_\lambda\}$ — его локально конечное открытое покрытие порядка $n$. Тогда существуют локально конечные открытые покрытия $\{H_\mu\}$ и $\{U_\nu\}$ такие, что*

(а) *$\{H_\mu\}$, а также $\{U_\nu\}$ является соединением не более чем*

*$n+1$ систем порядка* 0; *следовательно*, $\operatorname{ord}\{H_\mu\} \leqq n$, $\operatorname{ord}\{U_\nu\} \leqq \leqq n$;

(b) *для любого $x \in P$ сущестцует $\lambda$ такое, что $H_\mu \subset G_\lambda$, если $x \in H_\mu$*;

(c) *любое $U_\nu$ пересекает лишь конечное число множеств $H_\mu$*;

(d) *мощность $\{H_\mu\}$ и $\{U_\nu\}$ не превышает мощности $\{G_\lambda\}$, если она бесконечна, и является конечной, если мощность $\{G_\lambda\}$ конечна.*

Доказательство. I. Пусть функции $\varphi_\lambda$ имеют по отношению к $\{G_\lambda\}$ свойства (1), (2), указанные в 1.6. Будем обозначать через $\mu$, $\nu$, $\varrho$ конечные множества индексов $\lambda$. Для любого $\mu$ и любого $\varepsilon > 0$ обозначим через $\Gamma(\mu, \varepsilon)$ множество точек $x \in P$ таких, что $\sum\limits_{\lambda\in\mu}\varphi_\lambda(x) > 1 - \varepsilon$; следовательно, в частности, $\Gamma(\emptyset, \varepsilon) = \emptyset$ при $0 < \varepsilon \leqq 1$, $\Gamma(\emptyset, \varepsilon) = P$ при $\varepsilon > 1$. Легко установить, что множества $\Gamma(\mu, \varepsilon)$ открыты и

$$\Gamma(\mu, \varepsilon)\, \Gamma(\mu', \varepsilon') \subset \Gamma(\mu\mu', \varepsilon + \varepsilon'), \tag{1}$$

$$\Gamma(\mu, \varepsilon) \subset \Gamma(\mu', \varepsilon), \text{ если } \mu \subset \mu', \tag{2}$$

$$\overline{\Gamma(\mu, \varepsilon)} \subset \Gamma(\mu, \varepsilon'), \text{ если } \varepsilon < \varepsilon'. \tag{2a}$$

II. Пусть дана произвольная последовательность $e = \{\varepsilon_m\}_{m=0}^{\infty}$ положительных чисел таких, что $\varepsilon_0 < 1$, $\varepsilon_{m+1} < \frac{1}{4}\varepsilon_m$. Положим

$$V_e(\mu) = \Gamma(\mu, \varepsilon_m), \quad W_e(\mu) = \Gamma(\mu, \tfrac{1}{2}\varepsilon_m),$$

где $m$ равно числу элементов в множестве $\mu$. Из (1) и (2) легко вытекает:

$$\text{если } \mu \neq \mu\nu \neq \nu, \text{ то } V_e(\mu)\, V_e(\nu) \subset W_e(\mu\nu). \tag{3}$$

Условимся теперь, что до конца доказательства $\mu$ и $\nu$ будут обозначать только непустые конечные множества индексов. Положим

$$H_e(\mu) = V_e(\mu) - \sum_{\substack{\varrho\subset\mu \\ \varrho\neq\mu}} \overline{W_e(\varrho)}.$$

Тогда из (3) вытекает:

$$\text{если } \mu \neq \mu\nu \neq \nu, \text{ то } V_e(\mu)\, H_e(\nu) = \emptyset, \ H_e(\mu)\, H_e(\nu) = \emptyset. \tag{4}$$

Очевидно, если $\mu \subset \nu$, $\mu \neq \nu$, то $W_e(\mu)\, H_e(\nu) = \emptyset$. Из этого и из (4) вытекает:

$$\text{если } W_e(\mu)\, H_e(\nu) \neq \emptyset, \text{ то } \nu \subset \mu. \tag{5}$$

Пусть $\lambda \in \mu$, $z \in H_e(\mu)$. Тогда $z \in V_e(\mu)$, так что $\sum\limits_{\lambda\in\mu}\varphi_\lambda(z) > 1 - \varepsilon_m$, где $m$ равно мощности $\mu$. Если бы при этом было $z$ non $\epsilon\, G_\lambda$, то, полагая $\varrho = \mu - (\lambda)$, мы бы получили $\varphi_\lambda(z) = 0$, $\sum\limits_{\lambda\in\varrho}\varphi_\lambda(z) > 1 - \varepsilon_m > 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_{m-1}$, т. е. $z \in \Gamma(\varrho, \frac{1}{2}\varepsilon_{m-1}) = W_e(\varrho)$, $z$ non $\epsilon\, H_e(\mu)$, что невозможно. Итак, если $\lambda \in \mu$, $z \in H_e(\mu)$, то $z \in G_\lambda$. Следовательно,

$$\text{если}\quad \lambda \in \mu, \quad \text{то} \quad H_e(\mu) \subset G_\lambda. \tag{6}$$

Из (6) вытекает: если $x \in H_e(\mu)$, $\mu$ содержит $m$ элементов, то $\{G_\lambda\}$ имеет в точке $x$ порядок не менее $m - 1$. Итак,

$$\text{если } \mu \text{ содержит } m \text{ элементов, } m > \operatorname{ord}\{G_\lambda\} + 1, \text{ то } H_e(\mu) = \emptyset. \tag{7}$$

III. Очевидно, $\sum\limits_\mu V_e(\mu) = P$. Для любого $x \in P$ существует, как легко видеть, $\mu = \mu(x) \neq \emptyset$ такое, что $x \in V_e(\mu)$, но $z$non $\epsilon$ non $\epsilon\, V_e(\varrho)$, если $\varrho \subset \mu$, $\varrho \neq \mu$; очевидно, $x \in H_e(\mu)$. Итак,

$$\sum_\mu H_e(\mu) = P. \tag{8}$$

Для каждого $x \in P$ выберем теперь $\lambda = \lambda(x)$ так, чтобы $\lambda(x) \in \mu(x)$. Если $x \in H_e(\nu)$, то из (4) вытекает, что $\mu(x) \subset \nu$ или $\nu \subset \mu(x)$; однако, из определения $\mu(x)$ и из $x \in H_e(\nu) \subset V_e(\nu)$ вытекает, что $\nu \subset \mu(x)$, $\nu \neq \mu(x)$ невозможно; итак, $\mu(x) \subset \nu$, $\lambda(x) \in \nu$. Следовательно, согласно (6),

$$\text{если}\quad x \in H_e(\nu), \text{ то } H_e(\nu) \subset G_{\lambda(x)}. \tag{9}$$

IV. Обозначим через $e'$ последовательность $\{\varepsilon'_m\}$, где $\varepsilon'_m = \frac{1}{2}\varepsilon_m$. Тогда $V_{e'}(\mu) = W_e(\mu)$ и, следовательно,

$$H_{e'}(\mu) \subset W_e(\mu). \tag{10}$$

Будем обозначать через (4′), ..., (9′) формулы (4), ..., (9), в которых вместо $e$ подставим $e'$ (они, разумеется, остаются при этом верными). Положим $H_\mu = H_e(\mu)$, $U_\nu = H_{e'}(\nu)$; из (10) вытекает $U_\nu \subset W_e(\nu)$. Множества $H_\mu$ и $U_\nu$, очевидно, открыты; согласно (8) и (8′) $\{H_\mu\}$ и $\{U_\nu\}$ являются покрытиями $P$. Так как, очевидно, $\sum\limits_\mu W_e(\mu) = P$, $\sum\limits_\mu W_{e'}(\mu) = P$, а в силу (5) и (5′) при заданном $\mu$ $W_e(\mu)$ или, соответственно, $W_{e'}(\mu)$ пересекает лишь конечное число множеств $H_e(\nu)$ или, соответственно, $H_{e'}(\nu)$, то $\{H_\mu\}$ и $\{U_\nu\}$ локально конечны. Далее, $\{H_\mu\}$ является, очевидно, соединением систем $\{H_\mu\}_{\mu\in M_k}$, где $M_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ обозначает множество всех $\mu$, состоящих из $k$ элементов; то же имеет место, соответственно, для $\{U_\nu\}$. Так как по (4) и (4′) упомянутые системы имеют порядок не более 0, то из (7) и (7′) вытекает утверждение (a) леммы. Утверждение (b) вытекает из (6) и (6′). Утверждение

(c) вытекает из того, что, как уже было указано, $U_\nu \subset W_e(\nu)$ и каждое $W_e(\nu)$ пересекает лишь конечное число множества $H_e(\mu)$. Наконец, (d) вытекает из того, что мощность множества всех $\mu$ или конечна или равна мощности $\{G_\lambda\}$.

**1.8. Лемма**. *Пусть дано локально конечное открытое покрытие $\{G_\lambda\}$ пространства $P$ и локально конечная система $\{F_\nu\}$ его замкнутых подмножеств, причем $\Sigma F_\nu = P$, $\dim F_\nu \leqq$ n для каждого $\nu$. Если каждое $F_\nu$ пересекает лишь конечное число множеств $G_\lambda$, то существуют открытые $H_\lambda \subset G_\lambda$ такие, что $\sum\limits_\lambda H_\lambda = P$, $\operatorname{ord}\{H_\lambda\} \leqq n$.*

Доказательство. Мы можем, конечно, предполагать, что множество индексов $\nu$ состоит из всех порядковых чисел меньших некоторого фиксированного $\alpha$. Построим теперь при помощи трансфинитной индукции по $\nu$ множества $G_{\nu\lambda}$, $A_{\nu\lambda}$. Пусть $\nu < \alpha$ и пусть для всех $\mu < \nu$ уже определены замкнутые множества $A_{\mu\lambda}$ и открытые множества $G_{\mu\lambda}$ таким образом, что для любого $\mu < \nu$ имеем

(a) $A_{\mu\lambda} \subset F_\mu$ для любого $\lambda$;

(b) $G_{\mu\lambda} = G_\lambda - \sum\limits_{\varrho<\mu} A_{\varrho\lambda}$ для любого $\lambda$;

(c) $\sum\limits_\lambda (G_{\mu\lambda} - A_{\mu\lambda}) = P$;

(d) $\operatorname{ord}\{F_\mu G_{\mu\lambda} - A_{\mu\lambda}\}_\lambda \leqq n$.

Определим теперь множества $G_{\nu\lambda}$, $A_{\nu\lambda}$. Положим $G_{\nu\lambda} = G_\lambda - \sum\limits_{\mu<\nu} A_{\mu\lambda}$, так что, в частности, при $\nu = 0$ имеем $G_{0\lambda} = G_\lambda$. Так как $A_{\mu\lambda} = F_\mu$, система $\{F_\mu\}$ локально конечна, то по 1.2D все $\sum\limits_{\nu<\mu} A_{\mu\lambda}$ замкнуты и потому все $G_{\nu\lambda}$ открыты.

Покажем, что $\sum\limits_\lambda G_{\nu\lambda} = P$. Если бы $x \in P - \sum\limits_\lambda G_{\nu\lambda}$, то мы бы имели $x \in \sum\limits_{\nu<\mu} A_{\mu\lambda}$ для каждого $\lambda$ такого, что $x \in G_\lambda$. Число таких $\lambda$ конечно; выберем для каждого из них определенное $\mu(\lambda)$ такое, что $\mu(\lambda) < \nu$, $x \in A_{\mu(\lambda),\lambda}$ и положим $\tau = \max \mu(\lambda)$. Тогда для любого $\lambda$ или (1) $x$ non $\in G_\lambda$ и потому $x$ non $\in G_{\tau\lambda}$, или (2) $x \in G_\lambda$, $x \in A_{\mu(\lambda),\lambda}$, так что в случае $\mu(\lambda) < \tau$ имеем, в силу (b), $x$ non $\in G_{\tau\lambda}$, а в случае $\mu(\lambda) = \tau$ имеем просто $x \in A_{\tau\lambda}$. Итак, для любого $\lambda$ получаем $x$ non $\in G_{\tau\lambda} - A_{\tau\lambda}$, что противоречит (c), так как $\tau < \nu$. Следовательно, имеем $\sum\limits_\lambda G_{\nu\lambda} = P$.

Из $\sum\limits_\lambda G_{\nu\lambda} = P$ вытекает, что система всех непустых $G_{\nu\lambda} F_\nu$ является открытым покрытием подпространства $F_\nu$; из того, что каждое $F_\nu$ пересекает лишь конечное число множества $G_\lambda$, следует, что упомянутое покрытие конечно. Поэтому, ввиду $\dim F_\nu \leqq n$, существуют открытые в $F_\nu$ множества $U_\lambda \subset \overline{G_{\nu\lambda} F_\nu}$ такие, что $\operatorname{ord}\{U_\lambda\} \leqq n$. Положим теперь $A_{\nu\lambda} = \overline{G_{\nu\lambda} F_\nu} - U_\lambda$. Очевидно, $A_{\nu\lambda}$ замкнуты и условие (a) выполняется (с $\mu = \nu$). Легко видеть, что $U_\lambda = G_{\nu\lambda} F_\nu - A_{\nu\lambda}$ и, следовательно, $\operatorname{ord}\{G_{\nu\lambda} F_\nu - A_{\nu\lambda}\}_\lambda \leqq n$, т. е. условие (d) выполняется также при $\mu = \nu$. Далее, $\sum\limits_\lambda (G_{\nu\lambda} - A_{\nu\lambda}) \supset \sum\limits_\lambda G_{\nu\lambda} - F_\nu = P - F_\nu$, $F_\nu \cdot \sum\limits_\lambda (G_{\nu\lambda} - A_{\nu\lambda}) = \sum\limits_\lambda (F_\nu G_{\nu\lambda} - A_{\nu\lambda}) = \sum\limits_\lambda U_\lambda = F_\nu$, так что $\sum\limits_\lambda (G_{\nu\lambda} - A_{\nu\lambda}) = P$, т. е. (c) выполняется при $\mu = \nu$.

