Miroslav Jiřina

Последовательная оценка пределов допуска, независимых от закона паспределения

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 2 (1952), No. 3, 221–232

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100046

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПРЕДЕЛОВ ДОПУСКА, НЕЗАВИСИМЫХ ОТ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

МИРОСЛАВ ИРЖИНА (Miroslav Jiřina), Прага.

(Поступило в редакцию 9/I 1952 г.)

В настоящей статье приводится способ последовательной оценки пределов допуска, независимых от закона распределения. Доказано, что выборочный процесс заканчивается с вероятностью 1 и выведена формула для α, т. е. для вероятности того, что по крайней мере $100\beta\%$ генеральной совокупности лежит в пределах допуска.

1. Введение. Проблема оценки пределов допуска, не зависящих от закона распределения была разрешена Вильксом в статьях [1], [2] и это решение было потом дополнено в [3]. В этих статьях доказано, что в качестве пределов допуска A и B можно выбрать r-тое значение выборки снизу и s-тое значение выборки сверху, если выборка составлена по величине. Вероятность того, что по крайней мере $100\beta\%$ генеральной совокупности будет лежать между этими пределами допуска, т. е. вероятность $\alpha = P(\int_A^B \mathrm{d}F(z) \geqq \beta)$, не зависит от закона распределения $F(z)$ генеральной совокупности, причем имеет место

$$\alpha = I_\beta(n + 1 - r - s, r + s) = \frac{B_\beta(n + 1 - r - s, r + s)}{B(n + 1 - r - s, r + s)} \tag{1}$$

где B_β и B — неполная и полная бета-функции, n — объем выборки.

В настоящей статье приводится способ последовательной оценки пределов допуска, независимых от закона распределения. Мы предполагаем, что закон распределения случайной переменной, на которой производятся случайные наблюдения, выражается непрерывной функцией, причем существование плотности распределения не обязателно.

2. Описание процесса выборки: Пусть даны постоянные целые числа r, s и k такие, что $r \geqq 0$, $s \geqq 0$, $r + s > 0$, $k > 0$. При выборке поступаем следующим образом:

1. В первой фазе мы произведем $r + s$ независимых случайных наблюдений и расположим полученные значения z_1, $z_2, \ldots, z_{r+s}$ по величине так, чтобы $z_{l_1} \leqq z_{l_2} \leqq \ldots \leqq z_{l_{r+s}}$. В качестве первых предварительных пределов возьмем значения $A^{(1)} = z_{l_r}$ (если $r > 0$) и $B^{(1)} = z_{l_{r+1}}$ (если $s > 0$).

2. Установив значения $A^{(1)}$, $B^{(1)}$ приступаем ко второй фазе выборки следующим образом:

а) Наблюдение $z_{r+s+i+1}$ производится лишь в том случае, когда

$$A^{(1)} \leqq z_{r+s+i} \leqq B^{(1)} \text{ (если } rs > 0) \text{ или } A^{(1)} \leqq r_{r+s+i} \text{ (если } s = 0) \text{ или } z_{r+s+i} \leqq B^{(1)} \text{ (если } r = 0). \qquad (*)$$

б) Если мы получим k значений $z_{r+s+1}, z_{r+s+2}, \ldots, z_{r+s+k}$ таких, что для всех $i = 1, 2, \ldots, k$ имеет место (*), то значения $A = A^{(1)}$ (при $r > 0$) и $B = B^{(1)}$ (при $s = 0$) принимаем за окончательные пределы допуска и выборочный процесс закончен.

в) Если для какого либо m такого, что $1 \leqq m \leqq k$ получатся значения $z_{r+s+1}, \ldots, z_{r+s+m}$ такие, что (*) справедливо для $i = 1, 2, \ldots, m - 1$, но $z_{r+s+m} < A^{(1)}$, или $z_{r+s+m} > B^{(1)}$, то значениа $A^{(2)} = z_{r+s+m}$, $B^{(2)} = B^{(1)}$ и соответственно $A^{(2)} = A^{(1)}$, $B^{(2)} = z_{r+s+m}$ принимаем за вторые предварительные пределы.

