Zbyněk Nádeník

Кривые Бертрана в пятимерном пространстве

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 2 (1952), No. 1, 57–87

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100035`

КРИВЫЕ БЕРТРАНА В ПЯТИМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ЗБЫНЕК НАДЕНИК (Zbyněk Nádeník), Прага.

(Поступило в редакцию 24/VII 1951 г.)

В настоящей работе изучаются в пятимерном пространстве кривые, являющиеся своего рода обобщением кривых Бертрана, известных из трехмерного пространства; их называют также кривыми Бертрана. Найдены условия для кривизны данной кривой, необходимые и достаточные для того, чтобы она была кривой Бертрана.

I. Введение.

Пусть будет R_5 пятимерное евклидово пространство с прямоугольными декартовыми координатами. Назовем радиус-вектором $\mathbf{x}$ вектор с началом в точке $(0, \ldots, 0)$ и концом в точке $(x_1, \ldots, x_5)$.

Пусть будут $\mathbf{r}$ и, соответственно, $'\mathbf{r}$ радиус-векторы двух кривых с дугами s и, соответственно, $'s$, т. е.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) \quad \text{и} \quad '\mathbf{r} = {'\mathbf{r}}('s). \tag{1,1}$$

Обозначим через k_l и, соответственно, $'k_l$ $(l = 1, \ldots, 4)$ их кривизны а через $\mathbf{t}_i$ и, соответственно, $'\mathbf{t}_i$ $(i = 1, \ldots, 5)$ единичные векторы по направлению касательной и четырех нормалей кривых (1,1).

Предположим, что кривые (1,1) *являются действительными разными и остановимся только на тех интервалах параметров* s, $'s$, *в которых кривизны* k_l, *а также и* $'k_l$ *не являются все постоянными и в которых*

$$k_1k_2k_3k_4{'k_1}{'k_2}{'k_3}{'k_4} \neq 0.$$

При этих условиях мы будем решать следующую проблему:

Проблема. *При каких условиях существуют пары кривых* (1,1) *в таком взаимно-однозначном соответствии*

$$'s = f(s), \tag{1,2}$$

что пара их пентаэдров Френе в соответствующих точках об-

разует инвариантный объект относительно группы евклидовых движений?

Определение (1,1). *Каждую кривую из пары* (1,1), *которая является решением упомянутой проблемы, назовем кривой Бертрана* (в пятимерном пространстве). *Кривую* $'\mathbf{r} = {}'\mathbf{r}('s)$ *назовем сопряженной по отношению к кривой* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *и наоборот.*

Теорема (1,1). *Если* (1,1) *сопряженные кривые Бертрана, то существуют постоянные* μ_i, a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, *и функции* $\varphi_i = \varphi_i(s) \neq 0$ $(i = 1, \ldots, 5)$ *такие, что*

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \sum_{i=1}^{5} \mu_i \mathbf{t}_i, \tag{1,3}$$

$$\lambda_1 {}'\mathbf{t}_1 = \sum_{i=1}^{5} a_i \mathbf{t}_i, \ \lambda_1^2 = \sum_{i=1}^{5} a_i^2; \ \text{cycl.}, \qquad (1,4_1—4_5)$$

$$a_1\varphi_1 = 1 - \mu_2 k_1, \ a_h\varphi_1 = \mu_{h-1}k_{h-1} - \mu_{h+1}k_h, \ a_5\varphi_1 = \mu_4 k_4; \qquad (1,5_1—5_5)$$

$$b_1\varphi_2 = -a_2k_1, \ b_h\varphi_2 = a_{h-1}k_{h-1} - a_{h+1}k_h, \ b_5\varphi_2 = a_4k_4; \qquad (1,6_1—6_5)$$

$$\left.\begin{aligned} c_1\varphi_3 = -b_2k_1 + a_1\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\varphi_2, \ c_h\varphi_3 = b_{h-1}k_{h-1} - b_{h+1}k_h + \\ + a_h\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\varphi_2, \ c_5\varphi_3 = b_4k_4 + a_5\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\varphi_2; \end{aligned}\right\} \qquad (1,7_1—7_5)$$

$$\left.\begin{aligned} d_1\varphi_4 = -c_2k_1 + b_1\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\varphi_3, \ d_h\varphi_4 = c_{h-1}k_{h-1} - c_{h+1}k_h + \\ + b_h\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\varphi_3, \ d_5\varphi_4 = c_4k_4 + b_5\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\varphi_3; \end{aligned}\right\} \qquad (1,8_1—8_5)$$

$$\left.\begin{aligned} e_1\varphi_5 = -d_2k_1 + c_1\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\varphi_4, \ e_h\varphi_5 = d_{h-1}k_{h-1} - d_{h+1}k_h + \\ + c_h\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\varphi_4, \ e_5\varphi_5 = d_4k_4 + c_5\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\varphi_4; \end{aligned}\right\} \qquad (1,9_1—9_5)$$

$$h = 2, 3, 4,$$

Соответствие (1,2) *имеет вид*

$$'s = \lambda_1 \int \varphi_1 \, \mathrm{d}s \tag{1,10}$$

и кривизны кривой $'\mathbf{r} = {}'\mathbf{r}('s)$ *суть*

$$'k_l = \frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_1\lambda_l} \cdot \frac{\varphi_{l+1}}{\varphi_l}; \quad l = 1, \ldots, 4. \tag{1,11}$$

Доказательство. Так как векторы $\mathbf{t}_i$ а также и $'\mathbf{t}_i$ $(i = 1, \ldots, 5)$ являются единичными и перпендикулярными друг к другу, проблема вполне выражается уравнениями (1,3) и

$$'\mathbf{t}_j = \sum_{i=1}^{5} \gamma_{ji}\mathbf{t}_i, \quad j = 1, \ldots, 5, \tag{1,12}$$

где μ_i и γ_{ji} являются постоянными и матрица (γ_{ji}) — ортогональна.

Для кривых (1,1) имеют место формулы Френе

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}_1, \quad \frac{d\mathbf{t}_1}{ds} = k_1\mathbf{t}_2, \quad \frac{d\mathbf{t}_h}{ds} = -k_{h-1}\mathbf{t}_{h-1} + k_h\mathbf{t}_{h+1}, \quad \frac{d\mathbf{t}_5}{ds} = -k_4\mathbf{t}_4; \tag{1,13}$$

$$\frac{d'\mathbf{r}}{d's} = '\mathbf{t}_1, \quad \frac{d'\mathbf{t}_1}{d's} = 'k_1{}'\mathbf{t}_2, \quad \frac{d'\mathbf{t}_h}{d's} = -'k_{h-1}{}'\mathbf{t}_{h-1} + 'k_h{}'\mathbf{t}_{h+1},$$

$$\frac{d'\mathbf{t}_5}{d's} = -'k_4{}'\mathbf{t}_4; \tag{1,14}$$

$$h = 2, 3, 4.$$

Последовательным дифференцированием уравнений (1,3) и (1,4), пользуясь формулами (1,13) и (1,14) и сравнивая с (1,12) мы получаем формулы, приводимые в теореме.

Замечание 1. Из (1,5)—(1,9) и (1,11) ясно, что когда $k_l = \text{const.}$, тогда также $'k_l = \text{const.}$ $(l = 1, \ldots, 4)$ и проблема тривиальна.

Теорема (1,2).*Если* (1,1) — *сопряженные кривые Бертрана и* $'\mathbf{t}_1 \neq p\mathbf{t}_1$, *где* $p = \text{const.}$, *тогда отношения*

$$k_1 : k_2 : k_3 : k_4 \tag{1,15}$$

не являются постоянными и $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = a_2a_3a_4 = 0$.

