Václav Alda

Замечание к распределению Пуассона

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 2 (1952), No. 3, 243–246

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100049`

ЗАМЕЧАНИЕ К РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ПУАССОНА

ВАЦЛАВ АЛЬДА (Václav Alda), Прага.

(Поступило в редакцию 25/II 1952 г.)

Установлено необходимое и достаточное условие сходимости к распределению *Пуассона*, подобное условию *Райкова* для распределения *Гаусса*.

Райков [1] установил интересное соотношение между законом больших чисел и центральным предельным законом. Доказательство для случая „элементарной системы" (см. далее) случайных величин приводится в [2]. Это замечание посвящено доказательству подобного соотношения для распределения Пуассона.

Пусть дана элементарная система случайных величин

$$\begin{matrix} \xi_{11}, \ldots, \xi_{1k_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_{n1}, \ldots, \xi_{nk_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}$$

т. е. система, удовлетворяющая следующим условиям:

1° $\int x \, \mathrm{d}F_{nj}(x) = 0$, $\int x^2 \, \mathrm{d}F_{nj} = b_{nj} < \infty$ (F_{nj} — распределение случайных величин ξ_{nj})[1]),

2° величины ξ_{nj} ($j = 1, 2, \ldots, k_n$) независимы,

3° $\Sigma_j b_{nj} = 1$,

4° $\operatorname{Max}_j b_{nj} \to 0$ для $n \to \infty$.

Далее обозначим

$$P(x) = \mathrm{e}^{-1} \sum_{0 \leq j < [x+1]} \frac{1}{j!} \tag{1}$$

Теорема: необходимым и достаточным условием того, чтобы распределение суммы $\sum_{j=1}^{k_n} \xi_{nj}$ сходилось по существу к $P(x)$, является сходимость по вероятности выражения

[1]) Подразумеваются пределы интегрирования $+\infty$ и $-\infty$.

$$S_n = \Sigma_j(\xi_{nj}^2 - \xi_{nj})$$

к единице.

Доказательство. I. Так как величины $\xi_{nj}^2 - \xi_{nj}$ независимы, имеет место

$$\Phi_n(t) = \Pi_j \varphi_{nj}(t)$$

если Φ_n — характеристическая функция суммы S_n, а φ_{nj} — характеристические функции отдельных слагаемых. Известно, что эквивалентное условие сходимости по вероятности S_n к единице имеет вид

$$\Phi_n(t) \to \mathrm{e}^{it} \qquad \text{для } n \to \infty \text{ при любом } t. \tag{2}$$

II. Докажем прежде всего следующие (условие леммы Баули): для любого t имеет место $\Sigma_j|\varphi_{nj}(t) - 1|^2 \to 0$ для $n \to \infty$ (3). Согласно 1° имеем

$$\varphi_{nj}(t) - 1 = \int(\mathrm{e}^{it(x^2-x)} - 1)\,\mathrm{d}F_{nj}(x) =$$
$$= \int(\mathrm{e}^{it(x^2-x)} - 1 - it(x^2 - x))\,\mathrm{d}F_{nj}(x) + itb_{nj}.$$

Интеграл в правой части будет

$$\int \ldots = \int\limits_{x<-1/2} \ldots + \int\limits_{-1/2\leq x\leq 3/2} \ldots + \int\limits_{x>3/2} \ldots.$$

Для крайних членов воспользуемся оценкой

$$|\mathrm{e}^{it(x^2-x)} - 1 - it(x^2 - x)| \leqq 2|t|\,(x^2 - x) \leqq 6|t|\,x^2,$$

для среднего же

$$|\mathrm{e}^{it(x^2-x)} - 1 - it(x^2 - x)| \leqq \tfrac{1}{2}t^2(x^2 - x)^2 < 2t^2x^2.$$

В силу этого будет $|\varphi_{nj}(t) - 1| \leqq (7|t| + 2t^2)\,b_{nj}$ и значит по 1°

$$\Sigma_j\,|\varphi_{nj}(t) - 1|^2 \leqq (7|t| + 2t^2)^2 \operatorname*{Max}_j b_{nj}$$

откуда с учетом условия 4° получим (3).

По лемме Баули (2) эквивалентно утверждению: для любого t и для $n \to \infty$ будет $\Sigma_j(\varphi_{nj}(t) - 1) \to it$. (4)

III. Условие необходимо. Согласно 1° и 3° будет

$$\Sigma_j(\varphi_{nj}(t) - 1) = \Sigma_j \int (\mathrm{e}^{it(x^2-x)} - 1)\,\mathrm{d}F_{nj}$$
$$= \Sigma_j \int (\mathrm{e}^{it(x^2-x)} - 1 - it(x^2 - x))\,\mathrm{d}F_{nj} + it.$$

Выберем τ так, чтобы $0 < \tau < \frac{1}{2}$ и разобьем $(-\infty, \infty)$ на интервалы $(-\infty, -\tau\rangle$, $(-\tau, 1-\tau\rangle$, $(1-\tau, 1+\tau)$, $\langle 1+\tau, \infty)$. В первом и четвертом подинтегральное выражение не может быть больше $2|t|\,(x^2 - x)$, во втором и третьем — $\frac{1}{2}t^2x^2(x - 1)^2$. Следовательно

$$|\Sigma_j \int (e^{it(x^2-x)} - 1 - it(x^2 - x))\, dF_{nj}| \leqq (2|t|(1 + \tau^{-1}) + 2|t| + 2t^2)\, \Sigma_j \int\limits_{|x-1|>\tau} x^2\, dF_{nj} + \tfrac{1}{2}t^2\tau^2.$$

Выберем сначала τ так, чтобы $\frac{1}{2}t^2\tau^2 < \frac{1}{2}\varepsilon > 0$, тогда по предположению и по теореме Гнеденко о распределении Пуассона можно выбрать n настолько большим, чтобы и первый член правой части был $< \frac{1}{2}\varepsilon$. Следовательно имеет место (4).

