Czechoslovak Mathematical Journal

Jiří Nedoma

Замечание о сходимости последовательности мер

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 2 (1952), No. 3, 239–242

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100048

ЗАМЕЧАНИЕ О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МЕР

ИРЖИ НЕДОМА (Jiří Nedoma), Прага.

(Поступило в редакцию 31/I 1952 г.)

В статье устанавливается необходимое и достаточное условие существования неравномерно сходящейся последовательности мер.

Непустая система подмножеств данного пространства P, замкнутая относительно конечной суммы и разности, называется кольцом. Кольцо, замкнутое относительно счетной суммы, будет σ-колцом. Пересечение всех σ-колец, содержащих данное кольцо $\mathbf{A}$, является минимальным σ-кольцом над $\mathbf{A}$. Конечную σ-аддитивную неотрицательную функцию, определенную на данном кольце, мы назовем мерой. Пусть на σ-кольце $\mathbf{A}$ в пространстве P определена последовательность мер $\mathfrak{M} = \{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ и для каждого $A \epsilon \mathbf{A}$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A) = \mu_0(A)$. Тогда последовательность $\mathfrak{M}$ является сходящейся на $\mathbf{A}$. Пусть $\alpha(\mathfrak{M}) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}[\sup\limits_{A\epsilon\mathbf{A}}|\mu_n(A) - \mu_0(A)|]$. $\mathfrak{M}$ сходится равномерно, если $\alpha(\mathfrak{M}) = 0$; неравномерно, если $\mathfrak{M}$ сходится и имеет место $\alpha(\mathfrak{M}) > 0$. Меру μ, не равную тождественно нулю на σ-кольце $\mathbf{A}$, назовем неатомической, если из $A \epsilon \mathbf{A}$, $\mu(A) > 0$ вытекает существование множества $B \subset A$, $B \epsilon \mathbf{A}$ такого, что $0 < \mu(B) < \mu(A)$.

Теорема: *На σ-колце $\mathbf{A}$ в пространстве P существует неравномерно сходящаяся последовательность мер тогда и только тогда, когда на $\mathbf{A}$ существует неатомическая мера.*

Доказательство: 1. Пусть на $\mathbf{A}$ существует неравномерно сходящаяся последовательность мер $\mathfrak{M} = \{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, пределом которой является мера μ_0. Тогда существует последовательность $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, $A_i \epsilon \mathbf{A}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ и последовательность индексов $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ так, что

$$|\mu_{n_i}(A_i) - \mu_0(A_i)| > \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < \alpha(\mathfrak{M}).$$

Пусть последовательность $\mathfrak{A}$ фиксирована и A_i будет означать до конца первой части доказательства члены последовательности $\mathfrak{A}$. Положим

$$A^0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i - A; \; A^1 = A$$

для $A \in \mathfrak{A}$. Множества $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^{a_i}$, где $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность нулей и единиц, назовем атомами. Пусть C — система всех атомов, $\mathbf{C}$ — система всех сумм атомов. Положим $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cap (\mathbf{C} \cup \emptyset)$ и определим меры $\mu_i^{\mathbf{B}}$ так, что $\mu_i^{\mathbf{B}}(A) = \mu_i(A)$ для $A \in \mathbf{B}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Множество всех атомов, имеющих положительную меру $\mu_0^{\mathbf{B}}$, обозначим через D. Определим теперь

$$\left.\begin{aligned} \nu_i^{\mathbf{B}}(A) &= \mu_i^{\mathbf{B}}(A \cap (\bigcup C - \bigcup D)) \\ \bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}(A) &= \mu_i^{\mathbf{B}}(A \cap \bigcup D) \end{aligned}\right\} A \in \mathbf{B}, \; i = 0, 1, 2, \ldots$$

Так как D — счетная система, $\{\bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}\}$ сходится на $\mathbf{B} \cap (\bigcup D)$ равномерно. Для конечных D это очевидно. Если D — счетное бесконечное множество, расположим элементы D в последовательности $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$. Для $\varepsilon > 0$ существуют натуральные числа M и N такие, что одновременно имеют место соотношения:

а) $\sum\limits_{j=M}^{\infty} \bar{\nu}_0^{\mathbf{B}}(x_j) < \varepsilon$;

б) $|\bar{\nu}_j^{\mathbf{B}}(x_j) - \bar{\nu}_0^{\mathbf{B}}(x_j)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ для $j < M$, $i > N$;

в) $|\sum\limits_{j=M}^{\infty} \bar{\nu}_j^{\mathbf{B}}(x_j) - \sum\limits_{j=M}^{\infty} \bar{\nu}_0^{\mathbf{B}}(x_j)| < \varepsilon$ для $i > N$.