Доказательство. Предположение $'\mathbf{t}_1 \neq p\mathbf{t}_1$ является по (1,4) эквивалентным выражению $a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \neq 0$. Из (1,5) легко вытекает, что если отношения (1,15) будут все постоянными, то $k_l = \text{const.}$ $(l = 1, \ldots, 4)$. По той же причине из уравнений $(1,5_2—5_5)$ следует $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = 0$ и из (1,6) $a_2a_3a_4 = 0$.

Теорема (1,3). *Если* (1,1) *сопряженные кривые Бертрана, то или*

I. $a_2 = a_3 = a_4 = 0$, $\mu_1\mu_3\mu_5 \neq 0$, $\mu_2 = \mu_4 = 0$ *или*
II. $a_2 = a_4 = 0$, $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = 0$, $\mu_4 \neq 0$ *или*
III. $a_2 = a_4 = 0$, $\mu_1 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0$, $\mu_2 \neq 0$ *или*
IV. $a_2 = a_4 = 0$, $\mu_1\mu_3\mu_5 \neq 0$, $\mu_2\mu_4 = 0$, $\mu_2^2 + \mu_4^2 \neq 0$ *или*
V. $a_3 = 0$, $a_2a_4 \neq 0$.

Доказательство. По теореме (1,2) достаточно доказать, что при $a_2 \neq 0$, $a_3 = a_4 = 0$ или $a_4 \neq 0$, $a_2 = a_3 = 0$ или $a_2 = 0$, $a_3a_4 \neq 0$ или $a_4 = 0$, $a_2a_3 \neq 0$ отношения (1,5) будут постоянными.

1. $a_2 \neq 0,\ a_3 = a_4 = 0$.

Если $a_5 \neq 0$ то по $(1,5_5)$ и $(1,5_3)$ $\mu_2\mu_4 \neq 0$ и из $(1,6_1)$, $(1,6_3)$, $(1,6_4)$ и $(1,5_3)$ следует, что отношения (1,15) являются постоянными.

Если $a_5 = 0$ то по $(1,5_5)$, $(1,5_3)$ и $(1,5_1)$ $a_1 \neq 0$ и далее по $(1,6_1$—$6_5)$ $b_1b_2b_3 \neq 0$, $b_4 = b_5 = 0$ и $k_1 : k_2 = \text{const}$. Из $(1,7_3$ — $7_5)$ находим $c_3c_4 \neq 0$, $c_5 = 0$ и $k_2 : k_3 = \text{const}.$; наконец, из $(1,8_4)$ и $(1,8_5)$ следует, что $k_3 : k_4 = \text{const}$.

2. $a_4 \neq 0,\ a_2 = a_3 = 0$.

Пусть $a_1 \neq 0$. Из $(1,6_1$—$6_3)$ и $(1,6_5)$ следует, что $b_2b_3b_5 \neq 0$, $b_1 = 0$ и $k_1 : k_3 = \text{const}.$, $k_1 : k_4 = \text{const}$. По $(1,5_3)$ и $(1,5_5)$ потом будет $a_5 = 0$, так как иначе бы также $k_2 : k_3 = \text{const}.$, и из $(1,6_4)$ получается $b_4 = 0$. Согласно $(1,7_1)$, $(1,7_2)$, $(1,7_4)$ и $(1,7_5)$ будет

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_3} = l_1c_1 = l_4c_4 = l_5c_5, \tag{1,16}$$

где l_1, l_4, l_5 являются постоянными величинами, и $c_2 \neq 0$. Если бы $c_1^2 + c_4^2 + c_5^2 \neq 0$, то из $(1,7_2)$, (1,16) и $(1,6_3)$ следовало бы что также $k_2 : k_3 = \text{const}$. Следовательно $c_1 = c_4 = c_5 = 0$. Но тогда из $(1,8_1)$, $(1,8_5)$ и $(1,7_2)$ следует $k_1 : k_2 = \text{const}$.

Пусть $a_1 = 0$. По $(1,6_1$—$6_3)$ и $(1,6_5)$ будет $b_3 \neq 0$, $b_1 = b_2 = 0$, и $k_3 : k_4 = \text{const}.$; по $(1,5_1)$, $(1,5_3)$, $(1,5_5)$ и $(1,6_4)$ будет $b_4 \neq 0$. Из $(1,7_1$—$7_3)$ следует $c_2c_3 \neq 0$, $c_1 = 0$ и $k_2 : k_3 = \text{const}.$ и потому согласно $(1,8_1)$ и $(1,8_2)$ имеем $k_1 : k_2 = \text{const}$.

3. $a_2 = 0,\ a_3a_4 \neq 0$. По $(1,6_1)$, $(1,6_3)$ и $(1,6_5)$ будет $b_3b_5 \neq 0$, $b_1 = 0$ и $k_3 : k_4 = \text{const}$.

Предположим, что $\mu_2 \neq 0$. Из $(1,5_3)$ и $(1,5_4)$ следует, что $k_2 : k_3 = \text{const}.$ и потом из $(1,6_2)$ и $(1,6_3)$ $a_1 = 0$, так как при $a_1 \neq 0$ было бы также и $k_1 : k_2 = \text{const}$. Следовательно, по $(1,6_2)$ будет $b_2 \neq 0$ и из $(1,7_1)$ и $(1,7_2)$ следует, что $k_1 : k_2 = \text{const}$.

Предположим, что $\mu_2 = 0$, так что по $(1,5_1)$ $a_1 \neq 0$. Если бы $b_2 = 0$, то по $(1,6_3)$, $(1,7_1)$ и $(1,7_2)$ было бы $k_2 : k_3 = \text{const}.$ и тогда из $(1,6_2)$ получим и $k_1 : k_2 = \text{const}$. Следовательно должно быть $b_2 \neq 0$. Из $(1,7_2)$ следует $c_2 \neq 0$. Если бы $c_4 \neq 0$, то из $(1,7_4)$, $(1,6_3)$, $(1,6_5)$ и $(1,7_2)$ следовало бы, что $k_2 : k_3 = \text{const}.$ и тогда из $(1,6_2)$ и $(1,6_3)$ вытекало бы, что $k_1 : k_2 = \text{const}$. Следовательно $c_4 = 0$ и из $(1,8_1)$, $(1,8_5)$, $(1,7_2)$, $(1,6_2)$, $(1,6_3)$ легко получается $k_1 : k_2 = \text{const}.$, $k_2 : k_3 = \text{const}$.

4. $a_4 = 0,\ a_2a_3 \neq 0$. Из $(1,6_1)$ и $(1,6_3)$ следует $b_3 \neq 0$ и $k_1 : k_2 = \text{const}$.

Пусть $a_5 \neq 0$, так что по $(1,5_5)$ также $\mu_4 \neq 0$ и из $(1,5_2)$ и $(1,5_3)$ следует $k_2 : k_3 = \text{const}$. По $(1,6_3)$ и $(1,6_4)$ будет, следовательно, также $k_3 : k_4 = \text{const}$.

Пусть $a_5 = 0$. Тогда из $(1,6_3)$ и $(1,6_4)$ следует $b_4 \neq 0$ и $k_2 : k_3 = \text{const.}$, и из $(1,7_4)$ и $(1,7_5)$ вытекает $k_3 : k_4 = \text{const}$.

Если $a_2 = a_4 = 0$, то мы легко найдем из теоремы (1,2) и соотношений (1,5), что могут встретиться именно только случаи I—IV из теоремы (1,3). Случаем V будут потом по теореме (1,3) исчерпаны все возможности.