Из доказанного вытекает, что можно построить открытые $G_{\mu\lambda}$ и замкнутые $A_{\mu\lambda}$ так, что условия (a)—(d) выполняются для всех $\mu < \alpha$.

Положим теперь $H_\lambda = G_\lambda - \sum\limits_{\nu<\alpha}{}_\nu A_\lambda$. Так как $\{F_\nu\}_\nu$ и, следовательно, каждая $\{A_{\nu\lambda}\}_\nu$ локально конечна, то, как вытекает из 1.2D, множества $H_\lambda$ открыты. Из (d) вытекает, что при любом $\mu < \alpha$ $\operatorname{ord}\{F_\mu G_\lambda - \sum\limits_{\varrho \leqq \mu} A_{\rho\lambda}\}_\lambda \leqq n$ и потому также $\operatorname{ord}\{F_\mu H_\lambda\}_\lambda \leqq n$. Так как $\Sigma F_\mu = P$, то из этого вытекает $\operatorname{ord}\{H_\lambda\} \leqq n$. Остаетстя доказать, что $\Sigma H_\lambda = P$. Предположим, наоборот, что $x \in P - \Sigma H_\lambda$. Имеется конечное число индексов $\lambda$ таких, что $x \in G_\lambda$; так как $x \operatorname{non} \in H_\lambda$, то можно подобрать для этих $\lambda$ индексы $\mu = \mu(\lambda) < \alpha$ так, чтобы $x \in A_{\mu(\lambda), \lambda}$. Положим $\tau = \max \mu(\lambda)$. Тогда $\tau < \alpha$, $x \operatorname{non} \in G_{\tau\lambda} - A_{\tau\lambda}$ для любого $\lambda$; это противоречит условию (c).

**1.9.** Следующая теорема является усилением одного из результатов К. Морита [9, теорема 3.2].

**Теорема.** *Пусть дана локально конечная система $\{A_\nu\}$ подмножеств пространства $P$ и пусть $\dim A_\nu \leqq n$. Если $A_\nu$ замкнуты или же если $P$ нормально, а $A_\nu$ являются $F_\sigma$-множествами, то* $\dim \sum\limits_\nu A_\nu \leqq n$.

Доказательство. Если $A_\nu$ замкнуты, то, взяв любое конечное о. п. $\{G_\lambda\}$, применяем 1.8. Если же $A_\nu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} F_{\nu k}$, где $F_{\nu k}$ замкнуты, то по 1.4D $\dim F_{\nu k} \leqq n$, так что при $k = 1, 2, \ldots$ имеем $\dim \sum\limits_\nu F_{\nu k} \leqq n$, причем по 1.2D множество $\sum\limits_\nu F_{\nu k}$ замкнуто.

Если $P$ нормально, то по 1.4G из этого вытекает $\dim \sum_k \sum_\nu F_{\nu k} \leqq n$, т. е. $\dim \sum_\nu A_\nu \leqq n$.

**1.10.** Приведем еще (хотя он нам в дальнейшем и не понадобится) следующий результат, по своей формулировке вполне аналогичный предшествующей теореме.

*Пусть дана локально конечная система $\{A_\nu\}$ подмножеств пространства $P$ и пусть все пространства $A_\nu$ нормальны. Если $A_\nu$ замкнуты или же если $P$ нормально, а $A_\nu$ являются $F_\sigma$-множествами, то пространство $\sum_\nu A_\nu$ нормально.*

Доказательство. Пусть $A_\nu$ замкнуты. Достаточно доказать: если $U$, $V$ открыты в $Q$, где $Q = \sum_\nu A_\nu$, и $U + V = Q$, то существуют замкнутые в $Q$ множества $K \subset U$, $L \subset V$ такие, что $K + L = Q$. Так как $A_\nu$ нормальны, то для любого $\nu$ существуют замкнутые в $A_\nu$ множества $K_\nu \subset UA_\nu$, $L_\nu \subset UA_\nu$ такие, что $K_\nu + L_\nu = A_\nu$. Положим $K = \sum_\nu K_\nu$, $L = \sum_\nu L_\nu$. Очевидно, $K \subset \subset U, L \subset V, K + L = Q$. Так как $\{K_\nu\}$ и $\{L_\nu\}$ локально конечны, то, в силу 1.2D $K$ и $L$ замкнуты в $Q$.

Если каждое $A_\nu$ является $F_\sigma$-множеством, и $P$ нормально, то полагаем $A_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} B_{\nu k}$, где $B_{\nu k}$ замкнуты в $P$; далее положим $C_k = \sum_\nu B_{\nu k}$. Тогда $C_k$ замкнуты (по 1.2D), так что $\sum_\nu A_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} C_k$ нормально в силу 1.2E.

**1.11.** Следующий результат, принадлежащий C. H. Dowker'у [5], вытекает немедленно из 1.7 и 1.8.

**Теорема.** *Если пространство $P$ нормально, то в любое его локально конечное открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие порядка не превосходящего* $\dim P$.

Доказательство. Если дано л. к. о. п. $\{G_\lambda\}$, то по 1.7 существуют л. к. о. покрытия $\{H_\mu\}$ и $\{U_\nu\}$ такие, что $\{H_\mu\} \leqq \leqq \{G_\lambda\}$ и каждое $U_\nu$ пересекает лишь конечное число множеств $H_\mu$. Согласно 1.5, существуют замкнутые $F_\nu \subset U_\nu$ такие, что $\Sigma F_\nu = P$. Так как $\dim F_\nu \leqq \dim P$ и система $\{F_\nu\}$ локально конечна, то из 1.8 вытекает существование открытых $V_\mu \subset H_\mu$ таких, что $\Sigma V_\mu = P$, $\operatorname{ord}\{V_\mu\} \leqq \dim P$. Очевидно, система $\{V_\mu\}$ локально конечна, $\{V_\mu\} \leqq \{G_\lambda\}$.

Замечание. Очевидно, имеет место даже несколько усиленное утверждение: *если дано локально конечное покрытие*

$\{G_\lambda\}$ *нормального пространства* $P$, *то существуют открытые* $\Gamma_\lambda \subset G_\lambda$ *такие, что* $\Sigma\Gamma_\lambda = P$, $\operatorname{ord}\{\Gamma_\lambda\} \leqq \dim P$.

Действительно, достаточно (при обозначениях предшествующего доказательства) выбрать для каждого $\mu$ индекс $\lambda = \varphi(\mu)$ так, чтобы $V_\mu \subset G_\lambda$, и положить $\Gamma_\lambda = \sum\limits_{\varphi(\mu)=\lambda} V_\mu$.

**1.12.** Следующий результат был доказан (в несколько иной форме) К. Куратовским [7] для метрических пространств. Данное им доказательство переносится без изменений на общий случай.

**Лемма.** *Пусть дано нормальное пространство* $P$, *его замкнутые подмножества* $F_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *и открытые множества* $U_k \supset F_k$. *Если система* $\{F_k\}$ *локально конечна в* $S = \sum\limits_k F_k$, *то существуют открытые множества* $G_k$ *такие, что* (1) $F_k \subset G_k$, $\overline{G}_k \subset U_k$, (2) $\{F_k\} \cong \{\overline{G}_k\}$.

Доказательство. Обозначим через $B_1$ сумму тех множеств вида $\prod\limits_{i=1}^{p} F_{k_i}$, которые не пересекают $F_1$. Так как $\{F_k\}$ локально конечна в $S$, то, как легко видеть, $F_1\overline{B}_1 = \emptyset$. Следовательно существует открытое $H_1 \supset F_1$ такое, что $\overline{H}_1\overline{B}_1 = \emptyset$. Очевидно, системы $\{F_1, F_2, \ldots\}$ и $\{\overline{H}_1, F_2, \ldots\}$ комбинаторно подобны. Легко видеть, что, заменяя в $\{\overline{H}_1, F_2, \ldots\}$ аналогичным образом множество $F_2$ множеством $H_2$ и т. д., мы получим систему $\{\overline{H}_k\}$, комбинаторно подобную системе $\{F_k\}$, причем $H_k$ открыты, $H_k \supset F_k$. Подберем теперь открытые множества $V_k$ так, чтобы $F_k \subset V_k \subset \overline{V}_k \subset U_k$, и положим $G_k = H_k V_k$. Легко усмотреть, что $G_k$ имеют все свойства, указанные в лемме.

**1.13. Лемма.** *Пусть дано нормальное пространство* $P$, *его замкнутое подмножество* $S$ *и счетное локальное конечное открытое покрытие* $\{H_k\}$ *подпространства* $S$. *Тогда существует локально конечная в* $P$ *система открытых множеств* $\{G_k\}$ *такая, что* $G_kS \subset H_k$, $\Sigma G_k \supset S$, $\{G_kS\} \cong \{H_k\} \cong \{G_k\}$; *кроме того, если заданы замкнутые* $F_k \subset H_k$ *и открытые (в* $P$*)* $U_k \supset H_k$, *то можно еще потребовать, чтобы* $F_k \subset G_k \subset U_k$.

Замечания. 1. Эта лемма приводится (с несколько усиленными предположениями) в статье Ю. М. Смирнова [10]. 2. Легко видеть, что, вообще говоря, нельзя даже для конечного $\{H_k\}$ требовать, чтобы $G_kS = H_k$ (вместо $G_kS \subset H_k$).

Доказательство. Для любого конечного непустого множества $\alpha$, состоящего из индексов $k$ и такого, что $\prod_{k\in\alpha} H_k \neq \emptyset$, положим $M(\alpha) = \prod_{k\in\alpha} H_k$ и выберем точку $x(\alpha) \in M(\alpha)$. Обозначим (для $k = 1, 2, \ldots$) через $X_k$ множество всех $x(\alpha)$, где $k \in \alpha$. Как легко видеть, система $\{M(\alpha)\}_\alpha$ является локально конечной; следовательно, локально конечна также система $\{x(\alpha)\}$ и потому по 1.2D множества $X_k$ замкнуты. Очевидно, $\{X_k\} \cong \{H_k\}$. Согласно 1.5, существуют замкнутые в $S$ множества $A_k$ такие, что $A_k \subset H_k$, $\sum_k A_k = S$. Положим $B_k = F_k + X_k + A_k$; очевидно, $B_k \subset H_k$, $\Sigma B_k = S$, $\{B_k\} \cong \{H_k\}$, система $\{B_k\}$ локально конечна.

Подберем теперь, открытые в $P$ множества $H_k^*$ так, чтобы $SH_k^* = H_k$, и положим $V_k = U_k H_k^*$. В силу леммы 1.12 (с $B_k$ вместо $F_k$, $V_k$ вместо $U_k$), существуют открытые $G_k$ такие, что $B_k \subset G_k \subset V_k$, $\{B_k\} \cong \{\overline{G}_k\}$. Легко видеть, что система $\{G_k\}$ имеет все требуемые свойства.

Замечание (к 1.12 и 1.13). Как вытекает из результатов К. Морита [9, теорема 1.3 и лемма на стр. 22], утверждения 1.12 и 1.13 остаются верными, если вместо счетных систем взять системы $\{F_\lambda\}$ и, соответственно, $\{H_\lambda\}$ любой мощности, но предполагать, что во всякое открытое покрытие $P$ можно вписать локально конечное покрытие (а для 1.12 еще то, что множество $\sum_\lambda F_\lambda$ замкнуто).

**1.14. Лемма.** *Пусть даны счетные локально конечные покрытия $\{F_\mu\}$ и $\{G_\lambda\}$ нормального пространства $P$, причем $F_\mu$ замкнуты, $G_\lambda$ открыты, $\{F_\mu\} \leqq \{G_\lambda\}$. Если (при некотором $p = 0, 1, \ldots$) пересечение любых $p + 1$ множеств $F_\mu$ имеет размерность, не превосходящую $q$, то в $\{G_\lambda\}$ можно вписать открытое покрытие порядка, не превосходящего $p + q$.*

Доказательство. Будем обозначать через $\tau$ множества, состоящие из $p + 1$ индексов $\mu$; положим $B_\tau = \prod_{\mu\in\tau} F_\mu$, $B = \sum_\tau B_\tau$. Очевидно, $\{B_\tau\}$ локально конечна, так что $B$ замкнуто, а ввиду $\dim B_\tau \leqq q$ имеем по 1.9 $\dim B \leqq q$. Из 1.11 (замечание) вытекает, что существуют открытые в $B$ множества $H_\lambda$ такие, что $H_\lambda \subset BG_\lambda$, $\Sigma H_\lambda = B$, $\operatorname{ord}\{H_\lambda\} \leqq q$. Так как система $\{H_\lambda\}$ счетна и локально конечна, то в силу 1.13 существуют открытые в $P$ множества $V_\lambda$ такие, что $\Sigma V_\lambda \supset B$, $BV_\lambda \subset H_\lambda$, $V_\lambda \subset G_\lambda$, $\{V_\lambda\} \cong \{H_\lambda\}$, так что $\operatorname{ord}\{V_\lambda\} \leqq q$.

