Eduard Čech

Проективная дифференциальная геометрия между двумя пространствами. IV

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 2 (1952), No. 2, 149–166

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100041`

ПРОЕКТИВНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРОСТРАНСТВАМИ IV

ЭДУАРД ЧЕХ (Eduard Čech), Прага.

(Поступило в редакцию 15/I 1952 г.)

В первой части мемуара показано, что результаты мемуара III настоящей серии дают исчерпывающее решение проблемы отыскания таких преобразований прямолинейной конгруэнции L, которые каждую линейчатую поверхность R конгруэнции L переводят в линейчатую поверхность, асимптотические линии которой соответствуют асимптотическим же линиям поверхности R.

Во второй части исследуются такие преобразования пространства S_3 в пространство S_3', при которых в S_3 существует прямолинейная конгруэнция L такая, что при подходящем выборе касательных коллинеаций K для каждой точки A прямой p конгруэнции L K-линеаризирующая прямая любой прямой q, выходящей из точки A, зависит только от плоскости pq.

1. Если дано соответствие между двумя n-мерными пространствами S_n, S'_n, то мы знаем (I, § 1), что каждой паре A, B взаимно соответствующих точек можно сопоставить ∞^n способами коллинеацию K между пространствами S_n, S'_n, которую мы назвали *касательной коллинеацией* даннохо соответствия (присвоенной паре A, B) и имеющую то свойство, что если точка пространства S_n опишет кривую Γ, выходящую из точки A, то образ Γ' кривой Γ при данном соответствии и образ $K\Gamma$ той же кривой при коллинеации K имеют в точке B аналитическое касание первого порядка. Далее мы в I, § 9 ввели K-линеаризирующее преобразование, сопоставляющее каждой прямой

$$[A, \omega_1 A_1 + \ldots + \omega_n A_n] \tag{1,1}$$

выходящей из точки A прямую

$$[A, \Omega_1 A_1 + \ldots + \Omega_n A_n] \tag{1,2}$$

также выходящую из точки A, таким образом, что если кривые Γ', $K\Gamma$ спроектировать из некоторой точки, лежащей на образе (1,2) при коллинеации K, то их проекции будут иметь в точке B аналитическое касание второго порядка. При этом

Ω_i $(1 \leqq i \leqq n)$ являются квадратичными формами относительно $\omega_1, \ldots, \omega_n$, определенными в I, (5,15).

В II, § 14 мы видели, что соответствия между двумя пространствами можно классифицировать по алгебраическому характеру K-линеаризирующего преобразования (1,1) $\to$ (1,2). Известно, что соответствие между двумя пространствами (I, § 13) будет коллинейным тогда и только тогда, когда

$$\Omega_i = 2\vartheta\omega_i, \ (1 \leqq i \leqq n);$$

при подходящем выборе K мы получим $\Omega_i = 0$. Вслед за коллинеациями будут с этой точки зрения простейшими те соответствия, у которых при подходящем выборе касательной коллинеации K все формы Ω_i пропорциональны друг другу:

$$\Omega_i = a_i\Omega, \ (1 \leqq i \leqq n), \tag{1,3}$$

где Ω — квадратичная форма относительно $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Через каждую точку A проходит в таком случае (см. II, § 14) тотально K-линеаризирующая прямая

$$[A, a_1A_1 + \ldots + a_nA_n], \tag{1,4}$$

являющаяся образом каждой прямой (1,1) при K-линеаризирующем преобразовании. Мы знаем (II, § 15), что для $n = 2$ *каждое* соответствие будет типа (1,3), причем, как правило, возможен выбор трех различных касательных коллинеаций K. Напротив, для $n \geqq 3$ соответствие будет типа (1,3) самое большее при одном выборе касательной коллинеации K. В II мы доказали, что для $n \geqq 4$ существуют как раз два различных типа соответствий вида (1,3). У первого типа, рассмотренного в II, § 19, все тотально K-линеаризирующие прямые (1,4) проходят через постоянную точку. У второго типа, рассмотренного в II, § 24, пространство S_n распадается на ∞^1 гиперплоскостей, каждая из которых преобразуется при данном соответствии коллинейно.

2. Однако, для $n = 3$ существует еще третий тип соответствий вида (1,3), вполне исследованный нами в III. Мы знаем, что при каждом соответствии этого типа тотально K-линеаризирующие прямые пространства S_3 образуют в этом пространстве конгруэнцию L, образом которой в нашем соответствии является прямолинейня конгруэнция L'. Докажем, что наше соответствие обладает тем свойством, что если R — произвольная линейчатая поверхность, содержащаяся в L и если R' — ее образ, так что R' произвольная линейчатая поверхность содержащаяся в L', то наше соответствие присваивает каждой асимптотической кривой поверхности R асимптотическую

же кривую поверхности R'. На этом основании мы назовем наше соответствие *асимптотическим преобразованием конгруэнции* L в конгруенцию L'. Доказательство легко вытекает из I, § 9. В самом деле, пусть A — произвольная точка поверхности R, а p — проходящая через нее образующая поверхности R, так что p будет тотально K-линеаризирующей прямой в точке A. Пусть далее Γ — асимптотическая кривая поверхностьи R, проходящая через точку A, а t ее касательная в точке A. Пусть наконец B обозначает образ точки A и Γ' — образ кривой Γ; прямая $t' = Kt$ является касательной к кривой Γ в точке B. Касательная плоскость α поверхности R в точке A соединяет прямые p, t; точно так же касательная плоскость β поверхности R' в точке B соединяет прямые $p' = Kp$, t', причем $\beta = K\alpha$. Если Γ — асимптотическая кривая поверхности R, то α будет соприкасающейся плоскостью кривой Γ в точке A и нам нужно доказать, что β будет соприкасающейся плоскостью кривой Γ' в точке B.

Это является непосредственным следствием рассуждений, проведенных в I в конце § 9. В самом деле, так как p является тотально K-линеаризирующей прямой в точке A, то p будет K-линеаризирующей прямой для касательной t и поэтому α будет линеаризирующей плоскостью прямой t, так что согласно I, § 9 $\beta = K\alpha$ представляет соприкасающуюся плоскость кривой Γ' в точке B.