Замечание 2. В случаях I—IV будет по (1,6)—(1,9)

$$b_1 = b_3 = b_5 = c_2 = c_4 = d_1 = d_3 = d_5 = e_2 = e_4 = 0.$$

II. Кривые Бертрана в четырехмерном пространстве.

Здесь мы приведем без доказательства результат работы проф. *Е. Чеха*, которая решает проблему в 4-мерном пространстве.

Теорема (2,1а). *Кривая* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *является Бертрановой с сопряженной кривой*

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mu_2 \mathbf{t}_2 + \mu_4 \mathbf{t}_4, \tag{2,1}$$

если ее кривизны k_1, k_2, k_3 *удовлетворяют следующим соотношениям с постоянными коэффициентами* μ_2, μ_4, a, b:

$$\begin{aligned} \mu_2 k_1 - \mu_2 a k_2 + \mu_4 a k_3 &= 1, \\ a k_1 + k_2 - b k_3 &= 0, \\ \mu_2 k_2 - \mu_4 k_3 &\neq 0. \end{aligned}$$

Соотношение между дугами s *и* $'s$ *соответствующих точек кривых* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *и* (2,1) *выражается формулой*:

$$'s = \lambda_1 \int (\mu_4 k_3 - \mu_2 k_2)\, \mathrm{d}s$$

и для кривой (2,1) *будет*

$$\begin{aligned} \lambda_1 '\mathbf{t}_1 &= a\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_3, & \lambda_2 '\mathbf{t}_2 &= b\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_4, \\ \lambda_1 '\mathbf{t}_3 &= \mathbf{t}_1 + a\mathbf{t}_3, & \lambda_2 '\mathbf{t}_4 &= \mathbf{t}_2 + b\mathbf{t}_4; \\ \lambda_1^2 &= a^2 + 1, & \lambda_2^2 &= b^2 + 1; \end{aligned}$$

$$'k_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2} \cdot \frac{k_3}{\mu_4 k_3 - \mu_2 k_2},\ 'k_2 = \frac{a\lambda_2^2 k_3 - b\lambda_1^2 k_1}{\lambda_1^2 \lambda_2 (\mu_4 k_3 - \mu_2 k_2)},\ 'k_3 = \frac{k_1}{\lambda_2(\mu_4 k_3 - \mu_2 k_2)}.$$

Замечание 3. Если мы положим

$$'\mu_2 = \frac{1}{\lambda_2}(\mu_4 - b\mu_2),\ '\mu_4 = -\frac{1}{\lambda_2}(\mu_2 + b\mu_4),$$

$$'a = a,\ 'b = b,\ '\lambda_1 = -\lambda_1,\ '\lambda_2 = -\lambda_2,$$

то соотношения из теоремы (2,1а) останутся в силе, если мы в них заменим величины без штрихов величинами со штрихами и наоборот. Следовательно, соотношение между кривыми $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ и $'\mathbf{r} = '\mathbf{r}('s)$ является симметрическим.

Теорема (2,1б). *Решение из теоремы* (2,1а) *существует тогда и только тогда, если*

а) отношения $\dfrac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s} : \dfrac{\mathrm{d}k_2}{\mathrm{d}s} : \dfrac{\mathrm{d}k_3}{\mathrm{d}s}$ *являются постоянными и* $k_1 : k_3 \neq \text{const.}$, $k_2 : k_3 \neq \text{const.}$ *или*

б) $k_1 = \text{const.}$, $k_2 : k_3 = \text{const.}$

В случае а) кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *имеет только одну сопряженную* (2,1) *и постоянные* μ_2, μ_4, a, b *даются формулами:*[1])

$$\mu_2 = \frac{k_3'}{k_1k_3' - k_1'k_3 + a(k_2k_3' - k_2'k_3)},$$

$$\mu_4 = \frac{1}{a} \cdot \frac{k_1' + ak_2'}{k_1k_3' - k_1'k_3 + a(k_2k_3' - k_2'k_3)},$$

$$a = \frac{k_2k_3' - k_2'k_3}{k_1k_3' - k_1'k_3}, \quad b = -\frac{k_1k_2' - k_1'k_2}{k_1k_3' - k_1'k_3}.$$

В случае б) кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *обладает однопараметрической системой сопряженных кривых (где* μ *является параметром)*

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \frac{1}{k_1}\mathbf{t}_2 + \mu\mathbf{t}_4, \quad \mu \neq \frac{k_2}{k_1k_3}, \tag{2,2}$$

и соответствующими постоянными являются:

$$\mu_2 = \frac{1}{k_1}, \quad \mu_4 = \mu, \quad a = 0, \quad b = \frac{k_2}{k_3}.$$

Теорема (2,2). *Кривая* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *является кривой Бертрана с однопараметрической системой сопряженных кривых (с параметром* $\lambda \neq 0$; *при постоянном* k_1 *также и* $\lambda \neq \dfrac{1}{k_1}$)

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \lambda\left(\mathbf{t}_2 + \frac{k_2}{k_3}\mathbf{t}_4\right), \tag{2,3}$$

если $k_2 : k_3 = \text{const.}$

Тогда

$$'s = \int(1 - \lambda k_1)\,\mathrm{d}s;$$

$$'\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_1, \quad '\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_2, \quad '\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_3, \quad '\mathbf{t}_4 = \mathbf{t}_4;$$

$$'k_1 = \frac{k_1}{1 - \lambda k_1}, \quad 'k_2 = \frac{k_2}{1 - \lambda k_1}, \quad 'k_3 = \frac{k_3}{1 - \lambda k_1}.$$

---

[1]) Полагаем $\dfrac{\mathrm{d}k_r}{\mathrm{d}s} = k_r'$, $r = 1, 2, 3$.

Замечание 4. Если положить $'\lambda = -\lambda$, то формулы из теоремы (2,2) останутся в силе, если в них заменить величины без штриха величинами со штрихом и наоборот.

Замечание 5. Если $k_1 = \text{const.}$, то уравнения (2,2) и (2,3) дают для $\mu = \dfrac{k_2}{k_1 k_3}$ и $\lambda = \dfrac{1}{k_1}$ ту же постоянную точку

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \frac{1}{k_1}\left(\mathbf{t}_2 + \frac{k_2}{k_3}\mathbf{t}_4\right).$$

Теорема (2,3). *Кривыми, кривизны которых удовлетворяют условиям из теорем* (2,1б) *и* (2,2), *исчерпываются все кривые Бертрана в четырехмерном пространстве.*

III. Случай I.: $a_2 = a_3 = a_4 = 0,\ \mu_1\mu_3\mu_5 \neq 0,\ \mu_2 = \mu_4 = 0.$

Теорема (3,1). *Если*

$$k_1 : k_2 = \text{const.},\quad k_3 : k_4 = \text{const.}, \tag{3,1}$$

то кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *является кривой Бертрана с однопараметрической системой сопряженных кривых* ($\lambda \neq 0$ *является параметром*)

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \lambda\left(\frac{k_2}{k_1}\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_3 + \frac{k_3}{k_4}\mathbf{t}_5\right). \tag{3,2}$$

Соответствие (1,2) *определяется уравнением*

$$'s = \lambda_1 s + \text{const};$$

далее имеет место

$$\lambda_i{}'\mathbf{t}_i = \mathbf{t}_i,\ \lambda_i^2 = 1,\ i = 1, \ldots, 5;$$

$$'k_l = \frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_1\lambda_l} k_l,\ l = 1, \ldots, 4. \tag{3,3}$$

Доказательство. Исследуем, когда $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ будет кривой Бертрана с сопряженной кривой $'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mu_1\mathbf{t}_1 + \mu_3\mathbf{t}_3 + \mu_5\mathbf{t}_5$. По (1,5) $a_5 = 0$, $\mu_1 k_1 - \mu_3 k_2 = \mu_3 k_3 - \mu_5 k_4 = 0$, и мы можем положить $a_1 = 1$, $\varphi_1 = 1$. Следовательно должно иметь место (3,1) и $\mu_1 : \mu_3 : \mu_5 = \dfrac{k_2}{k_1} : 1 : \dfrac{k_3}{k_4}$. Из (1,6)—(1,11) легко вытекают последующие формулы теоремы.