Положим теперь $C = P - \sum_{\lambda} V_{\lambda}$. Для каждого $\mu$ выберем $\lambda = \varphi(\mu)$ так, чтобы $F_{\mu} \subset G_{\phi(\mu)}$. Так как система $\{CF_{\mu}\}$ счетна и локально конечна, то по 1.12 существуют открытые $W_{\mu}$ такие, что $CF_{\mu} \subset W_{\mu}$, $W_{\mu} \subset G_{\phi(\mu)}$; $\{W_{\mu}\}$ локально конечна, $\{CF_{\mu}\} \cong \cong \{W_{\mu}\}$. Так как $CB = \emptyset$, то $\operatorname{ord}\{CF_{\mu}\} \leqq p - 1$ и потому $\operatorname{ord}\{W_{\mu}\} \leqq p - 1$.

Обозначим теперь через $\mathfrak{A}$ систему, состоящую из всех $H_{\lambda}$ и $W_{\mu}$. Тогда $\mathfrak{A}$ является счетным локально конечным открытым покрытием $P$, $\operatorname{ord}\mathfrak{A} \leqq \operatorname{ord}\{H_{\lambda}\} + \operatorname{ord}\{W_{\mu}\} + 1 \leqq p + q$, $\mathfrak{A} \leqq \{G_{\lambda}\}$.

Замечание. Как вытекает из хода доказательства и из замечания к 1.13, лемма остается верной, если вместо счетности $\{F_{\mu}\}$ и $\{G_{\lambda}\}$ предполагать, что во всякое открытое покрытие пространства $P$ можно вписать локально конечное открытое покрытие.

**1.15.** С помощью леммы 1.14 можно дать прямое доказательство следующего результата, принадлежащего Н. Б. Веденисову [13] и доказанного им при помощи чеховского бикомпактного расширения.

**Теорема.** *Для любого нормального* $P$ $\dim P \leqq \operatorname{Ind} P$, *причем если* $\dim P = 0$, *то также* $\operatorname{Ind} P = 0$.

Доказательство. Утверждение „если $\operatorname{Ind} P \leqq n$, то $\dim P \leqq n$" тривиально для $n = -1$. Предполагая, что оно выполняется для некоторого $n$, докажем его для $n + 1$. Пусть $\operatorname{Ind} P \leqq n + 1$ и пусть дано конечное о. п. $\{G_k\}_{k=1}^{m}$. Согласно 1.5, существуют замкнутые $F_k \subset G_k$ такие, что $\Sigma F_k = P$. Ввиду $\operatorname{Ind} P \leqq n + 1$, существуют открытые $U_k$ такие, что $F_k \subset U_k$, $\overline{U}_k \subset G_k$, $\operatorname{Ind}(\overline{U}_k - U_k) \leqq n$. Положим $C = \sum_{k=1}^{m}(\overline{U}_k - U_k)$; имеем $\dim(\overline{U}_k - U_k) \leqq n$ и, следовательно, $\dim C \leqq n$. Обозначим через $\{A_j\}$ систему всех непустых множеств вида $\prod_{k=1}^{m} \Gamma_{k,\phi(k)}$, где $\varphi(k)$ принимает значения 0, 1, причем $\Gamma_{k,0} = \overline{U}_k$, $\Gamma_{k,1} = P - U_k$. Множества $A_j$ замкнуты, $\Sigma A_j = P$ и при $j \neq j'$ имеем $A_j A_{j'} \subset C$, так что $\dim A_j A_{j'} \leqq n$. Так как, очевидно, $\{A_j\} \leqq \{G_k\}$, то предположения леммы 1.14 удовлетворяются (при $p = 1$, $q = n$) и, следовательно, в $\{G_k\}$ можно вписать к. о. п., порядок которого не превосходит $n + 1$. Итак, $\dim P \leqq n + 1$.

Второе утверждение теоремы почти очевидно.

**1.16.** Следующая лемма принадлежит Э. Чеху [1, стр. 171]. См. также Ю. Смирнов [11].

**Лемма.** *Пусть $P$ наследственно нормально, $S \subset P$. Тогда для любого конечного открытого покрытия $\{H_k\}_{k=1}^n$ пространства $S$ существуют открытые в $P$ множества $G_k$ такие, что $G_k S = H_k, \{H_k\} \cong \{G_k\}$.*

Доказательство проведем индукцией по числу $n$ множеств в покрытии $\{H_k\}$. Утверждение леммы верно для $n = 2$, как вытекает из 1.2G. Предположим теперь, что при некотором $n$ оно верно для любого $S \subset P$, и докажем его для $n + 1$.

Пусть дано множество $S \subset P$, и открытые в нем $H_k$, $k = 1, 2, \ldots, n + 1$, причем $\Sigma H_k = S$. Если $\prod_{k=1}^{n+1} H_k \neq \emptyset$, положим $G_k = P - \overline{S - H_k}$; очевидно, $G_k$ имеют нужные свойства. Если $\prod_{k=1}^{n+1} H_k = \emptyset$, положим $B = \prod_{k=1}^{n} H_k$, $H'_k = H_k - B$, где $k = 1, \ldots, n$, $S' = \sum_{k=1}^{n} H'_k$. Так как $H'_k$ открыты в $S'$, $\prod_{k=1}^{n} H'_k = \emptyset$, то (согласно предположению, что лемма верна для $n$) существуют открытые в $P$ множества $V_k \supset H'_k$ $(k = 1, \ldots, h)$ такие, что $\prod_{k=1}^{n} V_k = \emptyset$. Так как (ввиду $\prod_{1}^{n+1} H_k = \emptyset$) $H_{n+1}\overline{B} = \emptyset$, $\overline{H_{n+1}}B = \emptyset$, то существуют открытые $U \supset H_{n+1}$, $V \supset B$ такие, что $UV = \emptyset$. Положим $G_k^{(0)} = V_k + V$ $(k = 1, \ldots, n)$, $G_{n+1}^{(0)} = U$. Тогда $\prod_{k=1}^{n+1} G_k^{(0)} = \emptyset$, $G_k^{(0)} \supset H_k$.

Так как утверждение леммы предполагается верным для $n$, то для $m = 1, \ldots, n + 1$ существуют открытые $G_k^{(m)}$, $1 \leq k \leq n + 1$, $k \neq m$, такие, что $SG_k^{(m)} = H_k$ и при любом $m = 1, \ldots, n + 1$ система всех $G_k^{(m)}$, $k \neq m$, комбинаторно подобна системе всех $H_k$, $k \neq m$. Положим теперь $G_k = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{n+1} G_k^{(m)}$. Легко усмотреть, что $G_k$ имеют нужные нам свойства.

**1.17.** Из леммы 1.16 вытекает следующий результат, содержащийся в работе Ю. Смирнова [11].

**Теорема.** *Если $P$ наследственно нормально, $P = \sum_{k=1}^{p} A_k$, то $\dim P \leq \sum_{k=1}^{p} \dim A_k + p - 1$.*

Доказательство. Пусть дано конечное о. п. $\{U_i\}$ пространства $P$. Для $k = 1, \ldots, p$ существует к. о. п. $\{H_{kj}\}_j$ пространства $A_k$ такое, что $\{H_{kj}\}_j \leq \{A_k U_i\}_i$, $\operatorname{ord}\{H_{kj}\}_j \leq \dim A_k$. Согласно 1.16, существуют открытые (в $P$) $G_{kj}$ такие, что $G_{kj}A_k = H_{kj}$, $\{G_{kj}\}_j \cong \{H_{kj}\}_j$ и, следовательно, $\operatorname{ord}\{G_{kj}\} \leq \dim A_k$; при этом можно, очевидно, выбрать $G_{kj}$ так, чтобы $\{G_{kj}\} \leq \{U_i\}$. Тогда $\sum\limits_{k,j} G_{kj} = P$, $\operatorname{ord}\{G_{kj}\}_{k,j} + 1 \leq \sum\limits_{k=1}^{p}(\operatorname{ord}\{G_{kj}\}_j + 1) \leq \sum\limits_{k=1}^{b}(\dim A_k + 1)$.

**1.18.** Приведем следующее предложение, являющееся частным случаем теоремы 1.3 работы К. Морита [9]; его доказательство мы опускаем.

*Если дана локально конечная система $\{V_\lambda\}$ открытых подмножеств нормального пространства $P$ и замкнутые подмножества $B_\lambda \subset V_\lambda$ такие, что $\operatorname{ord}\{B_\lambda\} \leq 0$, то существуют открытые множества $G_\lambda$ такие, что $B_\lambda \subset G_\lambda$, $\overline{G_\lambda} \subset V_\lambda$, $\operatorname{ord}\{\overline{G_\lambda}\} \leq 0$.*

**1.19.** Докажем теперь один вспомогательный результат, которым мы будем пользоваться во второй части работы.

**Лемма.** *Пусть дано нормальное пространство $P$ и локально конечные системы $\{F_\mu\}$ и $\{V_\lambda\}$ его, соответственно, замкнутых и открытых подмножеств. Пусть $\{F_\mu\} \leq \{V_\lambda\}$, $\operatorname{ord}\{F_\mu\} \leq m < \infty$. Тогда существуют открытые множества $G_\lambda$ такие, что $\overline{G_\lambda} \subset V_\lambda$, $\sum\limits_\lambda G_\lambda \supset \sum\limits_\mu F_\mu$ и ни одно $x \in P$ не содержится в более чем $m + 2$ множествах $F_\mu$, $\overline{G_\lambda}$.*

Доказательство. Если $m = 0$, то найдем для каждого $\mu$ индекс $\lambda = \varphi(\mu)$ такой, что $F_\mu \subset V_{\varphi(\mu)}$ и положим $B_\lambda = \sum\limits_{\varphi(\mu)=\lambda} F_\mu$. Применив 1.18, мы видим, что соответствующие $G_\lambda$ имеют нужные свойства.

Проводим теперь доказательство для $1 \leq m < \infty$ индукцией по $m$. Предполагаем, что лемма верна для $m - 1$. Будем обозначать через $\alpha$ множества, состоящие из $m + 1$ индексов $\mu$ и положим $C_\alpha = \prod\limits_{\mu \in \alpha} F_\mu$, $C = \sum\limits_\alpha C_\alpha$. Так как $\operatorname{ord}\{C_\alpha\} \leq 0$ и $\{C_\alpha\}$ локально конечна, то из 1.18 легко вытекает, что существуют открытые $W_\lambda$ такие, что $\overline{W_\lambda} \subset V_\lambda$, $\operatorname{ord}\{\overline{W_\lambda}\} \leq 0$, $\{C_\alpha\} \leq \{W_\lambda\}$. Положим $W = \sum\limits_\lambda W_\lambda$. Так как $C \subset W$, $C$ замкнуто (по 1.2D), то существует открытое $T$ такое, что $C \subset T$, $\overline{T} \subset W$.

Положим $F'_\mu = F_\mu - T$, $V'_\lambda = V_\lambda - C$. Так как $\{F'_\mu\}$ и $\{V'_\lambda\}$, локально конечны, $\{F'_\mu\} \leqq \{V'_\lambda\}$ и, очевидно, $\operatorname{ord}\{F'_\mu\} \leq m-1$, то по нашему предположению существуют открытые $G'_\lambda$ такие что $\overline{G}'_\lambda \subset V'_\lambda$, $\sum\limits_\lambda G'_\lambda \supset \sum\limits_\mu F'_\mu$ и (*) ни одно $x \in P$ не содержится в более чем $m+1$ множествах $F'_\mu$, $G'_\lambda$.

Наконец, положим $G_\lambda = W_\lambda + (G'_\lambda - \overline{T})$. Очевидно, $G_\lambda$ открыты, $\overline{G}_\lambda \subset V_\lambda$; $\sum\limits_\lambda G_\lambda = \sum\limits_\lambda W_\lambda + (\sum\limits_\lambda G'_\lambda - \overline{T}) \supset W + (\sum\limits_\mu F'_\mu - \overline{T}) = \sum F_\mu$. Пусть $x \in T$; тогда, если $x \in \overline{G}_\lambda$, то $x \in \overline{W}_\lambda$; следовательно, ввиду $\operatorname{ord}\{\overline{W}_\lambda\} \leqq 0$, $x$ лежит не более чем в одном $\overline{G}_\lambda$ и потому не более, чем в $m+2$ множествах $F_\mu$, $\overline{G}_\lambda$. Пусть теперь $x \in P - T$; тогда, если $x \in F_\mu$, то также $x \in F'_\mu$, а если $x \in \overline{G}_\lambda$, то (за возможным исключением одного $\lambda = \lambda_0$, для которого $x \in \overline{W}_{\lambda_0}$) также $x \in \overline{G}'_\lambda$. Из этого и из (*) вытекает, что $x$ лежит не более, чем в $m+2$ множествах $F_\mu$, $\overline{G}_\lambda$. Итак, лемма, которую мы предположили верной для $m-1$, верна также для $m$.

## 2.

**2.1.** A. Через $C(P, R)$ мы будем обозначать множество всех ограниченных непрерывных отображений $P$ в $R$,*) причем в $C(P, R)$ вводится метрика $\varrho(f,g) = \sup\limits_{x \in P} \varrho(f(x), g(x))$. Через $C'(P, R)$ обозначим подпространство, состоящее из всех вполне ограниченных $f \in C(P, R)$, т. е. $f \in C(P, R)$ таких, что множество $f(P)$ вполне ограничено (подмножество $M$ метрического пространства $R$ называется вполне ограниченным, если при любом $\varepsilon > 0$ существуют $M_i$ такие, что $\sum\limits_1^p M_i = M$, $\operatorname{diam} M_i < \varepsilon$).