3. Докажем, наоборот, что каждое асимптотическое преобразование прямолинейной конгруенции пространства S_3 в прямолинейную конгруэнцию пространства S_3' относится к типу, рассмотренному в III. Для этого нам придется несколько дополнить конец I, § 9. Рассмотрим произвольное соответствие между S_3 и S_3'. Пусть A — произвольная точка пространства S_3, t — произвольная прямая, проходящая через точку A, α — произвольная плоскость, проходящая через прямую t, причем плоскость α отлична от линеаризирующей плоскости прямой t. Мы видели в I, § 9, что если $\{\Gamma\}$ — система всех кривых пространства S_3, которые проходят через точку A, имеют в ней касательную t и соприкасающуюся плоскость α, далее, если B — образ точки A, $\{\Gamma'\}$ — система образов всех кривых системы $\{\Gamma\}$, то хотя все кривые счстемы $\{\Gamma'\}$ имеют в точке B общую касательную $t' = Kt$, тем не менее они не обладают в этой точке общей соприкасающейся плоскостью. С большей определенностью можно, однако, утверждать следующее: Если Γ_1, Γ_2 — две различные кривые пространства S_3, имеющие в точке A общую касательную t и общую соприкасающуюся плоскость α (причем и теперь α не является линеаризирующей плоскостью прямой

t), но Γ_1, Γ_2 не имеющие в точке A касание второго порядка, то образы их Γ_1', Γ_2', имеющие в точке B' общую касательную t', не могут иметь в этой точке общую соприкасающуюся плоскость. Чтобы доказать это, обозначим через d дифференцирование вдоль кривой Γ_1, через δ — дифференцирование вдоль крибой Γ_2. Так как обе кривые Γ_1, Γ_2 имеют в точке A общую касательную t, то можно без ограничения общности предположить, что в точке A имеет место

$$\omega_1(d) = \omega_1(\delta),\ \omega_2(d) = \omega_2(\delta)\quad \omega_3(d) = \omega_3(\delta),$$

так что для каждой функции точки φ в точке A всегда будет $\mathrm{d}\varphi = \delta\varphi$, но в общем случае $\mathrm{d}^2\varphi \neq \delta^2\varphi$. Соприкасающаяся плоскость кривой Γ_1' в точке B будет согласно I (9,5) иметь вид:

$$[B\,\mathrm{d}B\,\mathrm{d}^2B] = K[A\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}^2A] + [B\,\mathrm{d}B\sum_{i=1}^{3}\Omega_iB_i]_i$$

точно так же соприкасающаяся плоскость кривой Γ_2' в точке B будет

$$[B\,\mathrm{d}B\,\delta^2B] = K[A\,\mathrm{d}A\delta^2A] + [B\,\mathrm{d}B\sum_{i=1}^{3}\Omega_iB_i].$$

Но так как согласно предположению α не является линеаризирующей плоскостью прямой t, т. е. прямой $[A\,\mathrm{d}A]$, плоскости

$$[A\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}^2A],\ [A\,\mathrm{d}A\sum_{i=1}^{3}\Omega_iB_i]$$

а следовательно и плоскости

$$K[A\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}^2A],\ [B\,\mathrm{d}B\sum_{i=1}^{3}\Omega_iB_i]$$

будут линейно независимыми и поэтому плоскости $[B\,\mathrm{d}B\,\mathrm{d}^2B]$, $[B\,\mathrm{d}B\delta^2B]$ могли бы геометрически совпасть только в том случае, если бы имело место

$$K[A\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}^2A] = K[A\,\mathrm{d}A\,\delta^2A]$$

а значит и

$$[A\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}^2A] = [A\,\mathrm{d}A\,\delta^2A].$$

Это означало бы однако, что кривые Γ_1, Γ_2 имеют в точке A касание второго порядка, что противоречит предположению.

Пусть теперь дано такое соответствие между пространствами S_3, S_3', которое является асимптотическим преобразованием прямолинейной конгруэнции L в прямолинейную конгруэнцию L'. Выберем точку A пространства S_3 и обозначим через p прямую конгруэнции L, проходящую через точку A; нужно доказать, что существует касательная коллинеация K^* данного соответствия в точке A такая, что p будет тотально K^*-линеаризирующей прямой в точке A. Выберем сначала произвольную касательную коллинеацию K в точке A и обозначим через B образ точки A, через q образ прямой p, так что q будет прямой конгруэнции L', проходящей через точку B. Через точку A проведем в пространстве S_3 произвольную прямую t (отличную от p) и обозначим буквой α плоскость прямых t, p; далее пусть $t' = Kt$, $\beta = K\alpha$. Пусть Γ_1 — произвольно выбранная кривая пространства S_3, которая проходит через точку A, имеет в ней касательную t и соприкасающуюся плоскость α; пусть Γ_1' — образ кривой Γ_1, так что Γ_1' проходит через точку B и имеет в ней касательную t'. Существует линейчатая поверхность R конгруэнции L, содержащая кривую Γ_1, так что R проходит через точку A и соответствующей образующей является прямая p. Пусть R' — образ линейчатой поверхности R. Пусть Γ_0 обозначает асимптотическую кривую поверхности R в точке A, так что Γ_0, так же как и Γ_1, имеет в точке A касательную t' и соприкасающуюся плоскость α; пусть Γ_0' является образом кривой Γ_0. Так как наше соответствие является асимптотическим преобразованием конгруенции L в конгруэнцию L', то Γ_0' будет асимптотической кривой поверхности R' в точке B. Однако, так как кривые Γ_1, Γ_0 имеют в точке A общую касательную t, их образы Γ_1', Γ_0' будут иметь в точке B общую касательную t'; это значит, что t' — асимптотическая касательная поверхности R' в точке B. Возьмем теперь на поверхности R кривую Γ_2, которая проходит через точку A, имеет в ней касательную t, но не имеет в точке A касание второго порядка с кривой Γ_1. Если Γ_2' образ кривой Γ_2, то Γ_2' имеет в точке B касательную t', а так как t' — асимптотическая касательная поверхности R' в точке B, то, как известно, касательная плоскость β поверхности R' в точке B будет соприкасающейся плоскостью кривой Γ_2' в этой точке. Итак, мы имеем в пространстве S_3 две различные кривые Γ_1, Γ_2, имеющие в точке A общую касательную t и общую соприкасающуюся плоскость α, но не имеющие в точке A касание второго порядка; их образы Γ_1', Γ_2' имеют в точке B не только общую касательную t', но и общую соприкасающуюся плоскость β. Согласно предыдущему из этого вытекает, что плоскость α представляет линеаризирующую плоскость прямой t.