Имеем $A = E \cup F$, где $E = \bigcup\limits_{j \in \mathfrak{N}_1^A} x_j$, $F = \bigcup\limits_{j \in \mathfrak{N}_2^A} x_j$ и $\mathfrak{N}_1^A \subset \{1, 2, \ldots, M-1\}$, $\mathfrak{N}_2^A \subset \{M, M+1, M+2, \ldots\}$.

Из (б) следует $|\bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}(E) - \bar{\nu}_0^{\mathbf{B}}(E)| < \varepsilon$ для $i > N$, из (а) и (в) следует $\bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}(F) < 2\varepsilon$ для $i > N$, наконец из (а) получаем $\bar{\nu}_0^{\mathbf{B}}(F) < \varepsilon$, так что в общей сложности $|\bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}(F) - \bar{\nu}_0^{\mathbf{B}}(F)| < 2\varepsilon$ для $i > N$ и из $|\bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}(A) - \bar{\nu}_0^{\mathbf{B}}(A)| \leq |\bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}(E) - \bar{\nu}_0^{\mathbf{B}}(E)| + |\bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}(F) - \bar{\nu}_0^{\mathbf{B}}(F)|$ и предыдущих неравенств вытекает $|\bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}(A) - \bar{\nu}_0^{\mathbf{B}}(A)| < 3\varepsilon$ для $i > N$ независимо от A. Из равномерной сходимости последовательности $\{\bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}\}$ на $\mathbf{B} \cap (\bigcup D)$ следует равномерная сходимость этой последовательности на $\mathbf{B}$. Так как $\{\mu_n^{\mathbf{B}}\}_{n=0}^{\infty}$ сходится неравномерно и $\mu_i^{\mathbf{B}}(A) = \nu_i^{\mathbf{B}}(A) + \bar{\nu}_i^{\mathbf{B}}(A)$, $A \in \mathbf{B}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, то и $\{\nu_i^{\mathbf{B}}\}$ сходится неравномерно, а следовательно и последовательность мер $\mathfrak{N} = \{\nu_i\}$, где $\nu_i(A) = \mu_i[A \cap (\bigcup C - \bigcup D)]$, $A \in \mathbf{A}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, сходится неравномерно. ν_0, будучи пределом неравномерно сходящейся последовательности, не равна тождественно нулю. В самом деле, предположим, что $\alpha(\mathfrak{N}) > 0$, $\nu_0(A) = 0$ для $A \in \mathbf{A}$. Пусть α — положительное число, $\alpha < \alpha(\mathfrak{N})$. Тогда существует последовательность $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$, $B_j \in \mathbf{A}$ такая, что $|\nu_{n_j}(B_j) - \nu_0(B_j)| > \frac{1}{2}\alpha$ и из $\nu_0(B_j) = 0$ следует $\nu_{n_j}(B_j) > \frac{1}{2}\alpha$, откуда $\nu_{n_j}(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j) > \frac{1}{2}\alpha$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, так что мера $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_j$ не сходится к $\nu_0(\bigcup B_j) = 0$. ν_0 не является атомической мерой — в противном случае существовало бы множество $A \in \mathbf{A}$ такое, что $\nu_0(A) > 0$ и из $B \subset A$ следует, что или $\nu_0(B) = 0$ или $\nu_0(B) = \nu_0(A)$. Пользуясь методом математической индукции, легко доказать существование последовательности $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $a_i = 0, 1$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \nu_0(A \cap \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i) = \nu_0(A) > 0$, что невозможно, так как по определению ν_0 имеет место $\nu_0(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$.

2. Пусть на σ-кольце $\mathbf{A}$ существует неатомическая мера ν. Выберем $A_0 \in \mathbf{A}$ так, чтобы $\nu(A_0) > 0$. Образуем меру $\mu(A) = \dfrac{\nu(A_0 \cap A)}{\nu(A_0)}$ для $A \in \mathbf{A}$. Мера μ точно так же будет неатомической, поэтому существует $I_0 \in \mathbf{A}$, $I_0 \subset A_0$ так, что $\mu(I_0) = \frac{1}{2}$. Положим $I_1 = A_0 - I_0$ и определим множества $I_{i_1, \ldots, i_n}$ для $n = 2, 3, \ldots$ и $i_k = 0, 1$ так:

$$I_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, 0} \subset I_{i_1, \ldots, i_{n-1}}; \; \mu(I_{i_1, \ldots, i_{n-1}, 0}) = \frac{1}{2^n}$$

$$I_{i_1 \ldots, i_{n-1}, 1} = I_{i_1, \ldots, i_{n-1}} - I_{i_1, \ldots, i_{n-1}, 0}.$$