B. *Множество $C'(P, R)$ замкнуто* в $C(P, R)$. Действительно, пусть $f_n \in C'(P, R)$, $f \in C(P, R)$, $f_n \to f$ (в пространстве $C(P, R)$). Пусть $\varepsilon > 0$; выберем $n$ так, что $\varrho(f_n, f) < \frac{1}{3}\varepsilon$. Существуют $B_i$ такие, что $\sum\limits_1^p B_i = f_n(P)$, $\operatorname{diam} B_i < \frac{1}{3}\varepsilon$. Положим $C_i = f(f_n^{-1}(B_i))$; тогда $\sum\limits_1^p C_i = f(P)$, $\operatorname{diam} C_i < \varepsilon$. Итак, $f(P)$ вполне ограничено.

*) Как мы условились в § 1, $R$ всегда обозначает метрическое пространство.

(C) *Если $R$ полно, то полно также $C(P, R)$ и $C'(P, R)$.*

**2.2.** Если $R$ — нормированное линейное пространство, то (при очевидном определении сложения и умножения на вещественные числа) $C(P, R)$ также является нормированным линейным пространством.

A. *$C'(P, R)$ является замкнутым линейным подпространством в $C(P, R)$.*

Действительно, пусть $f \in C'(P, R)$, $g \in C'(P, R)$, $h = f + g$; пусть $\varepsilon > 0$. Пусть $f(P) = \sum\limits_1^p A_i$, $g(P) = \sum\limits_1^q B_j$, $\operatorname{diam} A_i < \frac{1}{2}\varepsilon$, $\operatorname{diam} B_j < \frac{1}{2}\varepsilon$. Положим $C_{ij} = h(f^{-1}(A_i)\, g^{-1}(B_j))$. Тогда $\operatorname{diam} C_{ij} < \varepsilon$, $\sum\limits_{i,j} C_{ij} = h(P)$.

B. *Если $R$ — пространство Банаха, то $C(P, R)$ и $C'(P, R)$ также являются пространствами Банаха.*

**2.3.** A. Пусть дана система $\{A_\lambda\}$, $A_\lambda \subset P$, и пусть $M \subset P$. Если существует система $\{H_\mu\}$ открытых в $M$ множеств такая, что $\operatorname{ord}\{H_\mu\} \leqq 0$, $\{H_\mu\} \leqq \{A_\lambda\}$, то пишем $\delta(M) \leqq \{A_\lambda\}$.

B. Мы будем применять $\delta(M)$ также в другом значении, а именно, если $M$ — метрическое пространство, то $\delta(M)$ будет означать точную нижнюю границу чисел $\varepsilon > 0$ таких, что при подходящих $H_\mu$, открытых в $M$, имеем $\Sigma H_\mu = M$, $\operatorname{ord}\{H_\mu\} \leqq 0$, $\operatorname{diam} H_\mu < \varepsilon$. Легко видеть, что можно применять $\delta(M)$ в обоих значениях, не опасаясь недоразумения.

C. Отметим следующий очевидный факт: если $M_\mu \subset P$, $M_\mu$ открыты в $M = \Sigma M_\mu$, $\operatorname{ord}\{M_\mu\} \leqq 0$, $\delta(M_\mu) \leqq \{A_\lambda\}$ при любом $\mu$, то $\delta(M) \leqq \{A_\lambda\}$.

**2.4.** A. Нам понадобится несколько усиленное свойство линейной независимости. А именно, мы будем называть систему $\{x_\lambda\}$ точек нормированного линейного пространства $R$ *равномерно линейно независимой*, если существует $\beta > 0$ такое, что всегда имеем

$$\Big|\sum_{\lambda\in\sigma}\alpha_\lambda x_\lambda + \sum_{\lambda\in\tau}\alpha_\lambda x_\lambda\Big| \geqq \frac{1}{\beta}\Big|\sum_{\lambda\in\sigma}\alpha_\lambda x_\lambda\Big|,$$

где $\alpha_\lambda$ — любые действительные числа, а $\sigma$ и $\tau$ — любые непересекающиеся конечные множества, состоящие из индексов $\alpha$.

Легко видеть, что, например, в пространствах $(l^p)$ и $(c)$ последовательность единичных векторов является равномерно линейно независимой (с $\beta = 1$).

B. Очевидно, что равномерно линейно независимая система линейно независима и что с системой $\{x_\lambda\}$ равномерно линейно независима также любая $\{\alpha_\lambda x_\lambda\}$, где $\alpha_\lambda \neq 0$.

C. Легко показать, что *всякая конечная независимая линейная система равномерно линейно независима.*

D. Автору неизвестно, существует ли нормированное линейное пространство бесконечной размерности, не содержащее бесконечной равномерно линейно независимой системы.

**2.5. Лемма.** *Если нормированное линейное пространство $R$ содержит равномерно линейно независимую систему мощности $\mathfrak{n}$, то существует число $\gamma > 0$, обладающее следующим свойством: для любого нормального $P$ и его локально конечного открытого покрытия $\{V_\lambda\}$ мощности, не превосходящей $\mathfrak{n} + 1$, существует $h \in C(P, R)$ такое, что* (1) $|h| \leq \gamma$; (2) *для любого $x \in P$ существует $\lambda = \lambda(x)$ такое, что (при любом $y \in P$) из $|h(x) - h(y)| < 1$ вытекает $y \in V_\lambda$;* (3) *если $\{V_\lambda\}$ конечно, то* $\operatorname{lin\,dim}[h(P)] < \infty$, *так что $h \in C'(P, R)$.*

Доказательство. I. Предположим сначала, что $\mathfrak{n} = n < \infty$. Пусть система $\{a_i\}_1^n$ равномерно линейно независима в $R$ и пусть $\beta$ имеет свойства, указанные в 2.4A. Согласно 2.4B можно предполагать, что $|a_i| = 1$.

Подберем теперь число $\gamma$ так, чтобы удовлетворялись следующие неравенства: $\gamma \geqq n + 1$, $\gamma \geqq \beta(n + 1)$, $\gamma \cdot \inf\limits_{x \in A} |x| \geqq n + 1$, где $A$ обозначает линейное множество, состоящее из всех $\sum\limits_1^n \alpha_k a_k$ таких, что $\sum\limits_1^n \alpha_k = 1$ (легко видеть, что $0 \operatorname{non} \in A$, $\inf\limits_{x \in A} |x| > 0$).

Пусть теперь дано открытое покрытие $\{V_k\}_{k=0}^m$, где $m \leq n$. Согласно 1.6, существуют непрерывные функции $\varphi_k$ в $P$ такие, что (a) $\varphi_k(x) = 0$ при $x \in P - V_k$, (b) $\varphi_k(x) \geqq 0$, $\sum\limits_0^m \varphi_k(x) = 1$ при любом $x \in P$. Для $x \in P$ теперь положим $h(x) = \gamma \cdot \sum\limits_{k=0}^m \varphi_k(x)\, a_k$, где $a_0 = 0$.

Очевидно, $h \in C(P, R)$, $|h| \leq \gamma$, $\operatorname{lin\,dim}[h(P)] \leq m$. Пусть $x \in P$; из (b) вытекает существование $k = k(x)$ такого, что $\varphi_k(x) \geqq \dfrac{1}{m + 1}$. Пусть теперь $|h(x) - h(y)| < 1$; покажем, что $y \in U_k$. Действительно, если $k \neq 0$, то из $y \in P - U_k$ бы вытекало что $\varphi_k(y) = 0$, $|\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| = \dfrac{1}{m + 1}$, $|h(x) - h(y)| =$

$= \gamma \quad . \quad | \sum_{i=0}^{m} (\varphi_i(x) - \varphi_i(y))\, a_i \,| \geqq \frac{\gamma}{\beta} \,|\, \varphi_k(x) \;-\; \varphi_k(y) \,||\, a_k \,| \;=$

$= \frac{\gamma}{\beta(m+1)} \geqq 1$, что невозможно. Если же $k = 0$, то из $y \in P - U_k$ бы вытекало $| h(x) - h(y) | = \gamma \,.\, | \sum_{i=1}^{m} (\varphi_i(y) -$ $- \varphi_i(x))\, a_i \,|$, $\sum_{i=1}^{m} (\varphi_i(y) - \varphi_i(x)) = \varphi_0(x) - \varphi_0(y) = \frac{1}{m+1}$, из чего следует (в обозначениях, указанных при определении $\gamma$) $| h(x) - h(y) | \geqq \gamma \cdot \frac{1}{m+1} \cdot \inf_{x \in A}(x) \geqq 1$, а это невозможно. Итак, $h$ имеет свойства (1)—(3), указанные в лемме.

II. Предположим теперь, что $\mathfrak{n}$ бесконечно. Пусть система $\{a_\nu\}$ равномерно линейно независима в $R$ и имеет мощность $\mathfrak{n}$. В качестве $\gamma$ возьмем число $\beta$, соответствующее (по 2.4А) этой системе.

Для заданного л. к. о. п. $\{V_\lambda\}$ мощности $\leqq \mathfrak{n} + 1 = \mathfrak{n}$ существует, согласно 1.7, л. к. о. п. $\{H_\mu\}$ такое, что (1) мощность $\{H_\mu\}$ конечна, если конечна мощность $\{V_\lambda\}$, и не превосходит ее, если она бесконечна; следовательно, мощность $\{H_\mu\}$ не превосходит $\mathfrak{n}$; (2) для любого $x \in P$ существует $\lambda = \lambda(x)$ такое, что $H_\mu \subset U_{\lambda(x)}$ для любого $H_\mu$, содержащего $x$.

Согласно 1.6, существуют непрерывные функции $\varphi_\mu$ такие, что (a) $\varphi_\mu(x) = 0$ для $x \in P - H_\mu$; (b) $\varphi_\mu(x) \geqq 0$, $\sum_\mu \varphi_\mu(x) = 1$ для любого $x \in P$. Предполагая, что множество индексов $\mu$ является частью множества индексов $\nu$, положим теперь для $x \in P$ $z(x) = \sum_\mu \varphi_\mu(x)\, a_\mu$. Тогда $z(x) \neq 0$ для любого $x \in P$; согласно 1.6, $z$ является непрерывным отображением $P$ в $R$. Положим теперь

$\zeta(x) = \frac{1}{|z(x)|}$, $\psi_\mu(x) = \zeta(x)\, \varphi_\mu(x)$, $h(x) = \beta \,.\, \sum_\mu \psi_\mu(x)\, a_\mu$, так что $h(x) = \beta\, \zeta(x)\, z(x)$.

Очевидно, $h \in C(P, R)$, $|h(x)| = \beta$ для любого $x \in P$, так что $|h| = \beta = \gamma$; если система $\{V_\lambda\}$ конечна, то конечна также линейная размерность подпространства $[h(P)]$. Пусть теперь $x \in P$, $y \in P$, $|h(x) - h(y)| < 1$; чтобы завершить доказательство, надо показать, что $y \in V_{\lambda(x)}$ (см. свойство (2) системы $\{H_\mu\}$). Обозначим через $\sigma$ (соответственно, $\tau$) множество индексов $\mu$ таких, что $x \in H_\mu$ (соответственно, $y \in H_\mu$). Очевидно, $h(x) = \sum_{\mu \in \sigma} \psi_\mu(x)\, a_\mu$, $h(y) = \sum_{\mu \in \tau} \psi_\mu(x)\, a_\mu$. Если бы $\sigma\tau = \emptyset$, то мы бы имели $|h(x) - h(y)| = |\sum_{\mu\in\sigma}\varphi_\mu(x)\, a_\mu - \sum_{\mu\in\tau}\psi_\mu(x)\, a_\mu| \geqq \frac{1}{\beta}|\sum_{\mu\in\sigma}\psi_\mu(x)\, a_\mu = \frac{1}{\beta}|h(x)| = 1$ вопреки предположению, что $|h(x) - h(y)| < 1$. Итак, $\sigma\tau \neq 0$. Обозначая через $\mu'$ какойнибудь индекс, входящий и в $\sigma$, и в $\tau$, имеем $x \in H_{\mu'}$, $y \in H_{\mu'}$ и потому $y \in V_{\lambda(x)}$.

**2.6.** *Пусть дано топологическое пространство $P$ и его локально конечное открытое покрытие $\{G_\lambda\}$, причем $G_\lambda$ одновременно являются замкнутыми. Тогда существуют $H_\lambda \subset G_\lambda$ такие, что $\Sigma H_\lambda = P$, $\operatorname{ord}\{H_\lambda\} \leqq 0$, множества $H_\lambda$ одновременно открыты и замкнуты.*

Доказательство. Можно предполагать, что индексами $\lambda$ являются порядковые числа. Положим $H_\lambda = G_\lambda - \sum_{\mu<\lambda} G_\mu$. Из того, что $\{G_\lambda\}$ локально конечно, вытекает (см. 1.2D), что каждое $\sum_{\mu<\lambda} G_\mu$ и, следовательно, каждое $H_\lambda$ открыто и замкнуто. Очевидно, $\Sigma H_\lambda = P$, $\operatorname{ord}\{H_\lambda\} \leqq 0$.