IV. Условие достаточно. Пусть имеет место (4). Докажем, что тогда соблюдено условие Линдеберга:

для любого $T > 0$ будет $\lim \Sigma_j \int\limits_{|x-1|>T} x^2\, dF_{nj} = 0$.

Согласно 1° и 3° будет

$$\Sigma_j(\varphi_{nj}(t) - 1) - it = \Sigma_j \int (e^{it(x^2-x)} - 1 - it(x^2 - x))\, dF_{nj}.$$

Согласно (4) получим (отделением действительной части от мнимой)

$$\Sigma_j \int (\cos t(x^2 - x) - 1)\, dF_{nj} \to 0, \tag{5}$$

$$\Sigma_j \int (t(x^2 - x) - \sin t(x^2 - x))\, dF_{nj} \to 0. \tag{6}$$

Перепишем (5) в виде

$$\Sigma_j \int \sin^2 t(x^2 - x)\, dF_{nj} \to 0. \tag{7}$$

Теперь существует постоянная $\tau > 0$ такая, что $x - \sin x + \sin^2 x \geqq \frac{1}{2}x^2$, если $|x| < \tau$ и поэтому

$$t(x^2 - x) - \sin t(x^2 - x) + \sin^2 t(x^2 - x) \geqq \tfrac{1}{2}t^2x^2(x - 1)^2$$

для $|t(x^2 - x)| < \tau$.

Так как для всех x имеет место $x^2 - x \geqq -\frac{1}{4}$, при $0 < t < 4\tau$ остается только $t(x^2 - x) \geqq \tau$ и тогда будет

$$t(x^2 - x) - \sin t(x^2 - x) \geqq \alpha t(x^2 - x)$$

и $\alpha > 0$ — также постоянная. Пусть далее $t < 1$. Существует $\delta > 0$ такое, что из $t(x^2 - x) \geqq \tau$ следует, что x не входит ни в интервал $\langle -\delta, \delta\rangle$, ни в интервал $\langle 1 - \delta, 1 + \delta\rangle$. Отсюда видно, что в облатси $t(x^2 - x) \geqq \tau$ будет $\alpha t(x^2 - x) \geqq \beta t x^2$, где $\beta > 0$ — постоянная.

Выберем при данном T такое t, чтобы область $|t(x^2 - x)| < \tau$ содержала интервал $\langle 1 - T, 1 + T\rangle$. Теперь имеем

$$\Sigma_j \int \{t(x^2 - x) - \sin t(x^2 - x) + \sin^2 t(x^2 - x)\}\, dF_{nj} =$$

$$= \Sigma_j\Big(\int\limits_{|t(x^2-x)|<\tau} + \int\limits_{t(x^2-x)\geqq\tau}\Big)\{\ldots\} \geqq$$

$$\geqq \Sigma_j\Big(\int\limits_{\substack{|t(x^2-x)|<\tau \\ |x-1|>T}} + \int\limits_{t(x^2-x)\geqq\tau}\Big)\{\ldots\} \geqq$$

$$\geqq \Sigma_j\Big(\tfrac{1}{2}t^2T^2 \int\limits_{\substack{|t(x^2-x)|<\tau\\|x-1|>T}} x^2\,\mathrm{d}F_{nj} + \beta t \int\limits_{t(x^2-x)\geqq\tau} x^2\,\mathrm{d}F_{nj}\Big) \geqq$$

$$\geqq \gamma(t, T)\,\Sigma_j \int\limits_{|x-1|>T} x^2\,\mathrm{d}F_{nj}\,,$$

$\gamma(t, T) > 0$, откуда согласно (6) и (7) вытекает (4). условие Линдеберга.

Summary.

A note on Poisson's distribution.

VÁCLAV ALDA, Praha.

(Received February 25th, 1952.)

The aim of this paper is to prove the following theorem: Let $\xi_{n1}, \ldots, \ldots, \xi_{nk_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ be a normed elementary system (conditions 1°—4° of the paper) of random variables. Then a necessary and sufficient condition for the convergence of the distribution of the sum $\xi_{n1} + + \ldots + \xi_{nk_n}$ to Poisson's distribution is the convergence in probability of $(\xi_{n1}^2 - \xi_{n1}) + \ldots + (\xi_{nk_n}^2 - \xi_{nk_n})$ to one.

ЛИТЕРАТУРА.

[1] *Райков Д. А.*: О связи между центральным предельным законом теории вероятностей и законом больших чисел. Изв. А. Н. СССР, серия мат., 1938, 323—336. (Реферат: Zentralblatt, **19** (1939), 224.)

[2] *Glivenko V. I.*: Theorie pravděpodobnosti, český překlad. Praha 1950