3. Если выборочный процесс не заканчивается во второй фазе, т. е. в случае 2в), то значения $A^{(1)}$, $B^{(1)}$ заменяем значениями $A^{(2)}$, $B^{(2)}$ и проводим третью фазу выборки тем же способом, как и вторую и т. д.

Таким образом мы получим последовательности предварительных пределов $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ (при $r > 0$) и $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots$ (при $s > 0$), которые будут или бесконечными, если выборочный процесс не заканчивается, или конечными, если он заканчивается. Во втором случае последними членами последовательностей будут окончательные пределы допуска A (при $r > 0$) и B (при $s > 0$). При $r = 0$ соотв. $s = 0$, A соотв. B не будет определено. Следовательно, выбор $r = 0$ или $s = 0$ означает, что нас интересует только верхный или, соответственно нижний предел допуска.

В дальнейших пунктах доказывается, что этот выборочный процесс заканчивается с вероятностью 1 и выводится формула для

$$\alpha = P[\int_A^B \mathrm{d}F(z) \geq \beta].$$

3. **Поле вероятностей** будет минимальным σ-телом E над семейством всех цилиндров Бореля в множестве E всех

действительных последовательностей $z = \{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ с мерой вероятности P, определенной последовательностью функций распределения $F_n(z_1, z_2, \ldots, z_n) = F(z_1) \,.\, F(z_2) \ldots F(z_n)$, где F — непрерывная функция распределения. Для $P(B) > 0$ мы обозначим $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (условная вероятность). Пусть $\mathfrak{P}_n$ — множество всех перемещений $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ чисел $(1, 2, \ldots, \ldots, n)$. Для любого $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ и для действительных ξ, η пусть $M_n(l_1, l_2, \ldots, l_n, \xi, \eta)$ будет множеством всех $z = \{z_i\}_{i=1}^{\infty} \in E$ таких, что $z_{l_1} < z_{l_2} < \ldots < z_{l_n}$, $z_{l_r} < \xi$ для $r > 0$ и $z_{l_{n-s+1}} < \eta$ для $s > 0$. Далее пусть $M_n(l_1, \ldots, l_n) = M_n(l_1, \ldots, l_n, \infty, \infty)$. Так как F непрерывна, будет $\bigcup\limits_{\mathfrak{P}_n} M_n(l_1, \ldots, l_n) \sim E$, если $\sim$ означает равенство с точностью до меры нуль.

Пусть для $z \in M(l_1, \ldots, l_n)$ будет $A_n(z) = z_{l_r}$ (при $r > 0$) и $B_n(z) = z_{l_{n-s+1}}$ (при $s > 0$). С помощью этих случайных переменных дадим следующие определения:

Пусть $N(i, j)$ — множество всех $z = \{z_i\}_{i=1}^{\infty} \in E$ таких, что для всех $\nu = 1, 2, \ldots, j$ имеет место $z_{i+\nu} > A_i(z)$ (при $r > 0$) и $z_{i+\nu} < B_i(z)$ (при $s > 0$).

$$\overline{N}(i, j) = E - N(i, j)$$

Для последовательности натуральных чисел $m_1, m_2, \ldots$ положим

$$L(m_1) = N(r + s, m_1 - 1) \cap \overline{N}(r + s, m_1)$$

$$L(m_1, \ldots, m_n) = L(m_1, \ldots, m_{n-1}) \cap N(r + s + \sum_{i=1}^{n-1} m_i, m_n - 1) \cap \cap \overline{N}(r + s + \sum_{i=1}^{n-1} m_i, m_n) \qquad \text{для } n > 1$$

$$K(m_1, \ldots, m_n) = L(m_1, \ldots, m_n) \cap N(r + s + \sum_{i=1}^{n} m_i, k) \qquad \text{для } n \geqq 1$$

$$K(0) = N(r + s, k)$$

Множество $L(m_1, \ldots, m_n)$ соответствует следующему явлению „$(n + 1)$-вые предварительные пределы не окончательны и между определением $(i + 1)$-вых и i-тых пределов было выбрано m_i значений $(i = 1, 2, \ldots, n)$“ Множество $K(m_1, \ldots, m_n)$ соответствует явлению „$(n + 1)$-вые предварительные пределы окончательны и между определением $(i + 1)$-вых и i-тых пределов было выбрано m_i значений $(i = 1, 2, \ldots, n)$.“ Множество