Мы доказали, что если t — произвольная прямая пространства S_3, проходящая через точку A (отличная от прямой p), то линеаризирующей плоскостью прямой t будет плоскость прямых t, p. Если же однако

$$[A, \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3] \tag{3,1}$$

является прямой t, то ее линеаризирующая плоскость соединяет согласно I, § 9 прямую (3,1) с прямой

$$[A, \Omega_1 A_1 + \Omega_2 A_2 + \Omega_3 A_3]. \tag{3,2}$$

Пусть

$$[A, a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3] \tag{3,3}$$

есть прямая p. Тогда прямые (3,1), (3,2), (3,3) будут линейно зависимыми между собой, так что

$$\Omega_i = \vartheta\omega_i + \Omega a_i \text{ для } i = 1, 2, 3,$$

где подразумевается, что ϑ — линейная форма относительно $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, а Ω — квадратичная форма относительно $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Согласно I, § 10 существует касательная коллинеация K^* такая, что K^*-линеаризирующее преобразование имеет вид

$$\omega_i \to \Omega_i^* \text{ для } i = 1, 2, 3,$$

где

$$\Omega_i^* = \Omega_i - \vartheta_i\omega_i,$$

так что

$$\Omega_i^* = a_i\Omega \text{ для } i = 1, 2, 3,$$

т. е. существует тотально K^*-линеаризирующая прямая (3,3), что нам и требовалось доказать.

Итак, мы видим, что в III мы полностью разрешили проблему определения всех возможных асимптотических преобразований прямолинейных конгруэнций. Самый факт существования асимптотических преобразований некоторых прямолинейных конгруэнций является несколько неожиданным и отыскание всех таких преобразований без нашей общей проективной теории соответствий было бы весьма затруднительным. Нам известно (см. III, § 26), что проблема асимптотических преобразований прямолинейных конгруэнций по существу тождественна с классической проблемой Фубини о проективном изгибании поверхностей и я очень сожалею, что мой друг Г. Фубини, который тридцать лет тому назад с таким поощрением принимал идеи неизвестного начинающего математика, которым я тогда был, не дождался опубликования его благодарным учеником стройного и привлекательноко геометрического толкования его проективного изгибания поверхностей, определенного чисто аналитическим путем; это толкование никак не напрашивается само собой.

4. Дальнейшей целью настоящего мемуара является изучение для $n = 3$ того случая, когда квадратичные формы

$$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$$

при подходящем выборе касательной коллинеации и при подходящем выборе репера A, A_1, A_2, A_3 независимы от ω_3, т. е. являются формами от ω_1, ω_2. Назовем прямую $[AA_3]$ *ведущей прямой*; наша задача заключается в отыскании всех таких соответствий между S_3 и S_3', у которых образ прямой

$$[A, \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3] \tag{*}$$

при K-линеаризирующем преобразовании (1,1) $\to$ (1,2) остается без изменения, если менять ω_3, т. е. если прямая (*) описывает пучок с центром A, содержащий ведущую прямую $[AA_3]$. Аналитическое выражение проблемы дают уравнения

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \omega_3} = 0, \ \frac{\partial \Omega_2}{\partial \omega_3} = 0, \ \frac{\partial \Omega_3}{\partial \omega_3} = 0,$$

так что согласно I, § 5, см. в особенности I (5,15), все сводится к интегрированию системы Пфаффа

$$\tau_{01} = \tau_{02} = \tau_{03} = 0, \ \tau_{31} = \tau_{32} = \tau_{33} - \tau_{00} = 0. \tag{4,1}$$

Из уравнений (2,1) получаем внешним дифференцированием

$$\begin{aligned} [\tau_{11} - \tau_{00}\omega_1] + [\tau_{21}\omega_2] &= 0, \\ [\tau_{12}\omega_1] + [\tau_{22} - \tau_{00}\omega_2] &= 0, \\ [\tau_{13}\omega_1] + [\tau_{23}\omega_2] &= 0, \\ [\tau_{30}\omega_1] - [\tau_{11} - \tau_{00}\omega_{31}] - [\tau_{21}\omega_{32}] &= 0, \\ [\tau_{30}\omega_2] - [\tau_{12}\omega_{31}] - [\tau_{22} - \tau_{00}\omega_{32}] &= 0, \\ [\tau_{10}\omega_1] + [\tau_{20}\omega_2] + 2[\tau_{30}\omega_3] - [\tau_{13}\omega_{31}] - [\tau_{23}\omega_{32}] &= 0. \end{aligned} \tag{4,2}$$

Уравнения (4,2) имеют довольно сложный вид. Нас, однако, интересуют только трехмерные решения системы (4,1), для которых $[\omega_1\omega_2\omega_3] \neq 0$. Поэтому является возможным и целесообразным присоединить к уравнениям (4,1) еще уравнения

$$\begin{aligned} \omega_{31} &= \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3, \\ \omega_{32} &= \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \beta_3\omega_3, \end{aligned} \tag{4,3}$$

внешнее дифференцирование которых дает

$$\left.\begin{aligned} &[\mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1(\omega_{00} - \omega_{33}) - \alpha_2\omega_{12} - \alpha_3\omega_{13} + \beta_1\omega_{21} - \omega_{30}\omega_1] + \\ &+ [\mathrm{d}\alpha_2 + \alpha_2(\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}) - (\alpha_1 + \beta_2)\,\omega_{21} - \\ &- \alpha_3\omega_{23}\omega_2] + [d\alpha_3 + \alpha_3(\omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{33}) + \beta_3\omega_{21}\omega_3] - \\ &- (\alpha_1^2 + \alpha_2\beta_1)\,[\omega_1\omega_3] - \alpha_2(\alpha_1 + \beta_2)\,[\omega_2\omega_3] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4,4}$$

$$\left.\begin{aligned} &[\mathrm{d}\beta_1 + \beta_1(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33}) + (\alpha_1 - \beta_2)\,\omega_{12} - \\ &- \beta_3\omega_{13}\omega_1] + [\mathrm{d}\beta_2 + \beta_2(\omega_{00} - \omega_{33}) - \beta_1\omega_{21} - \beta_3\omega_{23} + \\ &+ \alpha_2\omega_{12} - \omega_{30}\omega_2] + [\mathrm{d}\beta_3 + \beta_3(\omega_{00} + \omega_{22} - 2\omega_{33}) + \\ &+ \alpha_3\omega_{12}\omega_3] - \beta_1(\alpha_1 + \beta_2)\,[\omega_1\omega_3] - (\alpha_2\beta_1 + \beta_2^2)\,[\omega_2\omega_3] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4,4'}$$