**2.7.** А. Пусть дано $P$, $R$ и покрытие $\{G_\lambda\}$ пространства $P$. Отображение $f$ пространства $P$ в $R$ мы назовем *нульмерным относительно* $\{G_\lambda\}$ или, короче, $\{G_\lambda\}$-*нульмерным*, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\delta(S) \leqq \{G_\lambda\}$, если $S \subset P$ и $\operatorname{diam} f(S) < \varepsilon$.

В. Если $P$ является также метрическим пространством, то отображение $f$ пространства $P$ в $R$ называется *равномерно нульмерным*, если для любого $\eta > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что (см. 2.3) $\delta(S) < \eta$, если $S \subset P$, $\operatorname{diam} f(S) < \varepsilon$.

С. Легко доказывается следующее предложение.

*Если $f$ — равномерно нульмерное непрерывное отображение $R_1$ в $R_2$, а $g$— равномерно нульмерное непрерывное отображение $R_2$ в $R_3$ и если $h(x) = (f(x))$ для любого $x \in R_1$, то $h$ равномерно нульмерно.*

**2.8.** А. *Пусть дано $P$, $R$ и покрытие $\{A_\lambda\}$ пространства $P$. Тогда следующие два множества открыты в $C(P, R)$:* (1) *множество $f \in C(P, R)$ таких, что при подходящем $\varepsilon > 0$ всякое $S \subset P$ такое, что* $\operatorname{diam} f(S) < \varepsilon$, *содержится в некотором $A_\lambda$;* (2) *множество всех $\{A_\lambda\}$-нульмерных $f \in C(P, R)$.*

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ и пусть $f$ имеет свойство, указанное в (1). Тогда, если $g \in C(P, R)$, $\varrho(f, g) < \frac{1}{3}\varepsilon$, то из $\operatorname{diam} g(S) < \frac{1}{3}\epsilon$ вытекает $\operatorname{diam} f(S) < \varepsilon$, так что $g$ имеет соответствующее свойство для $\frac{1}{3}\varepsilon$ вместо $\varepsilon$. Для множества (2) доказательство аналогично.

B. *Если $P$ и $R$ — метрические пространства, то равномерно нульмерные отображения $f \in C(P, R)$ составляют множество типа $G_\delta$ в $C(P, R)$.*

Доказательство. Обозначим упомянутое множество через $\Phi$, а через $\Phi_k$ ($k = 1, 2, \ldots$) обозначим множество всех $f \in C(P, R)$, являющихся нульмерными относительно $\{A_{k\lambda}\}_\lambda$, где при $k = 1, 2, \ldots$ мы обозначаем через $\{A_{k\lambda}\}_\lambda$ систему всех $M \subset R$ с $\operatorname{diam} M < \frac{1}{k}$. Согласно 2.8A, множества $\Phi_k$ открыты. Легко установить, что $\Phi = \prod_{k=1}^{\infty} \Phi_k$.

**2.9. Лемма.** *Пусть дано нормированное линейное пространство $R$ и пусть дано $n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ или $n = \infty$. Если $R$ содержит равномерно линейно независимую систему мощности $n$, то существует число $\beta > 0$, обладающее следующим свойством: если дано нормальное $P$, его локально конечное открытое покрытие $\{G_\lambda\}$ такое, что* $\operatorname{ord}\{G_\lambda\} \leqq n$, *далее числа $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ и отображение $f \in C(P, R)$ такое, что* $\operatorname{diam} f(G_\lambda) < \alpha$ *для любого $\lambda$, то существует $g \in C(P, R)$ такое, что* (1) $|f - g| \leqq \beta(\alpha + \varepsilon)$; (2) *отображение $g$ $\{G_\lambda\}$-нульмерно; точнее, если $S \subset P$,* $\operatorname{diam} g(S) < \varepsilon$, *то $\delta(S) \leqq \{G_\lambda\}$;* (3) *если* $\operatorname{ord}\{G_\lambda\} < \infty$, *то $f - g \in C'(P, R)$.*

Доказательство. В качестве $\beta$ возьмем $\gamma$ из леммы 2.5. Положим $m = \operatorname{ord}\{G_\lambda\}$, так что $m \leqq n$. Как вытекает из 1.7, существует л. к. о. п. $\{H_{k\mu}\}_{k\mu}$, где $k = 0, 1, \ldots, m$ в случае $m < \infty$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ в случае $m = \infty$, такое, что $\{H_{k\mu}\}_{k\mu} \leqq \{G_\lambda\}$ и для каждого $k$ имеем $\operatorname{ord}\{H_{k\mu}\}_\mu \leqq 0$. Положим $V_k = \sum_\mu H_{k\mu}$.

Так как $\Sigma V_k = P$, $\{V_k\}$ локально конечно, то по 2.5 существует $h \in C(P, R)$ такое, что (a) $|h| \leqq \gamma = \beta$; (b) для любого $x \in P$ существует $k = k(x)$ такое, что $y \in V_{k(x)}$, если только $y \in P$, $|h(x) - h(y)| < 1$; (c) если $m < \infty$, то $h \in C'(P, R)$. Положим $g = f + (\alpha + \varepsilon) h$. Очевидно, $g$ имеет свойства (1) и (3), указанные в лемме, так что нам остается, выбрав произвольно $S \subset P$ такое, что $\operatorname{diam} g(S) < \varepsilon$, показать, что $\delta(S) \leqq \{H_{k\mu}\}_{k\mu}$ и, следовательно, $\delta(S) \leqq \{G_\lambda\}$.

Пусть $x \in S$. Так как $x \in V_{k(x)}$, то существует $\mu = \mu(x)$ такое, что $x \in H_{k(x),\mu(x)}$; положим $H = H_{k(x)\mu(x)}$. Пусть теперь $y \in S\overline{H}$; тогда $|g(x) - g(y)| \leqq \operatorname{diam} g(S) < \varepsilon$, $|f(x) - f(y)| \leqq \operatorname{diam} f(\overline{H}) \leqq \operatorname{diam} \overline{f(H)} < \alpha$, так что $(\alpha + \varepsilon) |h(x) - h(y)| < \alpha + \varepsilon$, $|h(x) - h(y)| < 1$ и потому, в силу свойства (b) отображения $h$, $y \in V_{k(x)} = \sum_{\mu} H_{k(x)\mu}$, из чего, ввиду $\operatorname{ord}\{H_{k\mu}\}_{\mu} \leqq \leqq 0$ и $y \in \overline{H}$, вытекает $y \in H$ (так как если бы $y \in H_{k(x)\mu'}$, где $\mu' \neq \mu(x)$, то мы бы имели $H \,.\, H_{k(x)\mu'} \neq \emptyset$). Итак, $S\overline{H} = SH$.

Так как $x \in S$ было произвольным, то из доказанного следует, что сумма множества $H_{k\mu}$ таких, что $S\overline{H}_{k\mu} = SH_{k\mu}$, содержит $S$. Иначе говоря, те $SH_{k\mu}$, которые открыты и замкнуты в $S$, составляют покрытие $S$; это покрытие, очевидно, локально конечно. Из 2.6 теперь вытекает $\delta(S) \leqq \{H_{k\mu}\}_{k\mu}$.

Замечание. Для случая $R = E^n$, $n < \infty$, возможен иной метод доказательства, изложенный в статье [6]. Для полноты изложения и ввиду того, что при этом методе можно обойтись без специальных вспомогательных предложений (как, например, лемма 2.5), наметим его здесь еще раз.

Возьмем в $E^n$ следующую норму: $|y| = \max\limits_{1 \leqq i \leqq n} |y_i|$; тогда можно положить $\beta = 1$. Предположения о $f$ можно теперь высказать, обозначая через $f_k(x)$ $k$-тую координату точки $f(x)$, следующим образом: $\operatorname{diam} f_k(G_\lambda) < \alpha$ для любого $k$ и $\lambda$. Требуется подыскать непрерывные функции $g_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ так, чтобы (1) $|f_k - g_k| \leqq c$, где $c = \alpha + \varepsilon$; (2) если $S \subset P$, $\operatorname{diam} g_k(S) < \varepsilon$ $(k = 1, \ldots, n)$, то $\delta(S) \leqq \{G_\lambda\}$.

Доказательство проводится по индукции. Предполагая утверждение верным для $n - 1$, возьмем (см. 1.5) открытые $H_\lambda$ так, чтобы $\overline{H}_\lambda \subset G_\lambda$, $\sum H_\lambda = P$. Обозначая через $\xi$ множества, состоящие из $n + 2$ индексов $\lambda$, положим $U_\xi = \prod\limits_{\lambda \in \xi} G_\lambda$, $V_\xi = \prod\limits_{\lambda \in \xi} H_\lambda$; очевидно, $\operatorname{ord}\{U_\xi\} \leqq 0$. Положим $Q = P - \sum\limits_{\xi} V_\xi$. Тогда $\operatorname{ord}\{H_\lambda \,.\, Q\} \leqq n - 1$, так что существуют $g_k \in C(P, E)$, $k = 1, \ldots, n - 1$, такие, что (1) $|f_k - g_k| \leqq c$ $(k = 1, \ldots, n - 1)$; (2) если $T \subset Q$ и $\operatorname{diam} g_k(T) < \varepsilon$ $(k = 1, \ldots, n - 1)$, то $\delta(T) \leqq \{G_\lambda\}$. Пусть $A = \Sigma \overline{V}_\xi$, $B = P - \Sigma U_\xi$. Тогда $A$, $B$ замкнуты (для $A$ это вытекает из того, что $\{\overline{V}_\xi\}$ локально конечна). Так как $AB = \emptyset$, то существует $\varphi \in C(P, E)$ такое, что $0 \leqq \varphi(x) \leqq c$ для любого $x \in P$, $\varphi(x) = 0$ для $x \in A$, $\varphi(x) = c$ для $x \in B$. Положим теперь $g_n = f_n + \varphi$. Очевидно, $|f_n - g_n| \leqq \leqq c$.

Пусть $S \subset P$, $\operatorname{diam} g_k(S) < \varepsilon$ для $k = 1, \ldots, n$. Рассмотрим произвольное $U_{\xi_0}$ такое, что $S\overline{V}_{\xi_0} \neq 0$. Если $x \in S\overline{V}_{\xi_0}$, $y \in S\overline{U}_{\xi_0}$, то имеем $|f_n(x) - f_n(y)| < \alpha$, $|g_n(x) - g_n(y)| < \varepsilon$ и, следовательно, $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \alpha + \varepsilon = c$. Так как $x \in A$, $\varphi(x) = 0$, то из этого вытекает $y \operatorname{non} \in B$, $y \in \Sigma U_\xi$ и потому, ввиду $\operatorname{ord}\{U_\xi\} \leqq$

$\leqq 0$, $y \in U_{\xi_0}$. Так как мы рассматривали произвольное $U_{\xi_0}$ такое, что $S\overline{V}_{\xi_0} \neq \emptyset$, то, обозначив через $K$ множество $\xi$ таких, что $S\overline{V}_\xi \neq \emptyset$, получаем: если $\xi \in K$, то $SU_\xi$ открыто и замкнуто в $S$. Полагая $W = \sum_{\xi \in K} SU_\xi$, имеем (a) $\delta(W) \leqq \{G_\lambda\}$, (b) так как $\{U_\xi\}$ локально конечно, то $W$ открыто и замкнуто в $S$; (c) $S - W \subset \subset Q$ и, следовательно, $\delta(S - W) \leqq \{G_\lambda\}$. Из этого вытекает $\delta(S) \leqq \{G_\lambda\}$, что и требовалось доказать.

**2.10.** Для доказательства дальнейших предложений этого параграфа нам понадобится следующий важный результат, который доказал A. H. Stone в работе [12].

**Теорема.** *Во всякое открытое покрытие метризуемого пространства можно вписать локально конечное открытое покрытие.*

Для полноты изложения приводим доказательство. Пусть дано открытое покрытие $\{G_\xi\}$ метрического пространства $P$; можно предполагать, что иденксами $\xi$ являются как раз все порядковые числа, меньшие некоторого $\alpha$. Для $\xi < \alpha$, $k = 1, 2, \ldots$ обозначим через $B_{\xi k}$ множество $x \in P$ таких, что $\varrho(x, \ P - G_\xi) \geqq \frac{1}{k}$, $x \operatorname{non} \in \sum_{\zeta < \xi} G_\zeta$. Множества $B_{\xi k}$ замкнуты, $B_{\xi k} \subset B_{\xi, k+1}$, $\sum_{\xi, k} B_{\xi k} = P$; если $x \in B_{\xi k}$, $y \in B_{\eta l}$, $\xi < \eta$, то $\varrho(x, y) \geqq \frac{1}{k}$. Положим $B_k = \sum_\xi B_{\xi k}$. Множества $B_k$ замкнуты, $B_k \subset B_{k+1}$, $\Sigma B_k = P$.

Обозначим через $H_{\xi k}$ множество $x \in P$ таких, что $\varrho(x, B_{\xi k}) < < \frac{1}{3k}$, $\varrho(x, B_j) > \frac{1}{4j}$ при $j = 1, \ldots, k - 1$. Множества $H_{\xi k}$ открыты, $H_{\xi k} \subset G_\xi$. Если $x \in P$, то ввиду $\Sigma B_k = P$ существует наименьшее $m$ такое, что $\varrho(x, B_m) < \frac{1}{3m}$; при подходящем $\xi$ имеем $\varrho(x, B_{\xi m}) < \frac{1}{3m}$. При этом, если $m > 1$, то $\varrho(x, B_j) \geqq \geqq \frac{1}{3j} > \frac{1}{4j}$ для $j = 1, \ldots, m - 1$; итак, $x \in H_{\xi m}$. Следовательно, $\Sigma H_{\xi k} = P$.