$K(0)$ соответствует явлению „первые пределы являются окончательными".

Очевидно имеет место

$$K(0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m_n=1}^{k} \dots \bigcup_{m_1=1}^{k} K(m_1, \dots, m_n) \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m_n=1}^{k} \dots \bigcup_{m_1=1}^{k} L(m_1, \dots, m_n) \sim E \tag{2}$$

4. Вычисление $P(L(m_1, \dots, m_n))$ и $P(K(m_1, \dots, m_n))$. В этом пункте последовательность $m_1, \dots, m_n$ является заданной, так что можно писать L_i вместо $L(m_1, \dots, m_i)$, K_i вместо $K(m_1, \dots, m_i)$ и далее $t_i = r + s + \sum_{\nu=1}^{i} m_\nu$.

Пусть G_n — функция распределения случайных переменных A_n, B_n при $rs > 0$ или случайной переменной A_n при $s = 0$ или наконец B_n при $r = 0$. Тогда для каждой $\mathfrak{P}'_n \subset \mathfrak{P}_n$ и $M'_n = \bigcup_{\mathfrak{P}'_n} M_n(l_1, \dots, l_n)$ имеет место

$$G_n(\xi, \eta | M'_n) = P(\bigcup_{\mathfrak{P}_n'} M_n(l_1, \dots, l_n, \xi, \eta) | M'_n) =$$
$$= \frac{1}{P(M'_n)} \sum_{\mathfrak{P}_n'} \int_{M_n^*(l_1, \dots l_n, \xi, \eta)} \mathrm{d} \left[\prod_{i=1}^{n} F(z_i) \right]$$

где $M^*_n(l_1, \dots, l_n, \xi, \eta)$ — множество всех $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ таких, что $z_{l_1} < z_{l_2} < \dots < z_{l_n}$ и $z_{l_r} < \xi$ при $r > 0$ и $z_{l_{n-s+1}} < \eta$ при $s > 0$.

Если, далее, $V(\xi, \eta)$ обозначает множество всех пар действительных чисел (x, y) при $rs > 0$, или всех x при $s = 0$ или наконец всех y при $r = 0$ таких, что $x < y$, $x < \xi$, $y < \eta$, то интегрированием получим, что последний интеграл равен выражению

$$\mathrm{konst} \int_{V(\xi, \eta)} \varphi_n(x, y) \, \mathrm{d}\Phi(x, y)$$

где

$$\varphi_n(x, y) = [F(y) - F(x)]^{n-r-s} [F(x)]^{r-1} [1 - F(y)]^{s-1}$$
$$\text{и } \Phi(x, y) = F(x) F(y) \quad \text{при } rs > 0$$
$$\varphi_n(x, y) = [1 - F(x)]^{n-r} [F(x)]^{r-1}$$
$$\text{и } \Phi(x, y) = F(x) \qquad \text{при } s = 0$$
$$\varphi_n(x, y) = [F(y)]^{n-s} [1 - F(y)]^{s-1}$$
$$\text{и } \Phi(x, y) = F(y) \qquad \text{при } r = 0$$

Так как

$$\int\limits_{V(\infty,\infty)} \varphi_n(x, y)\, \mathrm{d}\Phi(x, y) = c_n, \text{ где} \begin{cases} c_n = \dfrac{(r-1)!\,(s-1)!}{n^{[r+s]}} & \text{при } rs > 0 \\ c_n = \dfrac{(r-1)!}{n^{[r]}} & \text{при } s = 0, \\ c_n = \dfrac{(\ -1)!}{n^{[s]}} & \text{при } r = 0 \end{cases} \tag{3}$$