Уравнения (4,1), (4,2), (4,3) показывают (при обозначениях, введенных в I, § 8), что

$$\begin{gathered}t_{11}-t_{00}=t_{22}-t_{00}=t_{33}-t_{00}=0,\\ t_{31}-t_{32}=t_{12}=t_{21}=t_{13}=t_{23}=t_{10}=t_{20}=t_{30}=0,\\ e_{31}=e_{32}=0,\end{gathered}\tag{4,5}$$

тогда как остальные величины e_{ik} остаются произвольными. Согласно (4,4) и (4,4') имеет место

$$\begin{aligned}\delta\alpha_1&=(e_{33}-e_{00})\,\alpha_1+e_{12}\alpha_2+e_{13}\alpha_3-e_{21}\beta_1+e_{30},\\ \delta\alpha_2&=(e_{22}+e_{33}-e_{00}-e_{11})\,\alpha_2+e_{21}(\alpha_1-\beta_2)+e_{23}\alpha_3,\\ \delta\alpha_3&=(2e_{33}-e_{00}-e_{11})\,\alpha_3-e_{21}\beta_3;\end{aligned}\tag{4,6}$$

$$\begin{aligned}\delta\beta_1&=(e_{11}+e_{33}-e_{00}-e_{22})\,\beta_1+e_{12}(\beta_2-\alpha_1)+e_{13}\beta_3,\\ \delta\beta_2&=(e_{33}-e_{00})\,\beta_2+e_{21}\beta_1+e_{23}\beta_3-e_{12}\alpha_2+e_{30},\\ \delta\beta_3&=(2e_{33}-e_{00}-e_{11})\,\beta_3-e_{12}\alpha_3.\end{aligned}\tag{4,6'}$$

Особое значение имеют уравнения

$$\begin{aligned}\delta\alpha_3&=(2e_{33}-e_{00}-e_{11})\,\alpha_3-e_{21}\beta_3,\\ \delta\beta_3&=(2e_{33}-e_{00}-e_{11})\,\beta_3-e_{12}\alpha_3.\end{aligned}\tag{4,7}$$

Из (4,7) следует, что уравнения

$$\alpha_3=\beta_3=0\tag{4,8}$$

имеют инвариантное значение, геометрический смысл которого нетрудно описать. Ибо для $\omega_1=\omega_2=0$ точка A движется в направлении $[AA_3]$. Если имеет место (4,8), то согласно (4,3) для $\omega_1=\omega_2=0$ будет $\omega_{31}=\omega_{32}=0$, так что для $\omega_1=\omega_2=0$ будет

$$\mathrm{d}A=\omega_{00}A+\omega_{33}A_3,\quad \mathrm{d}A_3=\omega_{30}A+\omega_{33}A_3,$$

т. е. для $\omega_1=\omega_2=0$ ведущая прямая $[AA_3]$ фиксирована и $[AA_3]$ описывает прямолинейную конгруэнцию L. Так как $\tau_{31}=\tau_{32}=0$, будет также

$$\mathrm{d}B=(\omega_{00}+\tau_{00})\,B+\omega_3B_3,\quad \mathrm{d}B_3=(\omega_{30}+\tau_{30})\,B+(\omega_{33}+\tau_{33})B_3,$$

т. е. для $\omega_1=\omega_2=0$ и прямая $[BB_3]$ будет постоянной и описывает конгруэнцию L'. Итак, в предположении (4,8) существует прямолинейная конгруэнция L в пространстве S_3 и прямолинейная конгруэнция L' в пространстве S_3' такие, что наше соответствие отображает каждую прямую конгруэнции L пространства S_3 в определенную прямую конгруэнции L' пространства S_3', причем, если точка A описывает прямую p конгруэнции L, а следовательно и соответствующая точка B соответствующую прямую p' конгруэнции L', то для *любого* положения точки A на прямой p эта прямая будет ведущей прямой соответствия в том смысле, как это было указано в начале этого параграфа. Наоборот, если уравнение (4,8) не имеет места, то для $\omega_1=$

$= \omega_2 = 0$ точка A описывает в пространстве S_3 кривую, не являющуюся прямой. В каждой точке A этой кривой касательная к ней будет ведущей прямой нашего соответствия, но при ∞^3 положениях точки A ведущая прямая $[AA_3]$ принимает в этом случае ∞^3 положений, а не ∞^2 положений, как в случае (2,8).

Отсюда видно, что в случае (2,8) данное соответствие означает преобразование конгруэнции прямых, но с особыми свойствами, с которыми мы познакомимся в последствии.

В дальнейшем мы будем рассматривать только случай (4,8) а случай, когда уравнения (4,8) не имеют места (ведущий к сложным вычислениям, значительную часть которых мы уже произвели), мы оставим пока в стороне.

5. Итак, предположим, что уравнение (4,8) имеет место, т. е. что уравнения (4,3) имеют вид

$$\omega_{31} = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2, \quad \omega_{32} = \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2, \tag{5,1}$$

а поэтому уравнения (4,4) и (4,4') перепишутся в виде

$$\begin{aligned}&[\mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1(\omega_{00} - \omega_{33}) - \alpha_2\omega_{12} + \beta_1\omega_{21} - \omega_{30}\omega_1] +\\ &\quad + [\mathrm{d}\alpha_2 + \alpha_2(\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}) - (\alpha_1 + \beta_2)\,\omega_{21}] -\\ &\quad - (\alpha_1^2 + \alpha_2\beta_1)\,[\omega_1\omega_2] - \alpha_2(\alpha_1 + \beta_2)\,[\omega_2\omega_3] = 0,\end{aligned} \tag{5,2}$$

$$\begin{aligned}&[\mathrm{d}\beta_1 + \beta_1(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33}) + (\alpha_1 - \beta_2)\,\omega_{12}\omega_1] +\\ &\quad + [\mathrm{d}\beta_2 + \beta_2(\omega_{00} - \omega_{22}) - \beta_1\omega_{21} + \alpha_2\omega_{12} - \omega_{30}\omega_2] -\\ &\quad - \beta_1(\alpha_1 + \beta_2)\,[\omega_1\omega_3] - (\alpha_2\beta_1 + \beta_2^2)\,[\omega_2\omega_3] = 0.\end{aligned} \tag{5,2'}$$

Развертывающиеся поверхности конгруэнции L, образованные прямыми $[AA_3]$, можно получить, дифференцируя в таких направлениях, что дифференциал какой либо линейной комбинации $\lambda A + \mu A_3$ (выражающей фокус конгруэнции L) будет линейной комбинацией точек A, A_3. Так как

$$\begin{aligned}\mathrm{d}A &= \omega_{00}A + \omega_1A_1 + \omega_2A_2 + \omega_3A_3,\\ \mathrm{d}A_3 &= \omega_{30}A + \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3,\end{aligned} \tag{5,3}$$

то развертывающиеся конгруэнции L даны уравнением

$$\beta_1\omega_1^2 + (\beta_2 - \alpha_1)\,\omega_1\omega_2 - \alpha_2\omega_2^2 = 0. \tag{5,4}$$

Так как $\tau_{31} = 0$, $\tau_{32} = 0$, (5,4) является ондовременно уравнением развертывающихся поверхностей той конгруэнции L' пространства S_3', которая является образом конгруэнции L пространства S_3.