Остается доказать, что $\{H_{\xi k}\}_{\xi k}$ локально конечна. Пусть $x \in P$, так что $x \in B_n$ при подходящем $n$. Обозначим через $U$ множество $y \in P$ таких, что $\varrho(x, y) < \frac{1}{6n}$. Очевидно, $UH_{\xi k} = \emptyset$

при $k > n$. Так как, как легко установить, при любом $k$ $\varrho(a, b) > \frac{1}{3k}$ при $a \in H_{\xi k}$, $b \in H_{\eta k}$, $\xi \neq \eta$, то при любом $k < n$ $U$ пересекает не более одного множества $H_{\xi k}$. Итак $U$ пересекает лишь конечное число множеств $H_{\xi k}$.

**2.11.** A. Условимся употреблять следующие выражения, с помощью которых можно формулировать некоторые предложения более кратким и наглядным образом.

1. Если $Z$ — топологическое пространство, и элементы $z \in Z$, не обладающие некоторым заданным свойством $(V)$, составляют множество, нигде не плотное в $Z$, то будем говорить, что *каждое $z \in Z$, за исключением нигде не плотного множества, обладает свойством* $(V)$.

2. Если никакая непустая открытая часть топологического пространства $Z$ не является в $Z$ множеством первой категории (например, если $Z$ — пространство Банаха) и если элементы $z \in Z$, не обладающие заданным свойством $(V)$, составляют множество первой категории в $Z$, то мы будем говорить, что *почти каждое $z \in Z$ обладает свойством* $(V)$. Подчеркнем еще что это выражение не имеет по нашему определению смысла, если существует непустое открытое множество первой категории в $Z$.

B. Если при $k = 1, \ldots, p$ каждое $z \in Z$, за исключением нигде не плотного множества, обладает свойством $(V_k)$, то, очевидно, каждое $z \in Z$, за исключением нигде не плотного множества, обладает всеми свойствами $(V_k)$, $k = 1, \ldots, p$.

C. Если при $k = 1, 2, \ldots$ почти каждое $z \in Z$ обладает свойством $(V_k)$, то, очевидно, почти каждое $z \in Z$ обладает всеми свойствами $(V_k)$, $k = 1, 2, \ldots$

D. Очевидно, если почти каждое $z \in Z$ обладает свойством $(V)$, то множество элементов $z \in Z$, обладающих этим свойством плотно в $Z$.

**2.12. Лемма.** *Пусть дано нормальное пространство $P$ и нормированное линейное пространство $R$. Если* $\dim P \leq \operatorname{lin\,dim} R$, *причем в случае* $\dim P = \infty$ *предполагается, что $R$ содержит бесконечную равномерно линейно независимую систему, то для любого локально конечного открытого покрытия $\{G_\lambda\}$ пространства $P$*

1. *каждое $f \in C(P, R)$, за исключением нигде не плотного множества, $\{G_\lambda\}$-нульмерно;*

2. *если* $\dim P < \infty$ *или* $\operatorname{ord}\{G_\lambda\} < \infty$, *то также каждое $f \in C'(P, R)$, за исключением нигде не плотного множества, $\{G_\lambda\}$-нульмерно.*

Доказательство. Обозначим через $\Phi$ множество всех $\{G_\lambda\}$-нульмерных $f \in C(P, R)$. Согласно 2.8А, множество $\Phi$ открыто в $C(P, R)$. Следовательно, достаточно доказать для произвольного $f \in C(P, R)$ и любого $\eta > 0$, что существует $\{G_\lambda\}$-нульмерное $g \in C(P, R)$ такое, что (1) $|g - f| < \eta$, (2) в случае (который мы будем сокращенно называть ,,случай $K$''), если $f \in C'(P, R)$ и притом или $\dim P < \infty$ или $\operatorname{ord}\{G_\lambda\} < \infty$, имеем $g \in C'(P, R)$.

Положим $n = \dim P$. Пусть $\beta$ имеет свойство, указанное в 2.9. Положим $\alpha = \frac{\eta}{3\beta}$, $\varepsilon = \frac{\eta}{3\beta}$. Как вытекает из 2.10, существует л. к. о. п. $\{V_\mu\}$ пространства $f(P)$ такое, что $\operatorname{diam} V_\mu < \alpha$ для каждого $V_\mu$. Кроме того, в случае $f \in C'(P, R)$ пространство $f(P)$ вполне ограничено, так что в этом случае мы можем (и будем) предполагать, что $\{V_\mu\}$ конечно.

Положим $W_{\lambda\mu} = G_\lambda f^{-1}(V_\mu)$. Легко видеть, что $\{W_{\lambda\mu}\}$ является л. к. о. п. пространства $P$, причем в случае, если $f \in C'(P, R)$ и $\operatorname{ord}\{G_\lambda\} < \infty$, имеем $\operatorname{ord}\{W_{\lambda\mu}\}_{\lambda\mu} < \infty$. Согласно 1.11, существует л. к. о. п. $\{H_\nu\}$ такое, что $\{H_\nu\} \leqq \{W_{\lambda\mu}\}_{\lambda\mu}$, $\operatorname{ord}\{H_\nu\} \leqq n$. При этом в случае $K$, как вытекает из вышесказанного, можно считать, что $\operatorname{ord}\{H_\nu\} < \infty$.

Применив теперь лемму 2.9 к покрытию $\{H_\nu\}$, мы видим, что существует $g \in C(P, R)$, нульмерное относительно $\{H_\nu\}$ и, следовательно, также относительно $\{G_\lambda\}$ и такое, что $|f - g| \leqq \leqq \beta(\alpha + \varepsilon) = \frac{2}{3}\eta < \eta$, причем если $\operatorname{ord}\{H_\nu\} < \infty$, что, наверное, имеет место в случае $K$, то имеем $f - g \in C'(P, R)$; итак, в случае $K$ получаем $g \in C'(P, R)$.

**2.13.** Следующее почти очевидное предложение является, в некотором смысле, обращением леммы 2.12.

*Если $P$ нормально, $n < \infty$ и для любого конечного открытого покрытия $\{G_k\}$ пространства $P$ существует $\{G_k\}$-нульмерное $f \in C(P, E^n)$, то $\dim P \leqq n$.*

Доказательство. При заданном $\{G_k\}$ найдем $\{G_k\}$-нульмерное $f \in C(P, E^n)$ и $\varepsilon > 0$ такое, что $\delta(S) \leqq \{G_k\}$, если $S \subset P$, $\operatorname{diam} f(S) < \varepsilon$. Существует к. о. п. $\{V_i\}$ пространства $f(P)$ такое, что $\operatorname{ord}\{V_i\} \leqq n$, $\operatorname{diam} V_i < \varepsilon$. Положим $U_i = f^{-1}(V_i)$. Так как $\delta(U_i) \leqq \{G_k\}$ для каждого $i$, то существуют открытые в $U_i$ множества $H_{i\lambda}$ такие, что $\sum\limits_\lambda H_{i\lambda} = U_i$, $\operatorname{ord}\{H_{i\lambda}\}_\lambda \leqq 0$, $\{H_{i\lambda}\} \leqq \leqq \{G_k\}$ для каждого $i$; кроме того, можно предполагать, что $\{H_{i\lambda}\}_\lambda$ конечны. Тогда $\{H_{i\lambda}\}_{i,\lambda} \leqq \{G_k\}$ и, как легко видеть, $\operatorname{ord}\{H_{i\lambda}\}_{i,\lambda} \leqq \operatorname{ord}\{U_i\} \leqq n$.

**2.14.** Следующее предложение и теорема 2.15 являются основными результатами этого параграфа.

**Теорема.** *Пусть дано нормальное пространство $P$ и пространство Банаха $R$, причем* $\dim P \leqq \operatorname{lindim} R$, *а в случае* $\dim P = \infty$ *$R$ содержит бесконечную равномерно линейно независимую систему. Пусть даны (для $k = 1, 2, \ldots$) локально конечные открытые покрытия $\{G_{k\lambda}\}_\lambda$ пространства $P$. Тогда* (1) *почти каждое $f \in C(P, R)$ является нульмерным относительно каждого $\{G_{k\lambda}\}_\lambda$;* (2) *если* $\dim P < \infty$ *или* $\operatorname{ord}\{G_{k\lambda}\}_\lambda < \infty$ *для $k = 1, 2, \ldots$, то также почти каждое $f \in C'(P, R)$ является нульмерным относительно каждого $\{G_{k\lambda}\}_\lambda$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что непустое открытое подмножество пространства Банаха не может в нем быть множеством первой категории, чтобы было видно, что наша теорема является (ввиду 2.11С) непосредственным следствием леммы 2.12.

**2.15. Теорема.** *Пусть дано метрическое пространство $P$ и пространство Банаха $R$, причем* $\dim P \leqq \operatorname{lindim} R$, *а в случае* $\dim P = \infty$ *в $R$ содержится бесконечная равномерно линейно независимая система.*

*Тогда* 1. *почти каждое $f \in C(P, R)$ равномерно нульмерно;* 2. *если* $\dim P < \infty$ *или если $P$ допускает равномерно нульмерное непрерывное отображение на вполне ограниченное пространство, то также почти каждое $f \in C'(P, R)$ равномерно нульмерно.*

Доказательство. Из 2.10 и 1.11 вытекает, что для $k = 1, 2, \ldots$ существует л. к. о. п. $\{G_{k\lambda}\}$ пространства $P$ такое, что $\operatorname{diam} G_{k\lambda} < \frac{1}{k}$, $\operatorname{ord}\{G_{k\lambda}\}_\lambda \leqq \dim P$. Согласно 2.14, почти каждое $f \in C(P, R)$, а в случае $\dim P < \infty$ также почти каждое $f \in C'(P, R)$, является $\{G_{k\lambda}\}_\lambda$-нульмерным при $k = 1, 2, \ldots$ и потому (ввиду $\operatorname{diam} G_{k\lambda} < \frac{1}{k}$) равномерно нульмерным.

Остается рассмотреть тот случай, когда известно, что существует равномерно нульмерное отображение $\varphi$ пространства $P$ на вполне ограниченное метрическое пространство $T$. Тогда существуют $\varepsilon_k > 0 (k = 1, 2, \ldots)$ такие, что $\delta(S) < \frac{1}{k}$, если $S \subset P$ и $\operatorname{diam} \varphi(S) < \varepsilon_k$. Так как $T$ вполне ограничено, то существуют (при $k = 1, 2, \ldots$) его конечные открытые покрытия $\{V_{kj}\}_j$ такие, что $\operatorname{diam} V_{kj} < \varepsilon_k$. Положим $U_{kj} = \varphi^{-1}(V_{kj})$. Тогда $\delta(U_{kj}) < \frac{1}{k}$, так что существуют открытые в $U_{kj}$ (и, следовательно, в $P$) множества $H_{kj\mu}$ такие, что $\sum\limits_{\mu} H_{kj\mu} = U_{kj}$, $\operatorname{diam} H_{kj\mu} < \frac{1}{k}$ и при любых $k, j$ имеем $\operatorname{ord}\{H_{kj\mu}\}_{\mu} \leqq 0$. Как легко видеть, при любом $k$ $\{H_{kj\mu}\}_{j,\mu}$ локально конечно и $\operatorname{ord}\{H_{kj\mu}\}_{j,\mu} \leqq \operatorname{ord}\{U_k\}_j < \infty$. Очевидно, $\sum\limits_{j,\mu} H_{kj\mu} = P$. Из 2.14 теперь вытекает, что почти каждое $f \in C'(P, R)$ является нульмерным относительно каждого $\{H_{kj\mu}\}_{j,\mu}$ и потому (ввиду $\operatorname{diam} H_{kj\mu} < \frac{1}{k}$) равномерно нульмерным.

## 3.

Основным результатом этого параграфа является теорема 3.4, утверждающая, в частности, что $\dim P = \operatorname{Ind} P$ для метризуемых пространств. Из теоремы 3.4 и результатов § 1 и 2 вытекают далее предложения о вложении метризуемого пространства (любого веса) в полное метрическое пространство той же размерности (теорема 3.10) и о размерности топологического произведения метризуемых пространств (теорема 3.11).

**3.1. Лемма.** *Для любого метрического пространства $R$ условия $\dim R \leqq 0$ и $\delta(R) = 0$ равносильны.*

Доказательство. I. Если $\dim R = 0$, то, как вытекает из 2.10 и 1.11, при произвольном $\varepsilon > 0$ существует л. к. о. п. $\{G_\lambda\}$ такое, что $\operatorname{ord}\{G_\lambda\} = 0$, $\operatorname{diam} G_\lambda < \varepsilon$ для любого $\lambda$. Ввиду произвольности $\varepsilon$, из этого вытекает $\delta(R) = 0$.

II. Пусть $\delta(R) = 0$. Пусть (при $k = 1, 2, \ldots$) $G_{k\lambda}$ открыты, $\operatorname{ord}\{G_{k\lambda}\}_\lambda \leqq 0$, $\sum\limits_{\lambda} G_{k\lambda} = R$, $\operatorname{diam} G_{k\lambda} < \frac{1}{k}$. Пусть множества $A \subset R$, $B \subset R$ замкнуты, $AB = \emptyset$. Требуется доказать, что существует $G$ такое, что $A \subset G$, $GB = \emptyset$, $G$ одновременно открыто и замкнуто.