имеет место

$$G_n(\xi, \eta | M'_n) = \frac{1}{c_n} \cdot \int\limits_{V(\xi, \eta)} \varphi_n(x, y)\, \mathrm{d}\Phi(x, y) \tag{4}$$

По определению L_i имеет место

$$P(L_n) = P(L_{n-1}) \,.\, [P(N(t_{n-1}, m_n - 1)|L_{n-1}) - \\ - P(N(t_{n-1}, m_n)|\, L_{n-1})] \tag{5}$$

Для натуральных ν пусть W_ν будет множеством всех $(z_1, z_2, \ldots, \ldots, z_\nu)$ и всех пар (x, y) при $rs > 0$ или всех x при $s = 0$ или всех y при $r = 0$ таких, что $x < z_i$ при $r > 0$ и $y > z_i$ при $s > 0$ для $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Тогда ввиду того, что L_{n-1} является соединением множеств $M_{t_{n-1}}(l_1, \ldots, l_{t_{n-1}})$ и учитывая (4), мы получим

$$P(N(t_{n-1}, \nu) \,|L_{n-1}) = \int\limits_{W_\nu} \mathrm{d}\left[G_{t_{n-1}}(x, y|\, L_{n-1}) \prod_{i=1}^{\nu} F(z_i)\right] =$$

$$= \frac{1}{c_{t_{n-1}}} \int\limits_{W_\nu} \varphi_{t_{n-1}}(x, y)\, \mathrm{d}\left[\Phi(x, y) \prod_{i=1}^{\nu} F(z_i)\right] = \tag{6}$$

$$= \frac{1}{c_{t_{n-1}}} \int\limits_{V(\infty,\infty)} \varphi_{t_{n-1}+\nu}(x, y)\, \mathrm{d}\Phi(x, y) = \frac{c_{t_{n-1}+\nu}}{c_{t_{n-1}}}$$

согласно (3). Подстановкой по уравнению (5) получим для $n > 1$

$$P(L_n) = P(L_{n-1}) \,.\, \frac{t_{n-1}^{[r+s]}(r + s)}{t_n^{[r+s+1]}} \tag{7}$$

Аналогично высчитаем

$$P(L_1) = \frac{(r + s)!\,(r + s)}{t_1^{[r+s+1]}}$$

Далее согласно (7) получим рекуррентно (при соглашении $\prod\limits_{i=1}^{0} = 1$)

$$P(L_n) = P(L(m_1, \ldots, m_n)) = \frac{(r+s)!\,(r+s)^n}{\left(r+s+\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\right)^{[r+s+1]} \cdot \prod\limits_{i=1}^{n-1}(m_1+\ldots+m_i)}$$

Из соотношения

$$P(K_n) = P(L_n) \,.\, P(N(t_n, k) \mid L_n)$$

следует

$$P(K_n) = P(K(m_1, \ldots, m_n)) = \frac{(r+s)!\,(r+s)^n}{\left(r+s+k+\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\right)^{[r+s]} \prod\limits_{i=1}^{n}(m_1+\ldots+m_i)} \tag{8}$$

и аналогично

$$P(K(0)) = \frac{(r+s)!}{(r+s+k)^{[r+s]}} \tag{9}$$

Так как

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m_n=1}^{k} \ldots \bigcup_{m_1=1}^{k} L(m_1, \ldots, m_n)\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m_n=1}^{k} \ldots \sum_{m_1=1}^{k} P(L(m_1, \ldots, m_n)) \leqq$$

$$\leqq \lim_{n\to\infty} \frac{(r+s)^n\, k^n}{(n-1)!} = 0$$

процесс выборки заканчивается с вероятностью 1 и ввиду (2) имеет место

$$P(K(0)) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m_n=1}^{k} \ldots \sum_{m_1=1}^{k} P(K(m_1, \ldots, m_n)) = 1 \tag{10}$$

5. Вычисление вероятности α: Окончательным пределам допуска соответствуют случайные переменные A, B такие, что

$A(z) = A_{t_n+k}(z)$, $B(z) = B_{t_n+k}(z)$ для $z \in K(m_1, \ldots, m_n)$ и
$A(z) = A_{r+s+k}(z)$, $B(z) = B_{r+s+k}(z)$ для $z \in K(0)$.