Так как в рассматриваемом случае имеет место (5,1), мы получаем $[\omega_{31}\omega_1\omega_2] = 0$, $[\omega_{32}\omega_1\omega_2] = 0$. Но первое и второе уравнения (4,2) дадут

$$[\tau_{11} - \tau_{00}\omega_1\omega_2] = [\tau_{21}\omega_1\omega_2] = [\tau_{12}\omega_1\omega_2] = [\tau_{22} - \tau_{00}\omega_1\omega_2] = 0.$$

Учитывая еще четвертое и пятое уравнения (4,2), мы получим $[\tau_{30}\omega_1\omega_2] = 0$. Это означает, что для $\omega_1 = \omega_2 = 0$ будет $\tau_{30} = 0$; кроме того, согласно (4,1) будет $\tau_{31} = 0, \tau_{32} = 0$, $\tau_{33} = \tau_{00}$. Отсюда для $\omega_1 = \omega_2 = 0$ будет

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \omega_{00}A + \omega_3 A_3, & \mathrm{d}B &= (\omega_{00} + \tau_{00}) B + \omega_3 B_3, \\ \mathrm{d}A_3 &= \omega_{30}A + \omega_{33}A_3, & \mathrm{d}B_3 &= \omega_{30}B + (\omega_{33} + \tau_{00}) B_3. \end{aligned}$$

Из этого вытекает, что наше соответствие переводит каждую прямую $[AA_3]$ конгруэнции L в соответствующую прямую $[BB_3]$ конгруэнции L' *проективным* преобразованием π, при котором $\pi A = B$, $\pi A_3 = B_3$.

Мы видели, что развертывающиеся конгруэнции L даны уравнением $\omega_1\omega_{32} - \omega_2\omega_{31} = 0$. Соответствующий фокус будет $\lambda A + \mu A_3$, где $\lambda : \mu$ определится из условия

$$[\mathrm{d}(\lambda A + \mu A_3), A, A_3] = 0$$

которая согласно (5,3) имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda\omega_1 + \mu\omega_{31} &= 0, \\ \lambda\omega_2 + \mu\omega_{32} &= 0. \end{aligned}$$

Так как $\tau_{31} = 0$, $\tau_{32} = 0$, то одновременно и $\lambda B + \mu B_1$ будет фокусом конгруэнции L'. Итак, проективное преобразование π относит фокусу конгруэнции L соответствующий фокус конгруэнции L'.

6. Докажем, что *если конгруэнция L имеет две различные системы развертывающихся поверхностей*, то только что найденные свойства вполне характеризуют соответствие рассматриваемого рода. Итак, пусть в пространстве S_3 дана прямолинейная конгруэнция L с двумя различными системами развертывающихся поверхностей и пусть дано соответствие между пространством S_3 и пространством S_3', которое переводит каждую прямую p конгруэнции L с помощью проективного преобразования π (зависящего от p) в прямую q, описывающую конгруэнцию L' в пространстве S_3'. Далее предположим, что проективное преобразование π переводит фокусы конгруэнции L, лежащие на прямой p в фокусы конгруэнции L', лежащие на прямой q, причем так, что если развертывающаяся конгруэнция L имеет на прямой p точку возврата M, то и соответствующая развертывающаяся конгруэнция L' имеет на прямой q точку возврата πM. Нужно доказать, что надлежащим образом выбранная касательная коллинеация рассматриваемого соотношения имеет свойство, приведенное в начале § 4.

Выберем репер $AA_1A_2A_3$ в пространстве S_3 так, чтобы $[AA_3]$ была прямой p и чтобы точка A_3 на прямой p была гармонически сопряжена с точкой A по отношению к фокусам конгруэнции L, лежащим на прямой p. Оставляя произвольным множитель однородных координат точки A, подчиним множитель однородных координат точки A_3 тому условию, чтобы упомянутые фокусы имели вид $A + A_3$, $A - A_3$. Имеют место следующие уравнения:

$$\mathrm{d}A = \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3,$$
$$\mathrm{d}A_i = \omega_{i0}A + \omega_{i1}A_1 + \omega_{i2}A_2 + \omega_{i3}A_3, \quad i = 1, 2, 3.$$

Точки A_1, A_2 можно подчинить тому условию, чтобы для $\omega_1 = 0$ конгруэнция L содержала развертывающиеся поверхности с фокусом $A + A_3$, а для $\omega_2 = 0$ развертывающиеся поверхности с фокусом $A - A_3$. Это значит, что для $\omega_1 = 0$ будет $[\mathrm{d}(A + A_3), A, A_3] = 0$ а для $\omega_2 = 0$ имеет место $[\mathrm{d}(A - A_3), A, A_3] = 0$, что выражается, очевидно, уравнениями

$$\omega_{31} = \omega_1, \ \omega_{32} = -\omega_2. \tag{6,1}$$

Репер $BB_1B_2B_3$ подчиним совершенно аналогичным условиям, так что

$$\mathrm{d}B = (\omega_{00} + \tau_{00})\,B + (\omega_1 + \tau_{01})\,B_1 + (\omega_2 + \tau_{02})\,B_2 + + (\omega_3 + \tau_{03})\,B_3,$$

$$\mathrm{d}B_i = (\omega_{i0} + \tau_{i0})\,B + (\omega_{i1} + \tau_{i1})\,B_1 + (\omega_{i2} + \tau_{i2})\,B_2 + + (\omega_{i3} + \tau_{i3})\,B_3, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\omega_{31} + \tau_{31} = \omega_1 + \tau_{01}, \ \omega_{32} + \tau_{32} = -\omega_2 - \tau_{02}. \tag{6,2}$$