Замечание 6. Так как для вектора

$$\mathbf{u} = \frac{k_2}{k_1}\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_3 + \frac{k_3}{k_4}\mathbf{t}_5 \tag{3,4}$$

имеет место по (1,13) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{u} = 0$, то кривые (3,2) возникают из кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ трансляцией в направлении вектора $\boldsymbol{u}$.

IV. Случай II.: $a_2 = a_4 = 0$, $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = 0$, $\mu_4 \neq 0$.

Установим, когда $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ будет кривой Бертрана с сопряженной кривой

$$'\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} + \mu_2\mathbf{t}_2 + \mu_4\mathbf{t}_4, \quad \mu_4 \neq 0. \tag{4,1}$$

Теорема (4,1) (*вспомогательная*). *Пусть будет $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ кривая Бертрана с сопряженной кривой (4,1). Имеем $a_5b_4 \neq 0$; если положим (в целом отделе IV) $a_5 = b_4 = 1$, $b_2 = b$, то*

$$'s = \mu_4\lambda_1\int k_4\,\mathrm{d}s, \tag{4,2}$$

$$'k_1 = \frac{\lambda_2}{\mu_4\lambda_1^2}\cdot\frac{a_3k_3 - k_4}{k_4} \tag{4,3}$$

и далее

$$a_1a_3c + (a_3^2 + 1)\,c_3 = 0 \tag{4,4}$$

или

$$a_1^2\lambda_2^2 - b^2\lambda_1^2 = 0, \tag{4,5}$$

$$\lambda_1^2 = a_1^2 + a_3^2 + 1, \quad \lambda_2^2 = b^2 + 1.$$

Доказательство. По $(1,5_5)$ $a_5 \neq 0$ и из (1,10) следует (4,2). Из $(1,5_1)$, $(1,5_3)$ и $(1,5_5)$ получим

$$\mu_2k_1 + \mu_4a_1k_4 = 1, \tag{4,6}$$

$$-\mu_2k_2 + \mu_4k_3 + \mu_4a_3k_4 = 0. \tag{4,7}$$

Предположим, что $b_4 = 0$, т. е. $a_3k_3 - k_4 = 0$. Тогда будет $a_3b_2 \neq 0$ и по $(1,7_5)$ также $c_5 \neq 0$. Исключением φ_3 из $(1,7_1)$ и $(1,7_5)$ получается

$$c_5b_2\lambda_1^2k_1 = (a_1c_5 - c_1)\,\lambda_2^2\varphi_2; \tag{4,8}$$

следовательно, $a_1c_5 - c_1 \neq 0$. Исключая φ_2 из (4,8) и $(1,6_2)$, получим вместе с (4,7) и $a_3k_3 - k_4 = 0$ систему трех уравнений, однородных по отношению к k_l ($l = 1, \ldots, 4$). Легко определить, что детерминант из коэффициентов при k_2, k_3, k_4 отличается от нуля и, следовательно, отношения (1,15) являются постоянными. Следовательно, согласно теореме (1,2) $b_4 \neq 0$, т. е.

$$a_3k_3 - k_4 \neq 0. \tag{4,9}$$

Из $(1,6_2)$ и $(1,6_4)$ тогда вытекает

$$a_1k_1 - a_3k_2 - a_3bk_3 + bk_4 = 0 \tag{4,10}$$

и из $(1,5_5)$, $(1,6_4)$, (4,9) и (1,11) следует (4,3).

Исключением φ_2 и φ_3 из $(1,6_4)$, $(1,7_1)$ и $(1,7_3)$ получим вместе с (4,7) и (4,10) систему Σ трех уравнений, однородных относительно k_l $(l = 1, \ldots, 4)$. Детерминант из коэффициентов при k_1, k_3, k_4 представится в виде

$$\mu_4(a_1a_3c_1 + \overline{a_3^2 + 1}c_3)\,(a_1^2\lambda_2^2 - b^2\lambda_1^2)$$

и, следовательно, должно иметь место (4,4) или (4,5).

Следствия уравнения (4,4) содержит

Теорема (4,2а). *Кривая* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *является кривой Бертрана с сопряженной кривой* (4,1), *если ее кривизны удовлетворяют соотношениям* (4,9), (4,10) *и*

$$\mu_4bk_1 + \mu_4a_1k_4 = 1, \tag{4,6$_2$}$$

$$-bk_2 + k_3 + a_3k_4 = 0 \tag{4,7$_2$}$$

с постоянными коэффициентами $\mu_4 \neq 0$, a_1, a_3, b.

Соответствие (1,2) *выражается уравнением* (4,2), *и для сопряженной кривой* (4,1) *имеет место*:

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mu_4(b\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_4); \tag{4,1$_2$}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1{'\mathbf{t}_1} &= a_1\mathbf{t}_1 + a_3\mathbf{t}_3 + \mathbf{t}_5 & \lambda_2{'\mathbf{t}_2} &= b\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_4,\\ \lambda_3{'\mathbf{t}_3} &= -(a_3^2+1)\,\mathbf{t}_1 + a_1a_3\mathbf{t}_3 + a_1\mathbf{t}_5, & \lambda_4{'\mathbf{t}_4} &= -\mathbf{t}_2 + b\mathbf{t}_4;\\ \lambda_5{'\mathbf{t}_5} &= -\mathbf{t}_3 + a_3\mathbf{t}_5, \end{aligned}\right\} \tag{4,11$_2$}$$

$$\lambda_1^2 = a_1^2 + a_3^2 + 1,\ \lambda_3^2 = (a_3^2+1)\,\lambda_1^2,\ \lambda_5^2 = a_3^2 + 1,\ \lambda_2^2 = \lambda_4^2 = b^2 + 1;$$

$$\left.\begin{aligned} 'k_1 &= \frac{\lambda_2}{\mu_4\lambda_1^2}\cdot\frac{a_3k_3 - k_4}{k_4}, & 'k_2 &= \frac{\lambda_3}{\mu_4^2\lambda_1^3\lambda_2}\cdot\frac{1}{k_4},\\ 'k_3 &= \frac{\lambda_1}{\mu_4\lambda_3\lambda_4}\cdot\frac{k_1}{k_4}, & 'k_4 &= \frac{\lambda_4}{\mu_4\lambda_1\lambda_5}\cdot\frac{k_2}{k_4}. \end{aligned}\right\} \tag{4,12$_2$}$$

Доказательство. Если $c_1 = 0$, тогда по (4,4) также $c_3 = 0$ и из условия $'\mathbf{t}_1 \,.\, '\mathbf{t}_3 = 0$ следует также $c_5 = 0$. Следовательно, $c_1 \neq 0$ и по $(1,7_1)$ будет $a_1^2 + b^2 = 0$. Если имеет место (4,4), то мы обнаружим, что матрица системы уравнений Σ из доказательства теоремы (4,1) имеет ранг не больше 2 тогда и только тогда, когда

$$\mu_2 - b\mu_4 = 0. \tag{4,13}$$

Из (4,1), (4,6), (4,7) и (4,13) следует $(4,1_2)$, $(4,6_2)$ и $(4,7_2)$. Пользуясь $(4,6_2)$, $(4,7_2)$, (4,10), мы найдем из $(1,7_1)$, $(1,7_3)$, $(1,7_5)$; $(1,8_2)$, $(1,8_4)$; $(1,9_1)$, $(1,9_3)$ и $(1,9_5)$:

$$c_1 = -(a_3^2 + 1),\ c_3 = a_1a_3,\ c_5 = a_1,\ \varphi_3 = \frac{1}{\mu_4\lambda_1^2};$$

$$d_2 = -1, \; d_4 = b, \; \varphi_4 = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_4^2} k_1;$$

$$e_1 = 0, \; e_3 = -1, \; e_5 = a_3, \; \varphi_5 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_5^2} k_2.$$

Из этого и из (1,4) и (1,11) следует ($4{,}11_2$) и ($4{,}12_2$).