Введем обозначения $Q = F(B) - F(A)$ при $rs > 0$ или $Q = 1 - F(A)$ при $s = 0$ или $Q = F(B)$ при $r = 0$ и пусть Ψ будет функцией распределения случайной переменной Q. Пусть Ψ_n — функция распределения той случайной переменной, которую мы получим, заменив в предыдущем определении A, B переменными A_n, B_n. Очевидно

$$\Psi(\zeta | K(m_1, \ldots, m_n)) = \Psi_{t_n}(\zeta | K(m_1, \ldots, m_n)) =$$

$$= \frac{\left(r+s+k+\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\right)^{[r+s]}}{(r+s-1)!} \int_0^{\zeta} q^{m_1+\ldots m_n+k} (1-q)^{r+s-1}\, \mathrm{d}q, \quad (0 \leqq \zeta \leqq 1)$$

Второе равенство вытекает из (4) подстановкой под знаком интеграла.

Тогда

$$\Psi(\zeta) = P(K(0)) \frac{(r+s+k)^{[r+s]}}{(r+s-1)!} \int_0^\zeta q^k(1-q)^{r+s-1}\,\mathrm{d}q +$$

$$+ \sum_{n-1}^{\infty} \sum_{m_n=1}^{k} \cdots \sum_{m_1=1}^{k} P(K(m_1, \ldots, m_n)) \frac{\left(r+s+k+\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^{[r+s]}}{(r+s-1)!} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\zeta q^{m_1+\ldots+m_n+k}\,(1-q)^{r+s-1}\,\mathrm{d}q = \tag{11}$$

$$= (r+s) \int_0^\zeta q^k(1-q)^{r+s-1} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n(q)\right) \mathrm{d}q$$

где

$$S_n(q) = \sum_{m_n=1}^{k} \cdots \sum_{m_1=1}^{k} \frac{q^{m_1+\ldots+m_n}}{m_1(m_1+m_2)\ldots(m_1+\ldots+m_n)}$$

Дифференцируя по q получим

$$S_n'(q) = S_{n-1}(q) \sum_{m_n=1}^{k} q^{m_n-1}$$

С помощью этого уравнения легко докажем математической индукцией

$$S_n(q) = \frac{1}{n!} \left(\sum_{m=1}^{k} \frac{q^m}{m}\right)^n$$

так что

$$\Psi(\zeta) = (r+s) \int_0^\zeta q^k(1-q)^{r+s-1}\, \mathrm{e}^{(r+s) \sum_{m=1}^{k} \frac{q^m}{m}}\, \mathrm{d}q =$$

$$= 1 - (1-\zeta)^{r+s}\, \mathrm{e}^{(r+s) \sum_{m=1}^{k} \frac{\zeta^m}{m}}$$

Так как $\alpha = P(Q \geqq \beta)$, имеет место

$$\alpha = 1 - \Psi(\beta) = (1-\beta)^{r+s}\, \mathrm{e}^{(r+s) \sum_{m=1}^{k} \frac{\beta^m}{m}} \tag{12}$$

Следовательно, если мы хотим найти для данных α, β, r, s соответствующее k, то нужно решить уравнение (12) относительно k, т. е. найти наименьшее целое число k, удовлетворяющее неравенству

$$\sum_{m=1}^{k} \frac{\beta^m}{m} \geqq \frac{\log\alpha}{r+s} - \log(1-\beta) \tag{13}$$

В таблице I приведены значения суммы $\sum_{m=1}^{k} \frac{\beta^m}{m}$ для $\beta = 0{,}8$, $0{,}9$, $0{,}95$. По таблице можно для данных α, β, r, s найти k по формуле (13). В таблице II приведены непосредственно значения k для $r + s = 2$.