Обозначим через $A_1$ множество $x \in A$ таких, что $\varrho(x, B) > 1$, а через $A_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ множество $x \in A$ таких, что $\frac{1}{n} < \varrho(x, B) \leqq \frac{1}{n-1}$. Очевидно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Обозначим через $G_n$ сумму $G_{n\lambda}$ таких, что $G_{n\lambda} A_n \neq \emptyset$. Легко видеть, что $A_n \subset G_n$, $G_n B = \emptyset$, каждое $G_n$ открыто и замкнуто и (*) если $x \in G_n$, $n > 1$, то $\varrho(x, A) < \frac{1}{n}$, $\varrho(x, B) < \frac{2}{n-1}$.

Положим $G = \sum_{n=1}^{\infty} G_n$. Если бы $G$ не было замкнуто, то существовали бы $x_k \in G_{n_k}$ и $x \in R - G$ такие, что $n_k \to \infty$, $x_k \to x$. В силу свойства (*) тогда существуют $y_k \in A$ такие, что $\varrho(x_k, y_k) < \frac{1}{n_k}$, и $z_k \in B$ такие, что $\varrho(x_k, z_k) < \frac{2}{n_k - 1}$; следовательно, $y_k \to x$, $x \in A$ и $z_k \to x$, $x \in B$; но это невозможно, так как $AB = \emptyset$. Итак, $G$ замкнуто; очевидно, $G$ открыто, $A \subset G$, $GB = \emptyset$.

**3.2.** *Если $R$ и $Q$ — метрические пространства,* $\dim Q = 0$ *и существует равномерно нульмерное непрерывное отображение $f$ пространства $R$ в $Q$, то* $\dim R \leqq 0$.

Доказательство. Согласно 3.1, достаточно доказать, что $\delta(R) = 0$. Пусть $\eta > 0$; существует $\varepsilon > 0$ такое, что для $T \subset Q$, $\operatorname{diam} T < \varepsilon$, имеем $\delta(f^{-1}(T)) < \eta$. Так как $\dim Q = 0$, то $\delta(Q) = 0$ и потому существуют открытые в $Q$ множества $H_\lambda$ такие, что $\Sigma H_\lambda = Q$, $\operatorname{ord}\{H_\lambda\} = 0$, $\operatorname{diam} H_\lambda < \varepsilon$. Полагая $G_\lambda = f^{-1}(H_\lambda)$, имеем $\delta(G_\lambda) < \eta$, $\operatorname{ord}\{G_\lambda\} \leqq 0$, $\Sigma G_\lambda = R$. Из этого, как легко видеть, вытекает $\delta(R) < \eta$; так как $\eta$ произвольно, то $\delta(R) = 0$.

**3.3. Теорема.** *Если $R$ и $Q$ — метрические пространства и существует равномерно нульмерное непрерывное отображение $f$ пространства $R$ в $Q$, то* $\dim P \leqq \dim Q$.

Доказательство. Утверждение тривиально для $\dim Q = \infty$ и $\dim Q = -1$ и уже доказано для $\dim Q = 0$. Пусть $\dim Q = n$, $n = 1, 2, \ldots$ Согласно 2.15, существует равномерно нульмерное $g \in C(Q, E^n)$. Полагая для $x \in R$ $h(x) = g(f(x))$, имеем $h \in C(R, E^n)$, причем (см. 2.7C) $h$ равномерно нульмерно. Пусть (см. 1.4E) $E^n = \sum_{k=o}^{n} A_k$, $\dim A_k = 0$. Тогда $R = \sum_{k=0}^{n} h^{-1}(A_k)$, причем, в силу 3.2, $\dim h^{-1}(A_k) \leqq 0$, и потому, согласно 1.17, $\dim R \leqq n$.

**3.4. Теорема.** *Пусть пространство $P$ метризуемо. Тогда для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ следующие свойства пространства $P$ взаимно эквивалентны:*

(1) $\dim P \leqq n$;

(2) $\operatorname{Ind} P \leqq n$;

(3) *при любой метрике пространства $P$ существует его равномерно нульмерное непрерывное отображение в $E^n$;*

(4) *при подходящей метрике пространства $P$ существует его равномерно нульмерное непрерывное отображение в $E^n$;*

(5) *$P$ является суммой не более чем $n+1$ нульмерных множеств.*

*В частности, для любого метризуемого $P$ имеем* $\dim P = \operatorname{Ind} P$.

Замечание. Эта теорема содержится уже в работе [6].

Доказательство. В силу 1.15, из (2) вытекает (1); на основании 2.15, из (1) вытекает (3); из (3) следует (4). Из (4) вытекает (5), так как если непрерывное отображение $f$ $P$ в $E^n$ равномерно нульмерно, $E^n = A_0 + \ldots + A_n$, $\dim A_k = 0$ (см. 1.4E), то по 3.2 $\dim f^{-1}(A_k) \leqq 0$, $P = f^{-1}(A_0) + \ldots + f^{-1}(A_n)$. Из (5) следует (1) по 1.17.

Остается доказать, что $(Z_n)$ из $\dim P \leqq n < \infty$ вытекает $\operatorname{Ind} P \leqq n$. Доказательство проводим индукцией по $n$. $(Z_0)$ верно в силу 1.15; докажем, что из $(Z_{n-1})$ вытекает $(Z_n)$. Пусть $\dim P \leqq n$ и пусть $A \subset P$ замкнуто, $G \subset P$ открыто, $A \subset G$; нужно доказать, что существует открытое $H$ такое, что $A \subset H$, $\overline{H} \subset G$, $\operatorname{Ind}(\overline{H} - H) \leqq n-1$. Очевидно, существует $f \in C(P, E^n)$ такое, что $f(A) = (a)$, $f(P-G) = (b)$, $|a-b| = \eta > 0$. Из 2.15 вытекает, что существует равномерно непрерывное $g \in C(P, E^n)$ такое, что $|f-g| < \frac{1}{3}\eta$. Обозначим через $U$ множество $y \in E^n$ таких, что $|y-a| < \frac{1}{2}\eta$ и положим $H = g^{-1}(U)$. Тогда $\overline{g(A)} \subset U$, $\overline{U}\overline{g(P-G)} = \emptyset$ и, следовательно, $A \subset H$, $\overline{H} \subset G$. Далее, очевидно, $\dim(\overline{U} - U) \leqq n$, $g(\overline{H} - H) \subset \overline{U} - U$ и потому, согласно 3.3, $\dim(\overline{H} - H) \leqq n-1$, так что на основании $(Z_{n-1})$ имеем $\operatorname{Ind}(\overline{H} - H) \leqq n-1$.

**3.5.** *Пространством Бэра веса* $\mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — бесконечная мощность, назовем топологическое пространство $X^{\aleph_0}$, где $X$ — дискретное пространство мощности $\mathfrak{m}$, а $X^{\aleph_0}$ означает, разумеется, топологическое произведение $\aleph_0$ экземпляров пространства $X$.

Пространство Бэра метризуемо; в нем можно ввести метрику, например, следующим образом: если $x = \{x_k\}_1^\infty$, $y = \{y_k\}_1^\infty$, $x \neq y$, то $\varrho(x, y) = \dfrac{1}{m}$, где $m$ есть наименьшее $k$ такое, что $x_k \neq y_k$. Легко видеть, что при этой метрике пространство Бэра полно.

**3.6. Теорема.** *Метризуемое пространство нульмерно, если и только если оно гомеоморфно непустому подмножеству пространства Бэра (подходящего веса).*

Для полноты изложения мы приводим доказательство, хотя оно и является точно таким же, как в хорошо известном случае пространства счетного веса.

I. Рассматриваем пространство Бэра $B = X^{\aleph_0}$ с метрикой указанной в 3.5. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно; пусть $\frac{1}{p} < \varepsilon$. Будем обозначать через $\alpha$ последовательности $\{z_1, \ldots, z_p\}$ элементов $z_i \in X$; через $G(\alpha)$, где $\alpha = \{z_1, \ldots, z_p\}$, обозначим множество всех $x = \{x_k\}_1^\infty \in B$ таких, что $x_k = z_k$ для $k = 1, \ldots, p$. Очевидно, $G(\alpha)$ открыты, $\operatorname{diam} G(\alpha) = \frac{1}{p+1} < \varepsilon$, $\operatorname{ord}\{G(\alpha)\}_\alpha = 0$. Итак, $\delta(B) < \varepsilon$ и, так как $\varepsilon$ произвольно, $\delta(B) = 0$. Из этого следует, что $\delta(S) = 0$ и потому $\dim S \leqq 0$ для любого $S \subset B$.

II. Пусть $R$ — метрическое пространство бесконечного веса $\mathfrak{m}$ и пусть $\dim R = 0$. Согласно 3.1, $\delta(R) = 0$, так что существуют (при $k = 1, 2, \ldots$) открытые покрытия $\{G_{k\xi}\}_\xi$ пространства $R$ такие, что $\operatorname{diam} G_{k\xi} < \frac{1}{k}$, $\operatorname{ord}\{G_{k\xi}\}_\xi = 0$. Очевидно, мы можем, кроме того, предполагать, что $\{G_{k+1,\xi}\}_\xi \leqq \{G_{k\xi}\}_\xi$ для $k = 1, 2, \ldots$ Пусть $X$ — дискретное пространство мощности $\mathfrak{m}$. Так как мощность системы $\{G_{k\xi}\}_\xi$ не превышает $\mathfrak{m}$, то можно предполагать, что индексы $\xi$ берутся из множества $X$.

Положим теперь для $x \in R$ $\varphi_k(x) = \xi$, если $x \in G_{k\xi}$, и положим $f(x) = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$. Тогда $f$ является отображением $R$ в $B = X^{\aleph_0}$. Если $x \in P$, $y \in P$, $\varrho(f(x), f(y)) < \frac{1}{p}$, то $\varphi_p(x) = \varphi_p(y)$, так что $x \in G_{p\xi}$, $y \in G_{p\xi}$, где $\xi = \varphi_p(x)$, и потому $\varrho(x, y) < \frac{1}{p}$. Итак, $f$ взаимно однозначно, а $f^{-1}$ равномерно непрерывно.

Пусть $x \in R$, $\varepsilon > 0$. Возьмем $p$ такое, что $\frac{1}{p} < \varepsilon$; пусть $x \in G_{p\xi'}$. Если $y \in G_{p\xi'}$, то ввиду $\{G_{k+1,\xi}\}_\xi \leqq \{G_{k\xi}\}_\xi$ при любом $k = 1, \ldots, p$ имеем $x \in G_{k\eta}$, $y \in G_{k\eta}$ при подходящем $\eta = \eta(k)$; поэтому $\varphi_k(x) = \varphi_k(y)$ при $k = 1, \ldots, p$ и, следовательно, $\varrho(f(x), f(y)) < \frac{1}{p} < \varepsilon$. Итак, $f$ непрерывно.

Замечание. Мы получили в результате II части доказательства даже несколько усиленное утверждение, а именно: *всякое нульмерное метрическое пространство является гомео-*

*морфным равномерно непрерывным образом некоторого подмножества пространства Бэра (ссоответствующего веса).*

**3.7. Теорема.** *Топологическое произведение счетного числа нульмерных метризуемых пространств нульмерно.*

Это вытекает из 3.6, так как $B^{\aleph_0} = (X^{\aleph_0})^{\aleph_0}$ гомеоморфно с $B = X^{\aleph_0}$.

**3.8.** Нам понадобится следующая теорема, принадлежащая М. А. Лаврентьеву [8].

*Пусть даны полные метрические пространства $R_1$, $R_2$, множества $S_1 \subset R_1$, $S_2 \subset R_2$ и гомеоморфное отображение $\varphi$ пространства $S_1$ на $S_2$. Тогда существует гомеоморфное отображение $f$ некоторого $S_1^*$, причем $S_1 \subset S_1^* \subset R_1$, на $S_2^*$, где $S_2 \subset S_2^* \subset R_2$, такое, что $f(x) = \varphi(x)$ для $x \in S_1$, а $S_1^*$ и $S_2^*$ являются, соответственно, $G_\delta$-множествами в $R_1$ и в $R_2$.*

**3.9. Теорема.** *Если пространство $P$ метризуемо, то для любого $S \subset P$ существует $S^*$ такое, что* (1) $S \subset S^* \subset \overline{S}$, (2) $S^*$ *есть $G_\delta$-множество в $P$*, (3) $\dim S^* = \dim S$.

Доказательство. Если $\dim S = 0$, то по 3.6 существует гомеоморфное с $S$ множество $S_1 \subset B$, где $B$ — пространство Бэра соответствующего веса. Введем в $P$ метрику и возьмем полное метрическое пространство $R$ такое, что $P \subset R$. Так как $B$ полно (при обычной метрике), то по 3.8 существуют $T^*$ и $T_1^*$ такие, что $S \subset T^* \subset R$, $S_1 \subset T_1^* \subset B$, $T^*$ является $G_\delta$-множеством в $R$, $T^*$ и $T_1^*$ гомеоморфны. Из 3.6 вытекает, что $\dim T^* = 0$. Теперь достаточно положить $S^* = \overline{S}T^*$.