Репер $AA_1A_2A_3$ мы фиксируем произвольным образом так, чтобы он удовлетворял указанным условиям; что касается однако репера $BB_1B_2B_3$, нужно принять во внимание, что если он выплоняет наложенные на него условия, то те же условия выполняются и репером $BB_1'B_2'B_3$, где

$$B_1' = aB_1 + a_0B + a_3B_3,$$
$$B_2' = bB_2 + b_0B + b_3B_3,$$

причем коэффициенты a, a_0, a_3, b, b_0, b_3 подчиняются лишь условиям $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Так как развертывающиеся поверхности $\omega_1 = 0$ конгруэнции L соответствуют развертывающимся $\omega_1 + \tau_{01} = 0$ конгруэнции L', а развертывающиеся $\omega_2 = 0$ конгруэнции L соответствуют развертывающимся $\omega_2 + \tau_{02} = 0$ конгруэнции L', то должно быть

$$\tau_{01} = \lambda_1\omega_1, \ \tau_{02} = \lambda_2\omega_2. \tag{6,3}$$

Допустимая замена $B_1 \to aB_1$, $B_2 \to bB_2$ позволяет дать уравнениям (6,3) простой вид

$$\tau_{01} = 0, \ \tau_{02} = 0. \tag{6,4}$$

Проективное соотношение π между прямыми $[AA_3]$, $[BB_3]$, которое по нашему предположению возникает для $\omega_1 = \omega_2 = 0$, переводит A в B, $A + A_3$ в $B + B_3$, $A - A_3$ в $B - B_3$ и имеет поэтому вид

$$\pi A = B, \ \pi A_3 = B_3. \tag{6,5}$$

Для $\omega_1 = \omega_2 = 0$ будет однако

$$\mathrm{d}A = \omega_{00}A + \omega_3 A_3, \quad \mathrm{d}B = (\omega_{00} + \tau_{00})A + (\omega_3 + \tau_{03})B,$$
$$\mathrm{d}A_3 = \omega_{30}A + \omega_{33}A_3; \ \mathrm{d}B_3 = (\omega_{30} + \tau_{30})A + (\omega_{33} + \tau_{33})\,B.$$

Так как соотношение (6,5) является для $\omega_1 = \omega_2 = 0$ проективным, должно иметь место

$$\tau_{03} \equiv 0 \bmod(\omega_1, \omega_2), \tag{6,6}$$

$$\tau_{33} - \tau_{00} \equiv 0 \bmod(\omega_1, \omega_2), \tag{6,7}$$

$$\tau_{30} \equiv 0 \bmod(\omega_1, \omega_2).$$

Допустимая замена $B_1 \to B_1 + a_0 B + a_3 B_3$, $B_2 \to B_2 + b_0 B + b_3 B_3$ позволит дать уравнениям (6,6) и (6,7) простой вид

$$\tau_{03} = 0, \tag{6,8}$$

$$\tau_{33} - \tau_{00} = 0. \tag{6,9}$$

Уравнения (6,4) и (6,8) показывают, что если

$$KA = B, \ KA_1 = B_1, \ KA_2 = B_2, \ KA_3 = B_3,$$

то K будет касательной коллинеацией нашего соответствия. Согласно (6,1), (6,2) и (6,4) будет однако

$$\tau_{31} = 0, \ \tau_{32} = 0. \tag{6,10}$$

В силу (6,4), (6,8), (6,9) и (6,10) имеет место (4,1), чем и завершается доказательство.

7. Более сложным является случай, когда совпадают обе системы развертывающихся поверхностей конгруэнции L, а следовательно и конгруэнции L'. Репер $AA_1A_2A_3$ можно специализировать так, чтобы развертывающиеся поверхности конгруэнции L определялись уравнением $\omega_1 = 0$ и чтобы фокус был в точке A_3. В таком случае уравнения (5,1) примут простой вид $\omega_{31} = 0$, $\omega_{32} = \beta\omega_1$, где $\beta \neq 0$. Кроме того можно еще ввести βA_2 вместо A_2, другими словами, можно допустить, что $\beta = 1$. Наша проблема выразится тогда системой Пфаффа

$$\tau_{01} = \tau_{02} = \tau_{03} = 0; \ \tau_{31} = \tau_{32} = \tau_{33} - \tau_{00} = 0; \tag{7,1}$$
$$\omega_{31} = 0, \ \omega_{32} = \omega_1.$$

Внешнее дифференцирование уравнений (7,1) дает

$$
\begin{aligned}
[\tau_{11} - \tau_{00}\omega_1] + [\tau_{21}\omega_2] &= 0,\\
[\tau_{12}\omega_1] + [\tau_{22} - \tau_{00}\omega_2] &= 0,\\
[\tau_{13}\omega_1] + [\tau_{23}\omega_2] &= 0,\\
[\tau_{30} - \tau_{21}\omega_1] &= 0,\\
[\tau_{22} - \tau_{00}\omega_1] - [\tau_{30}\omega_2] &= 0,\\
[\tau_{10} - \tau_{23}\omega_1] + [\tau_{20}\omega_2] + 2[\tau_{30}\omega_3] &= 0,\\
[\omega_{30} - \omega_{21}\omega_1] &= 0,\\
-[\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33}\omega_1] + [\omega_{30} + \omega_{21}\omega_2] &= 0.
\end{aligned}
\tag{7,2}
$$

Из уравнений (7,2) вытекает, что система (7,1) находится в инволюции и что ее решение зависит от четырех функций двух переменных. В общем случае точки A_3, B_3 описывают неразвертывающиеся *поверхности* (A_3), (B_3); случай, когда одна (или обе) из поверхностей (A_3), (B_3) сводится к кривой, мы разберем в § 8. Между поверхностями (A_3), (B_3) имеется такое соответствие, что некоторой (как правило, только одной) системе асимптотических кривых поверхности (A_3) отвечает также система асимптотических кривых поверхности (B_3). Касательные этих асимптотических линий образуют в пространстве S_3 конгруэнцию L, в пространстве S_3' конгруэнцию L'. В рассматриваемом соответствии между пространствами S_3, S_3' прямой p конгруэнции L, выходящей из точки A_3 поверхности (A_3) соответствует прямая q конгруэнции L', выходящая из соответствующей точки B_3 поверхности (B_3). Между прямыми p, q имеется проективное соотношение π, подчиненное условию $\pi A_3 = B_3$. Но π должно подчиняться еще одному условию, ибо в противном случае наше соответствие зависело бы от пяти функций двух переменных.