6. Сравнение с простым выборочным процессом.

Процессу выборки, определенному в начале настоящей статьи, соответствует средний объем выборки $\bar{N}$, для которого имеет место

$$\bar{N} = (r + s + k)\, P(K(0)) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m_n=1}^{k} \dots \sum_{m_1=1}^{k} (r + s + m_1 + \dots + m_n)\,. \\ .\, P(K(m_1, \dots, m_n)) \qquad (14)$$

Последовательный выборочный процесс сравним с простым выборочным процессом (см. Введение) с объемом $[\bar{N}]$.

Для данных r, s, k, β обозначим вероятность α последовательного выборочного процесса знаком $\alpha_1(\beta)$, вероятность соответствующего простого выборочного процесса (с объемом выборки $[\bar{N}]$) — знаком $\alpha_2(\beta)$. $\alpha_1(\beta)$ дано формулой $\alpha_1(\beta) = 1 -$ $- \psi(\beta)$ и ввиду (10) можно написать

$$\alpha_1(\beta) = 1 - \frac{1}{(r + s - 1)!} \sum_{n=r+s+k}^{\infty} n^{[r+s]} a_n \int_0^\beta q^{n-r-s} (1 - q)^{r+s-1}\, dq$$

В силу (11) и (14) имеет место

$$a_n > 0, \quad \sum_{n=r+s+k}^{\infty} a_n = 1, \quad \sum_{n=r+s+k}^{\infty} n a_n = \bar{N} \qquad (15)$$

$\alpha_2(\beta)$ дано формулой (1). Для простоты в качестве объема выборки подставим вместо $[\bar{N}]$ число $\bar{N}$, так что

$$\alpha_2(\beta) = 1 - \frac{\bar{N}^{[r+s]}}{(r + s - 1)!} \int_0^\beta q^{\bar{N}-r-s} (1 - q)^{r+s-1}\, dq$$

Обозначим $g(\beta) = \beta^{\bar{N}} - \sum_{n=r+s+k}^{\infty} a_n \beta^n$. Пусть n_1 — наибольшее целое число, меньшее чем $\bar{N}$. Тогда очевидно $n_1 \geqq r + s + k$, так что

$$g(0) = 0 \text{ для } 0 \leqq n < r + s + k$$
$$\text{и } g^{(n)}(0) < 0 \text{ для } r + s + k \leqq n \leqq n_1 \qquad (16)$$

Отсюда следует, что $g^{(n)}(\beta)$ является для

$$0 \leq n \leq n_1 \tag{17}$$

в некоторой окрестности точки 0 убывающей.

Предположим, что $g(\beta)$ имеет внутри (0,1) нулевую точку. Тогда $g'(\beta)$ имеет внутри (0, 1) по крайней мере 2 нулевые точки, ибо $g(0) = 0$ и $g(1) = 1 - \sum\limits_{n=r+s+k}^{\infty} a_n = 0$ ввиду (13), и $g''(\beta)$ имеет внутри (0,1) по крайней мере 3 нулевые точки, ибо $g'(0) = 0$ и $g'(1) = \overline{N} - \sum\limits_{n=r+s+k}^{\infty} na_n = 0$ ввиду (13). В силу (14) и (15) $g^{(n_1)}(\beta)$ имеет в (0,1) по крайней мере 3 нулевые точки, а $g^{(n_1+2)}$ — хотя бы одну. Однако это невозможно, ибо если $\overline{N}$ — не целое число, то $\overline{N}-1 < n_1 < \overline{N}$ и $g^{(n_1+2)}(\beta) = \overline{N}(\overline{N}-1) \ldots (\overline{N}-n_1) \cdot (\overline{N}-n_1-1)\, \beta^{\overline{N}-n_1-2} - \sum\limits_{n=n_1+2}^{\infty} n^{[n_1+2]} a_n \beta^{n-n_1+2} < 0$; если же $\overline{N}$— целое, то $n = \overline{N}-1$ и $g^{(n_1+2)}(\beta) = g^{(\overline{N}+1)}(\beta) = -\sum\limits_{n=\overline{N}+1}^{\infty} n^{[\overline{N}+1]} \cdot a_n \beta^{n-\overline{N}-1} < 0$. Следовательно, $g(\beta) < 0$ для всех $0 < \beta < 1$