Замечание 7. Из ($4{,}1_2$) и ($4{,}11_2$) вытекает наоборот

$$\mathbf{r} = {}'\mathbf{r} + {}'\mu_2 {}'\mathbf{t}_2,$$

где ${}'\mu_2 = -\mu_4\lambda_2 \neq 0$.

В последующем обозначим $\frac{\mathrm{d}k_l}{\mathrm{d}s} = k_l'$ ($l = 1, \ldots, 4$).

Теорема (4,2б). *Решение по теореме* (4,2а) *существует тогда и только тогда, когда*

а) $k_1 \neq \text{const.}$, $k_4 \neq \text{const.}$, *отношения*

$$k_1' : k_2' : k_3' : k_4' \tag{4,14}$$

постоянны, отношения $k_1 : k_2 : k_4$, $k_2 : k_3 : k_4$ *не постоянны и имеет место*

$$-\frac{k_1'}{k_4'} k_1 + \frac{k_3'k_2 - k_3k_2'}{k_4'k_2 - k_4k_2'} k_2 + \frac{(k_3'k_2 - k_3k_2')(k_3'k_4 - k_3k_4')}{(k_4'k_2 - k_4k_2')^2} k_3 + \frac{k_3'k_4 - k_3k_4'}{k_2'k_4 - k_2k_4'} k_4 = 0 \tag{4,15}$$[2]

или

б) $k_1 = \text{const.}$, $k_4 = \text{const.}$, $k_2 : k_3 = \text{const.}$, $k_1^2 \neq k_4^2$ *или*

в) $k_3 = \text{const.}$, $k_4 = \text{const.}$, $k_1 : k_2 = \text{const.}$ *или*

г) $k_1 = \text{const.}$ *и отношения* $k_2 : k_3 : k_4$ *являются постоянными.*

В случае а) или б) или в) существует только одна кривая (4,1), *сопряженная с кривой* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *и соответствующими постоянными* μ_4, a_1, a_3, b *являются:*

$$\left.\begin{aligned} \mu_4 &= \frac{(k_2'k_4 - k_2k_4')\,k_4'}{(k_1k_4' - k_1'k_4)(k_3'k_4 - k_3k_4')}, \quad a_1 = -\frac{k_1'}{k_4'}, \\ a_3 &= -\frac{k_3'k_2 - k_3k_2'}{k_4'k_2 - k_4k_2'}, \quad b = \frac{k_3'k_4 - k_3k_4'}{k_2'k_4 - k_2k_4'}, \end{aligned}\right\} \tag{4,16}$$

соотв.

$$\mu_4 = \frac{k_1k_2}{k_3(k_1^2 - k_4^2)}, \quad a_1 = -\frac{k_3k_4}{k_1k_2}, \quad a_3 = 0, \quad b = \frac{k_3}{k_2}, \tag{4,17}$$

---

[2] Если $k_2 = \text{const.}$ соотв. $k_3 = \text{const.}$ соотв. $k_1{:}k_3 = \text{const.}$, то должны иметь место дальнейшие условия между k_l и k_l' ($l = 1, 2, 3, 4$).

соотв.

$$\mu_4 = -\frac{k_1}{k_2 k_3},\ a_1 = -\frac{k_2 k_3}{k_1 k_4},\ a_3 = -\frac{k_3}{k_4},\ b = 0. \qquad (4,18)$$

В случае г) кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *имеет две сопряженные кривые* (4,1); *постоянная* b *определяется двузначно уравнением*

$$b^2 - \frac{1}{k_2 k_3}(-k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)\, b - 1 = 0; \qquad (4,19)$$

далее имеет

$$\mu_4 = \frac{1}{bk_1},\ a_1 = 0,\ a_3 = \frac{bk_2 - k_3}{k_4}. \qquad (4,20)$$

Доказательство. а) Пусть $k_2 : k_4 \neq \text{const.}$, $k_4 \neq \text{const.}$ Левые стороны уравнений $(4,6_2)$, $(4,7_2)$ и (4,10) являются линейно независимыми и, следовательно отношения (4,14) являются постоянными. Далее, исследуя эти уравнения, найдем, что $k_1 \neq \text{const.}$ и отношения $k_1 : k_2 : k_4, k_2 : k_3 : k_4$ не являются постоянными; ибо в противном случае было бы $k_l = \text{const.}$ $(l = 1, \ldots, 4)$. Неравенство (4,9), следовательно, удовлетворено. Наоборот, потом из $(4,6_2)$, $(4,7_2)$ и из уравнений, полученных из них дифференцированием по s, выведем (4,16). Наконец, уравнения (4,10) и (4,16) в результате дают условие (4,15).

б) Пусть $k_2 : k_4 \neq \text{const.}$, $k_4 = \text{const.}$, $k_3 \neq \text{const.}$ Из $(4,7_2)$ и $(4,6_6)$ следует, что $b \neq 0$ и $k_1 = \text{const.}$ Далее $a_3 = 0$, так как при $a_3 \neq 0$ из $(4,7_2)$ и (4,10) следовало бы, что $k_3 = \text{const.}$ Неравенство (4,9) удовлетворено; согласно $(4,7_2)$ будет $k_2 : k_3 = \text{const.}$ и согласно $(4,6_2)$ и (4,9) $k_1^2 \neq k_4^2$. Наоборот, из $(4,6_2)$, $(4,7_2)$ и (4,10) мы выведем (4,17).

в) Если $k_2 : k_4 \neq \text{const.}$, $k_4 = \text{const.}$, $k_3 = \text{const.}$, то из $(4,6_2)$, $(4,7_2)$ и (4,10) следует сразу же $k_1 : k_2 = \text{const.}$ и (4,18). Следовательно, неравенство (4,9) удовлетворяется.

г) При $k_2 : k_4 = \text{const.}$ будет согласно $(4,7_2)$ также и $k_2 : k_3 = \text{const.}$, $k_3 : k_4 = \text{const.}$ и по теореме (1,2) из (4,9) выводится $a_1 = 0$; следовательно, по (4,6) $k_1 = \text{const.}$ Так как $a_1 = 0$, то из $(4,7_2)$ и (4,10) получается для b уравнение (4,19) с двумя разными действительными корнями. Из $(4,6_2)$ и $(4,7_2)$ получим (4,20) и потом проверим также неравенство (4,9).