Чтобы иметь возможность выразить упомянутое условие в геометрическом виде, нам придется вспомнить два известных понятия. Пусть даны прежде всего две кривые C', C^*, имеющие общую точку B и в ней общую касательную t, так же как и общую соприкасающуюся плоскость ϱ. Тогда существует (см. например G. Fubini и E. Čech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces,, стр. 32) проективный инвариант касания $j = j(B; C', C^*)$, который можно аналитически выразить хотя бы следующим образом. Пусть $B'(t)$, $B^*(t)$ — такие параметрические выражения кривых C', C^*, что для $t = 0$ имеет место

$$B' = B^* = B;\ \mathrm{d}B' = \mathrm{d}B^* + \vartheta B,$$

где значение ϑ не играет роли; в таком случае инвариант j определяется соотношением (справедливым для $t = 0$)

$$[B, \mathrm{d}B', \mathrm{d}^2B' - j\,.\,\mathrm{d}^2B^*] = 0. \tag{7,3}$$

Кроме инварианта j нам нужен еще один, а именно, простой и известный проективный инвариант i, которым часто пользуются в проективной дифференциальной геометрии. Пусть дано проективное преобразование φ прямой p с неподвижной точкой B. Выберем на p точку $C \neq B$ и рассмотрим предел (X обозначает точку прямой p, а скобка — двойное отношение)

$$\lim_{X \to B} (B, C, \varphi X, X).$$

Этот предел $i = i(B; \varphi)$, независимый от выбора точки C, и будет искомым инбариантом i. Если $\varphi B = B$, $\varphi C = uB + vC$, то $i = v$.

Возвратимся к рассматриваемому соответствию между пространствами S_3, S_3', которое дано решением системы Пфаффа (7,1). Из второго и пятого уравнений (7,2) вытекает $[\tau_{30}\omega_1\omega_2] = 0$; из последних двух уравнений (7,2) вытекает $[\omega_{30}\omega_1\omega_2] = 0$. Поэтому можно положить

$$\begin{aligned} \omega_{30} &= f_1\omega_1 + f_2\omega_2, \\ \tau_{30} &= g_1\omega_1 + g_2\omega_2. \end{aligned} \tag{7,3}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A_3 &= (f_1\omega_1 + f_2\omega_2)\, A + \omega_1 A_2 + \omega_{33} A_3, \\ \mathrm{d}B_3 &= (f_1 + g_1\omega_1 + f_2 + g_2\omega_2)\, B + \omega_1 B_2 + (\omega_{33} + \tau_{33})\, B_3. \end{aligned} \tag{7,4}$$

Так как по предположению (A_3), (B_3) не вырождаются в кривые, имеет место

$$f_2 \neq 0, \ f_2 + g_2 \neq 0.$$

Из (7,4) вытекает, что для того, чтобы коллинеация T между пространствами S_3 и S_3', при которой $TA_3 = B_3$, осуществила в точке B_3 аналитическое касание первого порядка между поверхностями (B_3) и $T(A_3)$, необходимо и достаточно, чтобы имело место

$$\begin{aligned} TA_3 &= B_3, \\ f_2 \,.\, TA &= (f_2 + g_2)\, B + xB_3, \\ TA_2 + f_1 TA &= B_2 + (f_1 + g_1)\, B + yB_3, \end{aligned} \tag{7,5}$$

причем ни числа x, y ни TA_1 не имеют значения. Выберем такую коллинеацию T и обозначим через φ то проективное преобразование прямой $[BB_3]$, при котором для любой точки X прямой $[AA_3]$ имеет место $\varphi(KX) = TX$. Итак, $\varphi B_3 = B_3$, $f_2 \cdot \varphi B = (f_2 + g_2)\, B + xB_3$, так что

$$i(B_3; \varphi) = \frac{f_2 + g_2}{f_2}. \tag{7,6}$$

С другой стороны, пусть C означает ту асимптотическую линию поверхности (A_3), проходящую через нашу точку A_3, для которой $\omega_1 = 0$ и пусть C' будет образом C при данном соответствии между S_3 и S_3'; C' будет, следовательно, той асимптотической линией поверхности (B_3), проходящей через B_3 (образ рассматриваемой точки A_3), для которой $\omega_1 = 0$. Пусть наконец $C^* = TC$. Вследствие рассматриваемого соответствия между S_3 и S_3' возникает соответствие между кривыми C' и C^*, при котором точка B_3 является своим собственным образом. Кроме того, при дифференцировании вдоль C' имеет место

$$\begin{aligned} dB_3 &= (f_2 + g_2)\,\omega_2 B + (\omega_{33} + \tau_{33})\,B_3, \\ d^2B_3 &= (f_2 + g_2)\,\omega_2^2 B_2 + (.)\,B + (.)\,B_3; \end{aligned}$$

дифференцируя же вдоль C^*, получим

$$\begin{aligned} dB_3 &= (f_2 + g_2)\,\omega_2 B + (\omega_{33} + x\omega_2)\,B_3, \\ d^2B_3 &= f_2\omega_2^2 B_2 + (.)\,B + (.)\,B_3. \end{aligned}$$

Отсюда, вытекает

$$j(B_3, C', C^*) = \frac{f_2 + g_2}{f_2}.$$

т. е.

$$j(B_3; C', C^*) = i(B_3; \varphi). \tag{7,7}$$

(7,7) представляет искомое условие для проективного преобразования π. Предоставляем читателю доказательство (вполне аналогичное примененному в § 6) следующего утверждения: если выполнено условие (7,7), очевидно независимое от выбора коллинеации T, то наше соответствие между S_3 и S_3' действительно имеет свойство, которое от него требовалось в § 4.

8. До сих пор мы ограничивались тем случаем, когда точки A_3, B_3 описывали *поверхности* (A_3), (B_3). Может, однако, случиться, что одна или другая из этих поверхностей (A_3),(B_3) дегенерирует в *кривую*. Пусть например (A_3) выродится в кривую; условием для этого будет

$$[\omega_{30}\,\omega_1] = 0. \tag{8,1}$$

Внешний дифференциал уравнения (8,1) равен нулю в силу уравнений (7,1), (7,2) и (8,1). Отсюда вытекает, что система (7,1) + (8,1) в инволюции и что ее решение зависит от трех функций двух переменных.