Если $\dim S = \infty$, то достаточно положить $S^* = \overline{S}$. Если $\dim S = n$, $0 < n < \infty$, то по 3.4 существуют $S_k$ такие, что $S = S_2 + \ldots + S_n$, $\dim S_k = 0$. По уже доказанному, существуют $S_k^*$ такие, что $S_k \subset S_k^* \subset \overline{S}_k$, $S_k$ является $G_\delta$-множеством, $\dim S_k^* = 0$. Теперь достаточно положить $S^* = S_0^* + \ldots + S_n^*$.

**3.10. Теорема.** *Каждое метризуемое пространство гомеоморфно плотному подмножеству полного метрического пространства той же размерности.*

Доказательство. Пусть задано метризуемое $S$; введем в нем метрику и возьмем полное $P \supset S$. Тогда $S^*$, существование которого утверждается в 3.9, является $G_\delta$-множеством в полном пространстве и потому, по известной теореме, само полно при надлежащей метризации.

**3.11. Теорема.** *Если $P$ и $Q$ — непустые метризуемые пространства, то* $\dim(P \times Q) \leqq \dim P + \dim Q$.

Доказательство. Пусть $\dim P = m$, $\dim Q = n$. Если $m = \infty$ или $n = \infty$, то утверждение тривиально. Если $m < \infty$, $n < \infty$, то, согласно 3.4, существуют (при любой метрике пространства $P$ и $Q$) равномерно нульмерные отображения $f \in C(P, E^m)$, $g \in C(Q, E^n)$. Для $(x, y) \in P \times Q$ положим теперь $F(x, y) = (f(x), g(y))$. Легко видеть, что $F \in C(P \times Q, E^{m+n})$, $F$ равномерно нульмерно и потому, согласно 3.4, $\dim(P — Q) \leqq m + n$.

## Литература.


[1] *E. Čech:* Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque. Fundam. Math. **19**, 149—183 (1932).

[2] *E. Čech:* Sur la dimension des espaces parfaitement normaux. Bull. Int. Acad. Sci. Bohême **33**, 38—55 (1932).

[3] *E. Čech:* Příspěvek k theorii dimense. Čas. pro pěst. mat. fys. **62**, 277—292 (1933).

[4] *J. Dieudonné:* Une généralisation des espaces compacts. J. Math. Pures Appl. (9) **23**, 65—76 (1944).

[5] *C. H. Dowker:* Mapping theorems for non-compact spaces. Amer. Journ. Math. **69**, 200—242 (1947).

[6] *M. Катетов:* О размерности метрических пространств. Доклады АН СССР **79**, 189—191 (1951).

[7] *C. Kuratowski:* Sur le prolongement des fonctions continues et les transformations en polytopes. Fundam. Math. **24**, 259—268 (1935).

[8] *M. Lavrentieff:* Contribution à la théorie des ensembles homéomorphes. Fundam. Math. **6**, 149—160 (1924).

[9] *K. Morita:* On the dimension of normal spaces. II. J. Math. Soc. Japan **2**, 16—23 (1950).

[10] *Ю. Смирнов:* Группы Бетти пересечения бесконечного числа множеств. Доклады АН СССР **76**, 29—32 (1951).

[11] *Ю. Смирнов:* Некоторые соотношения в теории размерности. Матем. сборник, н. с., **29**, 157—172 (1951).

[12] *A. H. Stone:* Paracompactness and product spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 977—982 (1948).

[13] *Н. Б. Веденисов:* О размерности в смысле Чеха. Изв. АН СССР, сер. матем., **5**, 211—216 (1941).


## Summary.

## On the dimension of non-separable spaces. I


MIROSLAV KATĚTOV, Praha.



(Received August 29, 1952.)



In the present note, some results of the dimension theory are extended to arbitrary metrizable spaces. § 1 contains results (many of them already known) concerning locally finite coverings; § 2 is concerned

with 0-dimensional mappings into Banach spaces and related questions; in § 3, dimension-theoretical theorems are deduced from the results of § 1 and 2.

## 1.

If $\{A_\nu\}$ is a system of sets, then the order of $\{A_\nu\}$ is denoted $\operatorname{ord}\{A_\nu\}$ and defined as follows: $\operatorname{ord}\{A_\nu\}$ is the largest $n$ (where $n = -1, 0, 1, 2, \dots$ or $n = \infty$; we put, if necessary, $\infty = \aleph_0$) such that, for any $m < n + 2$, there exist $m$ sets $A_\nu$ with a non-void intersection.

**Lemma.** *Given a normal space $P$ and its locally finite open covering $\{G_\lambda\}$ of order $n$, there exist locally finite open coverings $\{H_\mu\}$ and $\{U_\nu\}$ such that*

(a) $\{H_\mu\}$, *as well as* $\{U_\nu\}$, *may be represented as the union of $n + 1$ systems of order* 0; *therefore*, $\operatorname{ord}\{H_\mu\} \leqq n$, $\operatorname{ord}\{U_\nu\} \leqq n$;

(b) *for any $x \in P$, there exists $\lambda$ such that $H_\mu \subset G_\lambda$ whenever $x \in H_\mu$*;

(c) *no $U_\nu$ intersects infinitely many sets $H_\mu$*;

(d) *if $\{G_\lambda\}$ is finite, then $\{H_\mu\}$ and $\{U_\nu\}$ are finite; if $\{G_\lambda\}$ is infinite, then their cardinality does not exceed that of $\{G_\lambda\}$.*

If $P$ is a topological space, then $\dim P$ denotes the dimension of $P$ defined in terms of open coverings, $\operatorname{Ind} P$ denotes the "strong" inductive dimension (i. e. $\operatorname{Ind} P \leqq n + 1$ if, for any disjoint closed $A \subset P$, $B \subset P$, there exists an open $G$ such that $A \subset G$, $\overline{G}B = \emptyset$, $\operatorname{Ind}(\overline{G} - G) \leqq n$).

**Lemma.** *Let $\{F_\nu\}$ be a locally finite covering of a space $P$ and let $F_\nu$ be closed*, $\dim F_\nu \leqq n$. *Given a locally finite open covering $\{G_\lambda\}$ such that no $F_\nu$ meets infinitely many $G_\lambda$, there exist open sets $H_\lambda \subset G_\lambda$ such that $\Sigma H_\lambda = P$*, $\operatorname{ord}\{H_\lambda\} \leqq n$.

The above lemmas imply the following results.

**Theorem** (C. H. Dowker). *If $P$ is a normal space, then, for any locally finite open covering $\{G_\lambda\}$ of $P$, there exists a locally finite open covering $\{H_\mu\}$ such that* $\operatorname{ord}\{H_\mu\} \leqq \dim P$ *and any $H_\mu$ is contained in some $G_\lambda$.*

**Theorem.** *Let $\{A_\nu\}$ be a locally finite system of subsets of a space $P$ and let* $\dim A_\nu \leqq n$. *If $A_\nu$ are closed or if $P$ is normal and $A_\nu$ are $F_\sigma$-sets, then* $\dim \sum A_\nu \leqq n$.

## 2.

A subset $M$ of a normed linear space $R$ will be called *uniformly linearly independent* if there exists $\vartheta > 0$ such that, for any reals $\alpha_i$, $\beta_j$ and any (different) $a_i \in M$, $b_j \in M$, we have $\left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j\right| \geqq \geqq \frac{1}{\vartheta} \left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i\right|$. Clearly, the well known spaces $(c)$, $(C)$, $l^p$), $(L^p)$ etc. contain an infinite uniformly linearly independent set; the author does not know whether it is true for arbitrary infinite-dimensional normed linear spaces.

If $P$ is a topological space, and $R$ is a metric space, then $C(P, R)$ denotes the metric space of all bounded continuous mappings of $P$ into $R$, and $C'(P, R)$ denotes its subspace consisting of all totally bounded continuous mappings. If $R$ is a normed linear space, then, of course, $C(P, R)$ and $C'(P, R)$ are considered as normed linear spaces, too.

Let $\{G_\lambda\}$ be a covering of $P$, and let $S \subset P$. We shall write $\delta(S) \leqq \{G_\lambda\}$ if there exists an open covering $\{H_\mu\}$ of $S$ such that $\operatorname{ord}\{H_\mu\} \leqq 0$ and any $H_\mu$ is contained in some $G_\lambda$. If $P$ is a metric space and $\{G_\lambda\}$ consists of all open $G$ such that $\operatorname{diam} G < \varepsilon$, we shall write $\delta(S) \leqq \varepsilon$ instead of $\delta(S) \leqq \{G_\lambda\}$.

Let $f$ be a mapping of a topological space $P$ into a metric space $R$, and let $\{G_\lambda\}$ be a covering of $P$. We shall say that $f$ is 0-dimensional relatively to $\{G_\lambda\}$ if there exists $\eta > 0$ such that $\delta(S) \leqq \{G_\lambda\}$ whenever $S \subset P$, $\operatorname{diam} f(S) < \varepsilon$. If $P$ is also a metric space, then $f$ will be called *uniformly 0-dimensional* if, for any $\varepsilon > 0$, there exists $\eta > 0$ such that $\delta(S) \leqq \varepsilon$ whenever $S \subset P$, $\operatorname{diam} f(S) < \eta$.

**Lemma.** *If $R$ is a normed linear space containing $n$ (where $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$) uniformly linearly independent elements, then there exists $\beta > 0$ such that the following assertion holds: if $P$ is normal, $\{G_\lambda\}$ is a locally finite open covering of $P$,* $\operatorname{ord}\{G_\lambda\} \leqq n$, $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, $f \in C(P, R)$, $\operatorname{diam} f\{(G_\lambda) < \alpha$ *(for any $\lambda$), then there exists $g \in C(P, R)$ such that* (1) $|f - g| \leqq \beta(\alpha + \varepsilon)$; (2) *$g$ is 0-dimensional relatively to $\{G_\lambda\}$; more explicitely, if $S \subset P$,* $\operatorname{diam} g(S) < \varepsilon$, *then* $\delta(S) \leqq \{G_\lambda\}$; (3) *if* $\operatorname{ord}\{G_\lambda\} < \infty$, *then $f - g \in C'(P, R)$.*

This lemma (cf. Lemma 1 of the author's note in *Doklady* AN SSSR **79**, 189—191) implies, together with A. H. Stone's theorem on locally finite coverings of metric spaces, the following result.

**Lemma.** *Let $P$ be a normal topological space, let $R$ be a normed linear space, and let* $\dim P \leqq \dim R$; *if* $\dim P$ *is infinite, suppose that $R$ contains an infinite uniformly linearly independent set. If $\{G_\lambda\}$ is a locally finite open covering of $P$, then* (1) *every $f \in C(P, R)$, with the exception of a nowhere dense set, is 0-dimensional relatively to $\{G_\lambda\}$;* (2) *if* $\dim P < \infty$ *or* $\operatorname{ord}\{G_\lambda\} < \infty$, *then every $f \in C'(P, R)$, with the exception of a nowhere dense set, is 0-dimensional relatively to $\{G_\lambda\}$.*

The above lemma implies at once the following theorems.

**Theorem.** *Let $P$ be a normal space, let $R$ be a Banach space, and let* $\dim P \leqq \dim R$; if $\dim P = \infty$, *suppose that $R$ contains an infinite uniformly linearly independent set. Let $\{G_{k\lambda}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, be locally finite open coverings of $P$. Then*

(1) *almost every $f \in C(P, R)$, i. e. every $f \in C(P, R)$ with the exception of a set of first category, is 0-dimensional relatively to every $\{G_{k\lambda}\}_\lambda$, $k = 1, 2, \ldots$;*

(2) *if* $\dim P < \infty$ *or if* $\operatorname{ord}\{G_{k\lambda}\} < \infty$ *for* $k = 1, 2, \ldots$, *then almost every* $f \in C'(P, R)$ *is* 0-*dimensional relatively to every* $\{G_{k\lambda}\}$, $k = 1, 2, \ldots$

**Theorem.** *Let P be a metric space, let R be a Banach space, and let* $\dim P \leqq \dim R$; *if* $\dim P = \infty$, *suppose that R contains an infinite uniformly linearly independent set. Then*

(1) *almost every* $f \in C(P, R)$ *is uniformly* 0-*dimensional;*

(2) *if* $\dim P < \infty$ *or if there exists a uniformly* 0-*dimensional continuous mapping of P on to a totally bounded metric space, then almost every* $f \in C'(P, R)$ *is uniformly* 0-*dimensional.*

## 3.

It is easy to deduce the following theorems from the results of § 1 and 2.

**Theorem.** *If P, Q are metric spaces and there exists a uniformly* 0-*dimensional continous mapping of P into Q, then* $\dim P \leqq \dim Q$.

**Theorem** (cf. *Doklady* AN SSSR, loc. cit.).

*Let P be a metrizable space. Then (for any* $n = 0, 1; 2, \ldots$) *the following properties of P are equivalent*: (1) $\dim P \leqq n$; (2) $\operatorname{Ind} P \leqq n$; (3) *for any metrization of P, there exists a uniformly* 0-*dimensional continuous mapping of P into* $E^n$; (4) *for a suitable metrization of P, there exists a uniformly* 0-*dimensional continuous mapping of P into* $E^n$; (5) *P may be represented as a sum of* $n + 1$ 0-*dimensional sets.*

**Theorem.** *The topological product of a countable number of* 0-*dimensional spaces is* 0-*dimensional.*

**Theorem.** *Any metrizable space is homeomorphic with a dense subset of a complete metric space of the same dimension.*

**Theorem.** *If P, Q are metrizable, then* $\dim P \times Q \leqq \dim P + \dim Q$.