Систему всех множеств $I_{i_1, \ldots, i_n}$ обозначим через $\boldsymbol{I}$. Пусть $\mathbf{B}$ — кольцо, содержащее все суммы элементов $\boldsymbol{I}$ и пустое множество. Определим последовательность множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и мер $\mathfrak{M} = \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ на кольце следующим образом:

$$A_n = \bigcup_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}} I_{i_1, \ldots, i_{n-1}, 0};$$

$$\mu_n(B) = 2\mu(B \cap A_n); \; B \in \mathbf{B}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

$\mu_n(B)$ стремится к $\mu(B)$ для $B \in \mathbf{B}$, как явствует из определения кольца $\mathbf{B}$ и последовательности мер. Образуем минимальное σ-кольцо $\sigma(\mathbf{B})$ над $\mathbf{B}$. Тогда для каждой $F \in \sigma(\mathbf{B})$ и для $\varepsilon > 0$ существует $B \in \mathbf{B}$ такое, что $\mu(B \triangle F) < \frac{1}{2}\varepsilon$; отсюда следует $\mu_n(B \triangle F) < \varepsilon$. Из $\mu_n(B) \to \mu(B)$ вытекает поэтому $\mu_n(F) \to$

$\to \mu(F)$ для $F \in \sigma(\mathbf{B})$. Положим $\nu_A(B) = \mu(A \cap B)$ для $B \in \sigma(\mathbf{B})$. По теореме Радона-Никодима существует функция точки $f_A(x)$, определенная на A_0 таким образом, что $\nu_A(B) = \int\limits_B f_A(x)\,\mathrm{d}\mu$ для $B \in \sigma(\mathbf{B})$. Так как $0 \leqq \nu_A(B) \leqq \mu(B)$ для $B \in \sigma(\mathbf{B})$, то имеет место $0 \leqq f_A(x) \leqq 1$ везде на A_0 кроме множества меры μ нуль. Так как

$$\mathbf{A}(A) = \mu(A \cap A_0) = \nu_A(A_0)$$

будет

$$\mu_n(A) = 2\mu(A_n \cap A) = 2\nu_A(A_n) = 2\int\limits_{A_n} f_A(x)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{A_0} f_A(x)\,\mathrm{d}\mu_n$$

$$\text{для } n = 1, 2, 3, \dots$$

откуда $\{\mu_n(A)\}_{n=1}^\infty = \{\int\limits_A f_A(x)\,\mathrm{d}\mu_n\}_{n=1}^\infty$, а так как $f_A(x)$ ограничена, из сходимости последовательности $\{\mu_n\}$ на $\sigma(\mathbf{B})$ следует сходимость последовательности интегралов, а отсюда и сходимость последовательности мер $\mathfrak{M} = \{\mu_n(A)\}_{n=1}^\infty$ для $A \in \mathbf{A}$. Имеем $\alpha(\mathfrak{M}) \geqq \overline{\lim\limits_{n=\infty}} |\mu_n(A)_n - \mu(A_n)| = \frac{1}{2} > 0$ и, следовательно, сходимость не будет равномерной.

Научно-исследовательский институт техники связи им. А. С. Попова.

Summary.

Convergence of Sequences of Measures.

JIŘÍ NEDOMA, PRAHA.

(Received January 31th, 1952.)

Let P be an abstract space. A non-void system $\mathbf{A}$ of its point sets will be called a σ-field in P, if the union of every countable subsystem and the difference of every two elements of $\mathbf{A}$ belongs to $\mathbf{A}$ again. By a measure we mean every non-negative finite and σ-additive function $\mu(A)$ defined on $\mathbf{A}$. A measure μ such that $\mu(A) \neq 0$ for at least one $A \in \mathbf{A}$, is called non atomic if for every $A \in \mathbf{A}$ such that $\mu(A) \neq 0$, there exists a set $B \subset A$, $B \in \mathbf{A}$ such that $0 < \mu(B) < \mu(A)$. There is a question (A. Špaček): Which is the necessary and sufficient condition for the uniform convergence $\mu_n(A) \to \mu(A)$ where μ_n and μ denote measures on $\mathbf{A}$?

In the present article this problem is solved like this: Let $\mathbf{A}$ be a σ-field in the abstract space P. Then the existence of the non-uniform convergence of the sequence $\{\mu_n\}$ of measures on A to a measure μ on $\mathbf{A}$ is equivalent to the existence of a non-atomic measure on $\mathbf{A}$.