(18)

Так как $g(1) = g'(1) = 0$ и имеет место (17), $g^{(r+s)}(\beta)$ имеет в (0,1) по крайней мере две нулевые точки и принимает в окрестности точки 0 отрицательные значения. Более двух нулевых точек она иметь не может, так как иначе мы пришли бы к противоречию, как и в предыдущем случае. Если обозначить нулевые точки через $\beta_1 < \beta_2$, то $g^{(r+s)}(\beta)$ будет отрицательной в $(0, \beta_1)$. В (β_1, β_2) она положительна, а в $(\beta_1, 1)$ отрицательна, ибо в противном случае $g^{(r+s+1)}(\beta)$ имела бы по крайней мере 3 нулевые точки в (0, 1), что приводит к противоречию.

Итак, $g^{(r+s)}(\beta)$ имеет в (0,1) две нулевые точки и принимает в некоторой окрестности точки 1 отрицательные значения (19).

Положим теперь

$$f(\beta) = \alpha_1(\beta) - \alpha_2(\beta).$$

Если $r + s = 1$, то $f(\beta) = g(\beta)$ и в силу (18) $f(\beta)$ будет в (0,1) отрицательна. [20)

Если же $r + s > 1$, то

$$f'(\beta) = \frac{(1-\beta)^{r+s-1}}{(r+s-1)!}\, g^{(r+s)}(\beta)$$

Согласно (19) $f'(\beta)$ в окрестности точки 0 и в окрестности точки 1 отрицательна, а так как $f(0) = f(1) = 0$, $f(\beta)$ имеет внутри (0,1) хоть одну нулевую точку. $f(\beta)$ не может, однако, иметь более одной нулевой точки, ибо тогда $f'(g)$ имела бы в (0,1) по крайней мере 3 нулевые точки, в противоречии с (17). Нулевую точку мы обозначим буквой β_0.

Тогда $f(\beta)$ будет в интервале $(\beta_0, 1)$ положительной. (21)

Из (20) и (21) вытекает следующее заключение: Если $r + s = 1$, т. е. в случае офного предела допуска и $r = 1$ или $s = 1$, последовательный метод всегда менее выгоден, чем простой. В случае же $r + s > 1$, последовательный метод для β близких 1 оказывается более выгодным.

Таблица I.

k \ β	0,8	0,9	0,95
1	0,8	0,9	0,95
2	1,12	1,305	1,45
3	1,291	1,548	1,69
4	1,393	1,712	1,89
5	1,459	1,830	2,04
6	1,502	1,919	2,17
7	1,532	1,987	2,28
8	1,553	2,041	2,35
9	1,568	2,084	2,42
10	1,579	2,119	2,48
11	1,5867	2,147	2,532
12	1,5924	2,171	2,577
13	1,5966	2,190	2,617
14	1,5998	2,207	2,652
15	1,6021	2,220	2,268
16	1,6039	2,232	2,710
17	1,6052	2,242	2,735
18	1,6062	2,250	2,757
19	1,6070	2,257	2,777
20	1,6075	2,264	2,794
22	1,60832	2,2730	2,825
24	1,60877	2,2802	2,851
26	1,60904	2,2856	2,872
28	1,60920	2,2896	2,890
30	1,60929	2,2926	2,905
35	1,609397	2,29740	2,9329
40	1,609426	2,27985	2,9518
45	1,609434	2,30112	2,9647
50	1,609439	2,30180	2,9736

Таблица II.