Предыдущие результаты не дают еще возможности полного геометрического описания решения системы (7,1) + (8,1). В общем случае точка B_3 описывает *поверхность* (B_3), очевидно неразвертывающуюся. На этой поверхности имеется система кривых (непрямолинейных) асимптотических, определенных уравнением $\omega_1 = 0$. Каждая из этих асимптотических поставлена по определенному закону в соответствие с некоторой точкой A_3, описывающей круивю (A_3); вполне возможно, что (A_3) будет и прямой. В каждой точке A_3 кривой (A_3) выберем по какому либо закону определенную плоскость $\alpha = [AA_2A_3]$, которая в точке A_3 касается кривой (A_3). Пучок прямых с центром A_3 в плоскости α описывает, если A_3 пробегает кривую (A_3), конгруэнцию L, единственными развертывающимися поверхностями которой являются эти пучки. Отдельные прямые каждого такого пучка присвоены по определенному закону отдельным точкам асимптотической линии $\omega_1 = 0$ на поверхности (B_3), которая согласно предыдущему соответствует центру A_3 этого пучка. Каждой прямой p конгруэнции L поставим в соответствие касательную q той асимптотической линии поверхности (B_3), которая присвоена соответствующей точке A_3, а именно касательную в той точке, которая согласно предыдущему присвоена рассматриваемой прямой p пучка с центром в A_3. Все эти прямые q описывают конгруэнцию L' в пространстве S_3' и наше соответствие присваивает каждой прямой p конгруэнции L соответствующую прямую q конгруэнции L' посредством проективного соотношения π, для которого имеет место $\pi A_3 = B_3$. Однако, соотношение π подчиняется еще одному условию, так как в противном случае наше соответствие между S_3 и S_3' зависело бы от четырех — а не от трех — функций двух переменных. В этом отношении, следовательно, наши рассуждения следовало бы дополнить, чего мы в этом мемуаре не делаем.

Может также случиться, что *обе поверхности* (A_3), (B_3) выродятся в кривые. Тогда нужно к (7,1) присоединить кроме (8,1) еще одно уравнение

$$[\tau_{30}\omega_1] = 0 \tag{8,2}$$

внешним дифференцированием которого мы не получим ничего нового. Система (7,1) + (8,1) + (8,2) в инволюции и ее решение зависит от двух функций двух переменных. Геометрического толкования мы в этом мемуаре не даем.

9. Наконец может случиться, что *каждая* линейчатая поверхность, входящая в конгруэнцию L, развертывается, причем то же можно утверждать и о конгруэнции L'. Тогда L будет совокупностью всех прямых, проходящих через постоянную точку, равно как и L'. Реперы можно выбрать так, чтобы упомянутые постоянные точки были A_3, B_3. Тогда мы получим систему Пфаффа

$$\begin{aligned} &\tau_{01} = \tau_{02} = \tau_{03} = 0; \ \tau_{31} = \tau_{32} = \tau_{33} - \tau_{00} = 0; \\ &\omega_{31} = \omega_{32} = 0; \qquad \omega_{30} = \tau_{30} = 0. \end{aligned} \tag{9,1}$$

Внешнее дифференцирование уравнений (9,1) дает

$$[\tau_{11} - \tau_{00}\omega_1] + [\tau_{21}\omega_2] = 0, \ [\tau_{12}\omega_1] + [\tau_{22} - \tau_{00}\omega_2] = 0, \quad (9,2)$$
$$[\tau_{13}\omega_1] + [\tau_{23}\omega_2] = 0, \qquad [\tau_{10}\omega_1] + [\tau_{20}\omega_2] = 0.$$

Система (9,1), следовательно, в инволюции и решение ее зависит от четырех функций двух переменных. Рассматриваемые соответствия имеют следующий вид. Каждой прямой $[AA_3]$, проходящей через постоянную точку A_3, по совершенно произвольному закону присвоена прямая, проходящая через постоянную точку B_3. Отдельные точки прямой $[BB_3]$ проективно связаны с точками соответствующей прямой $[AA_3]$, причем это проективное преобразование связано только одним условием, а именно, что образом точки A_3 является точка B_3.

Résumé.

Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces IV.

Ce Mémoire se décompose en deux parties bien différentes l'une de l'autre. Aux n^{os} 1—3 on démontre que les correspondances entre S_3 et S_3' considérées au Mémoire III de cette série coincident avec les correspondances jouissantes de la propriété suivante: Il existe une congruence de droites L dans S_3 et une congruence de droites L' dans S_3 telles que, R étant une surface réglée arbitraire contenue dans L, son image R' dans S_3' soit une surface réglée contenue dans L' telle que l'image d'une courbe asymptotique quelconque de R soit une courbe asymptotique de R'. Aux n^{os} 4—9, on considère une autre espèce de correspondances entre S_3 et S_3' qui jouissent de la propriété qu'une certaine congruence de droites L contenue dans S_3 soit transformée dans une congruence de droites L' contenue dans S_3'. La particularité envisagée s'énonce comme il suit. Pour chaque point A de S_3, il existe une homographie tangente K de la correspondance donnée telle que, pour chaque droite q issue de A, la droite K-linéarisante de q ne dépende que du plan pq, où p est la droite de la congruence L qui contient le point donné A.

Analytiquement, il s'agit du cas où, dans la transformation K-linéarisante $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 \rightarrow \Omega_1 : \Omega_2 : \Omega_3$, les formes quadratiques Ω_1, Ω_2, Ω_3 ne dépendent que de ω_1, ω_2, si $\omega_1 = \omega_2 = 0$ est la droite p.

On prouve que la correspondance envisagée transforme chaque droite p de la congruence L dans la droite correspondante de L' par une projectivité π (dépendante de p) qui porte chaque foyer de L contenu dans p dans le foyer correspondant de L'. On démontre que la propriété énoncée suffit à caractériser les correspondances envisagées si les deux

familles de développables de L sont distinctes l'une de l'autre. Le cas où la congruence L ne possède qu'une seule famille de développables est bien plus compliqué, la propriété énoncée plus haut n'étant ici plus suffisante; néanmoins, l'auteur réussit ici encore de donner une caractérisation géometrique complète de toutes les correspondances considérées. Malheureusement, ce qui a été dit jusqu'à présent n'est pas vrai que si aucune surface focale de L ne dégénère pas dans une courbe; dans ce cas exceptionnel, le Mémoire ne contient pas des résultats définitifs.