Если имеет место (4,5), то

$$b^2 = \frac{a_1^2}{a_3^2 + 1} \qquad (4,21)$$

и, следовательно, или $a_1 b \neq 0$ или $a_1 = b = 0$; этот второй случай мы рассмотрим позже. При $a_1 b \neq 0$ найдем, что матрица системы уравнений Σ из доказательства теоремы (4,1) имеет ранг не больше 2 тогда и только тогда, когда

$$\mu_2 b c_1 + \mu_4 a_1 c_5 = 0. \tag{4,22}$$

Мы различаем еще случаи $a_3 \neq 0$ и $a_3 = 0$. Итак, пусть

$$a_1 a_3 b \neq 0. \tag{4,23}$$

Тогда имеет место

Теорема (4,3а). *Кривая* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *является кривой Бертрана с сопряженной кривой* (4,1), *если ее кривизны удовлетворяют уравнениям* (4,9), (4,10),

$$-ck_1 + bk_4 = \frac{b}{\mu_4 a_1}, \tag{4,6$_3$}$$

$$a_1 c k_2 + b k_3 + a_3 b k_4 = 0, \tag{4,7$_3$}$$

$$a_3^2(b^2 + 1)\, k_1 + e_1 e_3 k_2 \neq 0, \tag{4,24}$$

$$e_1 k_1 - e_3 k_2 \neq 0 \tag{4,25}$$

с постоянными коэффициентами $\mu_4 a_1 a_3 b \neq 0$, c, *связанными уравнением* (4,21), *и*

$$e_1 = (a_3^2 + 1)\, c + a_1, \quad e_3 = -a_3(a_1 c - 1).$$

Соответствие (1,2) *определяется уравнением* (4,2) *и для сопряженной кривой* (4,1) *имеет место*:

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mu_4\left(-\frac{a_1 c}{b}\,\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_4\right); \tag{4,1$_3$}$$

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1{}'\mathbf{t}_1 &= a_1\mathbf{t}_1 + a_3\mathbf{t}_3 + \mathbf{t}_5,\\
\lambda_2{}'\mathbf{t}_2 &= b\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_4\\
\lambda_3{}'\mathbf{t}_3 &= a_3\mathbf{t}_1 - (a_1 + c)\,\mathbf{t}_3 + a_3 c\mathbf{t}_5,\\
\lambda_4{}'\mathbf{t}_4 &= -\mathbf{t}_2 + b\mathbf{t}_4\\
\lambda_5{}'\mathbf{t}_5 &= [(a_3^2 + 1)\, c + a_1]\,\mathbf{t}_1 - a_3(a_1 c - 1)\,\mathbf{t}_3 -\\
&\quad - (a_1 c + a_1^2 + a_3^2)\,\mathbf{t}_5;
\end{aligned}\right\} \tag{4,11$_3$}$$

$$\lambda_1^2 = a_1^2 + a_3^2 + 1, \quad \lambda_3^2 = a_3^2(1 + c^2) + (a_1 + c)^2, \quad \lambda_5^2 = \lambda_1^2\lambda_3^2,$$
$$\lambda_2^2 = \lambda_4^2 = b^2 + 1;$$

$$\left.\begin{aligned}
'k_1 &= \frac{\lambda_2}{\mu_4 b \lambda_1^2}\cdot\frac{a_1 k_1 - a_3 k_2}{k_4}, \quad 'k_2 = -\frac{b\lambda_3}{\mu_4 a_1 \lambda_1 \lambda_2}\cdot\frac{k_2}{k_4},\\
'k_3 &= -\frac{1}{\mu_4 a_3 (a_3^2 + 1)\,\lambda_1\lambda_3\lambda_4}\cdot\frac{a_3^2\lambda_2^2 k_1 + e_1 e_3 k_2}{k_4},\\
'k_4 &= \frac{\lambda_1}{\mu_4 (a_3^2 + 1)\,\lambda_4\lambda_5}\cdot\frac{e_1 k_1 - e_3 k_2}{k_4}.
\end{aligned}\right\} \tag{4,12$_3$}$$

Доказательство. Так как $a_1c_1 + a_3c_3 + a_5c_5 = 0$, то по (4,22) и (4,23) $c_1 \neq 0$, так что мы можем положить $c_1 = a_3$, $c_5 = a_3c$; (4,22) тогда дает

$$\mu_2 : \mu_4 = -a_1c : b. \tag{4,27}$$

Из (4,1), (4,6), (4,7) и (4,27) следует $(4,1_3)$, $(4,6_3)$ и $(4,7_3)$. Применяя $(4,6_3)$, $(4,7_3)$ и (4,10), мы найдем после довольно долгих расчетов

$$c_1 = a_3,\ c_3 = -(a_1 + c),\ c_5 = a_3c,\ \varphi_3 = -\frac{b}{a_1}k_2;$$

$$d_2 = -1, \quad d_4 = b, \quad \varphi_4 = a_3^2\lambda_2^2k_1 + e_1e_3k_2;$$

$$e_1 = (a_3^2 + 1)\,c + a_1,\ e_3 = -a_3(a_1c - 1),\ e_5 = -(a_1c + a_1^2 + a_3^2),$$

$$\varphi_5 = \frac{e_1k_1 - e_3k_2}{(a_3^2 + 1)\,\lambda_3^2}.$$

Из этого так-же, как и раньше мы выведем $(4,11_3)$ и $(4,12_3)$; формула для $'k_1$ следует из (4,3) и (4,10).

Замечание 8. Из $(4,1_3)$ и $(4,11_3)$ следует наоборот

$$\mathbf{r} = {}'\mathbf{r} + {}'\mu_2{}'\mathbf{t}_2 + {}'\mu_4{}'\mathbf{t}_4,$$

$${}'\mu_2 = -\frac{\mu_4e_3}{a_3\lambda_2},\quad {}'\mu_4 = -\frac{\mu_4a_1e_1}{(a_3^2 + 1)\,b\lambda_4}.$$

Теорема (4,3б). *Решение из теоремы* (4,3а) *существует тогда и только тогда, когда отношения* (4,14) *являются постоянными и*

а) $k_1 \neq \text{const.}$, $k_4 \neq \text{const.}$, *отношения* $k_1 : k_2 : k_4, k_2 : k_3 : k_4$ *не являются постоянными и имеет место уравнение* (4,10) *с постоянными* a_1, a_3, b *которые даны в* (4,30) *и* (4,31)[3]) *или*

б) $k_1 \neq \text{const.}$, $k_2 \neq \text{const.}$, $k_3 = \text{const.}$, $k_4 = \text{const.}$, $k_1 : k_2 \neq \neq \text{const.}$ *и*

$$(k_1'k_2 - k_1k_2')^2 = k_2'^2(k_3^2 + k_4^2) \tag{4,28}$$

или

в) $k_1 = \text{const.}, k_2 \neq \text{const.}$, $k_3 \neq \text{const.}$, $k_4 = \text{const.}$, $k_2 : k_3 \neq \text{const.}$ *и*

$$(k_2'k_3 - k_2k_3')^2 = k_2'^2(k_1^2 - k_4^2). \tag{4,29}$$

Во всех трех случаях кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *имеет лишь одну сопряженную кривую* $(4,1_3)$ *и соответственными постоянными* $\mu_4, a_1,\ a_3, b, c,$ *являются:*

---

[3]) См.[2])

$$a_1 = \frac{k_1'}{k_4'} \cdot \frac{k_3k_4' - k_3'k_4}{k_2k_4' - k_2'k_4}, \quad a_3 = \frac{k_2k_3' - k_2'k_3}{k_2k_4' - k_2'k_4}, \tag{4,30}$$

$$b = \varepsilon \frac{a_1}{\sqrt{a_3^2 + 1}} \, (\varepsilon = \pm 1), \quad c = \frac{k_4'}{k_1'} b, \quad \mu_4 = -\frac{k_1'}{a_1(k_1k_4' - k_1'k_4)} \tag{4,31}$$

соотв.

$$\left. \begin{aligned} \mu_4 = -\frac{k_1'}{k_2'k_3}, \quad a_1 = -\frac{k_2'k_3}{k_1'k_4}, \quad a_3 = -\frac{k_3}{k_4}, \\ b = \frac{k_3}{k_1'} \cdot \frac{k_1k_2' - k_1'k_2}{k_3^2 + k_4^2}, \quad c = 0 \end{aligned} \right| \tag{4,32}$$

соотв.

$$\left. \begin{aligned} a_1 = \frac{k_2'k_4}{k_1k_3'} (a_3^2 + 1), \quad a_3 = \frac{k_2k_3' - k_2'k_3}{k_2'k_4}, \quad b = -\frac{k_2'}{k_3'}, \\ c = \frac{1}{a_1}, \quad \mu_4 = \frac{b}{-k_1 + a_1bk_4}. \end{aligned} \right\} \tag{4,33}$$

Доказательство. Левые стороны уравнений ($4,6_3$), ($4,7_3$) и (4,10) являются опять линейно независимыми и, следовательно, отношения (4,14) являются постоянными.