β \ α	0,8	0,85	0,9	0,95	0,99
0,80	6	7	9	11	17
0,90	14	16	18	24	36
0,95	28	32	38	48	70

ЛИТЕРАТУРА.

[1] *S. S. Wilks:* Determination of sample size for setting tolerance limits. Ann. of math. stat. **12** (1941), 91.

[2] *S. S. Wilks:* Statistical prediction with special reference to the problem of tolerance limits. Ann. of math. stat. **13** (1942), 400.

[3] *H. Scheffé* a *J. Tukey:* Non-parametrical estimation I. Ann. of math. stat. **16** (1945), 187.

Научно-исследовательский институт техники связи им. А. С. Попова.

Summary.

Sequential estimation of distribution-free tolerance limits.

MILOSLAV JIŘINA, Praha.

(Received January 9th, 1952.)

In this paper a method of sequential estimation of distribution-free tolerance limits is described. It is supposed that the distribution function $F(z)$ of the random variable on which the observations are made, is continuous. The sampling procedure is done as follows: Let three integers r, s and k be given such that $r \geqq 0$, $s \geqq 0$, $r + s > 0$, $k > 0$.

1. In the first stage $r + s$ observations are made and the obtained values $z_1, z_2, \ldots, z_{r+s}$ are arranged in the non-descending order $z_{l_1} \leqq z_{l_2} \leqq \ldots \leqq z_{l_{r+s}}$. The values $A^{(1)} = z_{l_r}$ (if $r > 0$) and $B^{(1)} = z_{l_{r+1}}$ (if $s > 0$) are taken as first preliminary limits.

2. After determining the values $A^{(1)}$, $B^{(1)}$ the second stage is carried out by observing succesively the values z_{r+s+i} in the following way:

a) In this stage the observation $z_{r+s+i+1}$ is made only if $1 \leqq i \leqq k - 1$ and if

$$A^{(1)} \leqq z_{r+s+i} \leqq B^{(1)} \text{ (if } rs > 0) \text{ or } A^{(1)} \leqq z_{r+s+i} \text{ (if } s = 0) \text{ or } B^{(1)} \geqq z_{r+s+i} \text{ (if } r = 0). \tag{*}$$

b) If k observations $z_{r+s+1}, \ldots, z_{r+s+k}$ were made such that (*) holds for all $i = 1, 2, \ldots, k$ then the values $A = A^{(1)}$ (if $r > 0$) and $B = B^{(1)}$ (if $s > 0$) are taken as definite tolerance limits and the sampling procedure is stopped.

c) If for some m_1 such that $1 \leqq m_1 \leqq k$ the observations $z_{r+s+1}, \ldots, \ldots, z_{r+s+m_1}$ were made such that (*) holds for $i = 1, 2, \ldots, m_1 - 1$, but $z_{r+s+m_1} < A^{(1)}$ or $z_{r+s+m_1} > B^{(1)}$, then the values $A^{(2)} = z_{r+s+m_1}$ and $B^{(2)} = B^{(1)}$ or $A^{(2)} = A^{(1)}$ and $B^{(2)} = z_{r+s+m_1}$, respectively, are taken as second preliminary limits.

3. If the sampling procedure was not terminated in the second stage, i. e. in the case 2c), the values $A^{(1)}, B^{(1)}$ are replaced by $A^{(2)}, B^{(2)}$ and the third stage is carried out in the same way as the second stage, and so on.

The choice $r = 0$ or $s = 0$ means that we consider only one tolerance limit, upper or lower.

In the paper it is proved that the sampling procedure terminates with probability 1, that the probability $\alpha = P[\int_A^B \mathrm{d}F(z) \geqq \beta]$ is independent of the distribution function $F(z)$ and the formula (12) for α is given. For r, s, α, β, the corresponding k is the least integer such that the inequality (13) holds true. In Table I. the sums $\sum_{m=1}^{k} \frac{\beta^m}{m}$ are tabulated. In Table II. the values of k are tabulated for $r + s = 2$.