а) Пусть $k_1 \neq \text{const.}$, $k_4 \neq \text{const.}$ Анализируя уравнения ($4,7_3$) и (4,10), найдем, что отношения $k_1 : k_2 : k_4, k_2 : k_3 : k_4$ не являются постоянными. Наоборот, потом из уравнения ($4,7_3$) и из уравнений, возникших из ($4,6_3$) и ($4,7_3$) дифференцированием по s, следует (4,30). Из (4,21) мы потом определим b, и наконец из уравнений ($4,6_3$) и $-ck_1' + bk_4' = 0$ c и μ_4 в (4,31). Неравенства (4,9), (4,24) и (4,25) конечно удовлетворяются и уравнение (4,10) дает последнее упомянутое условие.

б) Пусть $k_1 \neq \text{const.}$, $k_4 = \text{const.}$ По ($4,6_3$), ($4,7_3$), (4,10) и (4,23) будет $k_3 = \text{const.}$, $k_2 \neq \text{const.}$ и $k_1 : k_2 \neq \text{const.}$ Из ($4,6_3$), ($4,7_3$) и (4,10) получим тогда (4,32). Неравенства (4,9), (4,24) и (4,25) удовлетворяются, и соотношение (4,21) приводит к условию (4,28).

в) Пусть $k_1 = \text{const.}$ По ($4,6_3$), ($4,7_3$), (4,10) и (4,21) будет $k_4 = \text{const.}, k_2, k_3 \neq \text{const.}, k_2 : k_3 \neq \text{const.}$ и $e_3 = a_1c - 1 = 0$. Наоборот, при этих условиях мы определим из ($4,6_3$), ($4,7_3$) и (4,10) постоянные в (4,32). Неравенства (4,9), (4,24) и (4,25) опять удовлетворяются и соотношение (4,21) дает (4,29).

Случай $a_1b \neq 0$, $a_3 = 0$, в котором мы положим $a_1 = a$, приводит к

Теореме (4,4). *Кривая* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *является кривой Бертрана с однопараметрической системой сопряженных кривых*

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \frac{k_2}{(ak_2 - \varepsilon k_3)\, k_4}\left(\frac{k_3}{k_2}\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_4\right) \qquad (4,1_4)$$

с параметром $a \neq 0$ *для которого*

$$-\frac{k_2}{k_3} \neq \varepsilon a \neq \frac{k_3}{k_2} \quad (\varepsilon = \pm 1), \qquad (4,34)$$

если

$$k_1 = -\varepsilon k_4 = \text{const.},\ k_2 : k_3 = \text{const.} \qquad (4,35)$$

Соответствие (1,2) *выражается уравнением*

$$'s = \frac{\lambda_1 k_2}{ak_2 - \varepsilon k_3} s + \text{const.} \qquad (4,2_4)$$

и для сопряженных кривых (4,1) *имеет место*

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1{}'\mathbf{t}_1 &= a\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_5, & \lambda_2{}'\mathbf{t}_2 &= \varepsilon a\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_4, & \lambda_3{}'\mathbf{t}_3 &= \mathbf{t}_3, \\ \lambda_5{}'\mathbf{t}_5 &= -\mathbf{t}_1 + a\mathbf{t}_5, & \lambda_4{}'\mathbf{t}_4 &= -\mathbf{t}_2 + \varepsilon a\mathbf{t}_4, & & \end{aligned}\right\} \qquad (4,11_4)$$

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda_4^2 = \lambda_5^2 = a^2 + 1,\ \lambda_3^2 = 1;$$

$$\left.\begin{aligned} 'k_1 &= -\frac{1}{\lambda_2}\cdot\frac{(ak_2 - \varepsilon k_3)\, k_4}{k_2},\quad 'k_2 = \varepsilon\lambda_3\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\cdot\frac{(ak_2 - \varepsilon k_3)^2}{k_2}, \\ 'k_3 &= \varepsilon\lambda_3\frac{1}{\lambda_1\lambda_4}\cdot\frac{(ak_2 - \varepsilon k_3)(ak_3 - \varepsilon k_2)}{k_2}, \\ 'k_4 &= \varepsilon\frac{\lambda_5}{\lambda_1\lambda_4}\cdot\frac{(ak_2 - \varepsilon k_3)\, k_4}{k_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (4,12_4)$$

Доказательство. При $a_3 = 0$ должно быть по (4,21) $b = \varepsilon a$, $\varepsilon = \pm 1$ и уравнение (4,9) конечно удовлетворяется. Уравнения (4,6), (4,7) и (4,10) упрощаются и получают вид

$$\mu_2 k_1 + \mu_4 a k_4 = 1,\ \mu_2 k_2 - \mu_4 k_3 = 0,\ k_1 + \varepsilon k_4 = 0.$$

Эти уравнения удовлетворяются тогда и только тогда, когда имеет место (4,35). Тогда из них следует второе неравенство (4,34) и

$$\mu_2 = \frac{k_3}{(ak_2 - \varepsilon k_3)k_4},\ \mu_4 = \frac{k_2}{(ak_2 - \varepsilon k_3)k_4},\ \mu_2\mu_4 \neq 0. \qquad (4,36)$$

Из (4,1), (4,2) и (4,36) мы получим ($4,1_4$) и ($4,2_4$). Далее мы найдем

$$c_1 = 0, \qquad c_3 = 1,\ c_5 = 0,\ \varphi_3 = \varepsilon(ak_2 - \varepsilon k_3);$$

$$d_2 = -1,\ d_4 = \varepsilon a,\ \varphi_4 = \varepsilon\frac{1}{\lambda_4^2}(ak_3 + \varepsilon k_2);$$

$$e_1 = -1,\ e_3 = 0,\ e_5 = a,\ \varphi_5 = \varepsilon k_4.$$

Из этого известным уже способом мы выведем уравнения ($4,11_4$) и ($4,12_4$); формула для $'k_1$ тогда следует из (4,3).

Замечание 9. Если мы положим

$$\left.\begin{array}{c}'a = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_5} a, \quad '\varepsilon = \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_4\lambda_5}\varepsilon, \\ '\lambda_1 = -\lambda_5, \ '\lambda_2 = -\lambda_4, \ '\lambda_3 = \lambda_3, \ '\lambda_4 = -\lambda_2, \ '\lambda_5 = -\lambda_1, \end{array}\right\} \qquad (4,37)$$

то останутся в силе все соотношения, приведенные в теореме (4,4), если в них заменить величины без штриха величинами со штрихом и наоборот.

Наконец, случай $a_1 = b = 0$ дает

Теорему (4,5). *Кривая* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *является кривой Бертрана с сопряженной кривой*

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \frac{k_2}{k_1k_3}\left(\frac{k_3}{k_2}\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_4\right), \qquad (4,1_5)$$

если

$$k_1 = \text{const. } \textit{и } k_2 : k_3 = \text{const.} \qquad (4,38)$$

Соответствие (1,2) *есть ни что иное, как*

$$'s = \lambda_1 \frac{k_2}{k_1k_3}\int k_4 \, \mathrm{d}s \qquad (4,2_5)$$

и для кривой (4,1_5) *имеет место*:

$$\lambda_1{'}\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_5, \ \lambda_2{'}\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_4, \ \lambda_3{'}\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_3, \ \lambda_4{'}\mathbf{t}_4 = -\mathbf{t}_2, \ \lambda_5{'}\mathbf{t}_5 = -\mathbf{t}_1; \qquad (4,11_5)$$

$$\lambda_i^2 = 1, \ i = 1, \ldots, 5;$$

$$\left.\begin{array}{c}'k_1 = -\lambda_2\dfrac{k_1k_3}{k_2}, \quad 'k_2 = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3\dfrac{k_1k_3^2}{k_2k_4}, \\ 'k_3 = \lambda_1\lambda_3\lambda_4\dfrac{k_1k_3}{k_4}, \quad 'k_4 = -\lambda_1\lambda_4\lambda_5\dfrac{k_1^2k_3}{k_2k_4}. \end{array}\right\} \qquad (4,12_5)$$

Доказательство. При $a_1 = b = 0$ будет по (4,10) также и $a_3 = 0$; соотношение (4,9) конечно удовлетворяется, и уравнения (4,6) и (4,7) упростятся и получат вид $\mu_2k_1 = 1$, $\mu_2k_2 - \mu_4k_3 = 0$. Они удовлетворяются тогда и только тогда, когда имеет место (4,38), и тогда

$$\mu_2 = \frac{1}{k_1}, \quad \mu_4 = \frac{k_2}{k_1k_3}.$$

Из этого и из (4,1) и (4,2) находим (4,1_5) и (4,2_5). Наконец известным уже способом мы установим, что

$$c_1 = 0, \quad c_3 = 1, \quad c_5 = 0, \quad \varphi_3 = -k_3;$$
$$d_2 = -1, \quad d_4 = 0, \quad \varphi_4 = k_2;$$
$$e_1 = -1, \quad e_3 = e_5 = 0, \quad \varphi_5 = -k_1.$$

Замечание 10. При обозначении (4,37) для соотношений из теоремы (4,5) имеет место опять замечание 9.

V. Случай III.: $a_2 = a_4 = 0$, $\mu_1 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0$, $\mu_2 \neq 0$.

Будем изучать, когда $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ будет кривой Бертрана с сопряженной кривой

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mu_2 \mathbf{t}_2. \tag{5,1}$$

Теорема (5,1a). *Кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ является кривой Бертрана с сопряженной кривой (5,1), если ее кривизны удовлетворяют следующим соотношениям с постоянными коэффициентами μ_2, a, b, c:*

$$k_1 + ak_2 = \frac{1}{\mu_2}, \tag{5,2}$$

$$ak_1 - k_2 - bk_3 = 0, \tag{5,3}$$

$$(a^2 + 1)\, bk_1 - a(b^2 + 1)\, k_3 + (a^2 + 1)\, ck_4 = 0, \tag{5,4}$$

$$(a^2 + 1)\, ck_1 + bk_4 \neq 0. \tag{5,5}$$

Соответствие (1,2) имеет вид

$$'s = \mu_2 \lambda_1 \int k_2 \, \mathrm{d}s \tag{5,6}$$

и имеет место:

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1 {}'\mathbf{t}_1 = a\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_3, & \lambda_2 {}'\mathbf{t}_2 = b\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_4, \\ \lambda_3 {}'\mathbf{t}_3 = c\mathbf{t}_1 - ac\mathbf{t}_3 + \mathbf{t}_5, & \lambda_4 {}'\mathbf{t}_4 = -\mathbf{t}_2 + b\mathbf{t}_4; \\ \lambda_5 {}'\mathbf{t}_5 = -\mathbf{t}_1 + a\mathbf{t}_3 + c(a^2 + 1)\, \mathbf{t}_5, & \end{array}\right\} \tag{5,7}$$

$$\lambda_1^2 = a^2 + 1, \; \lambda_3^2 = 1 + c^2\lambda_1^2, \; \lambda_5^2 = \lambda_1^2\lambda_3^2, \; \lambda_2^2 = \lambda_4^2 = b^2 + 1;$$

$$\left.\begin{array}{ll} 'k_1 = \dfrac{\lambda_2}{\mu_2\lambda_1^2} \cdot \dfrac{k_3}{k_2}, & 'k_2 = \dfrac{\lambda_3}{\mu_2\lambda_1\lambda_2} \cdot \dfrac{k_4}{k_2}, \\ 'k_3 = -\dfrac{1}{\mu_2\lambda_1\lambda_3\lambda_4} \cdot \dfrac{c\lambda_1^2 k_1 + bk_4}{k_2}, & 'k_4 = -\dfrac{\lambda_4}{\mu_2^2\lambda_1\lambda_5} \cdot \dfrac{1}{k_2}. \end{array}\right\} \tag{5,8}$$

Доказательство. По $(1,5_5)$ бует $a_5 = 0$ и по $(1,5_3)$, $(1,6_4)$ и $(1,7_5)$ мы можем положить

$$a_3 = b_4 = c_5 = 1; \; a_1 = a, \; b_2 = b, \; c_1 = c;$$
$$\varphi_1 = \mu_2 k_2, \; \varphi_2 = k_3, \; \varphi_3 = k_4. \tag{5,9}$$

Из $(1,5_1)$, $(1,6_2)$, $(1,7_1)$ и (5,9) мы получим (5,2)—(5,4). С помощью этих уравнений мы найдем, что $c_3 = -ac$ и далее

$$d_2 = -1, \; d_4 = b, \; \varphi_4 = -\frac{1}{\lambda_4^2}(c\lambda_1^2 k_1 + bk_4);$$

$$e_1 = -1, \; e_3 = a, \; e_5 = c\lambda_1^2, \; \varphi_5 = -\frac{\lambda_2^2}{\mu_2\lambda_5^2}.$$

Из этого следует в первую очередь (5,5) и из (1,10), (1,4), (1,11) и (5,9), наконец, соотношения (5,6)—(5,8).

Замечание 11. Из (5,1) и (5,7) мы выведем

$$\mathbf{r} = {}'\mathbf{r} + {}'\mu_2{}'\mathbf{t}_2 + {}'\mu_4{}'\mathbf{t}_4,$$

где

$$'\mu_2 = -\frac{b}{\lambda_2}\mu_2, \quad '\mu_4 = \frac{1}{\lambda_4}\mu_2 \neq 0.$$

Теорема (5,1б). *Решение из теоремы* (5,1a) *существует тогда и только тогда, когда*

а) $k_l \neq \text{const.}$ $(l = 1, \ldots, 4)$, *отношения* $k_1 : k_3 : k_4, k_1 : k_2 : k_3$ *не являются постоянными, отношения* (4,14) *являются постоянными и имеет место соотношение* (5,4) *с постоянными* a, b, c, *данными в* (5,10)[4]) *или*

б) $k_1 = \text{const.}$, $k_4 = \text{const.}$, $k_2 : k_3 = \text{const.}$, $k_1^2 \neq k_4^2$ *или*
в) $k_1 = \text{const.}$, $k_2 = \text{const.}$, $k_3 : k_4 = \text{const.}$ *или*
г) $k_1 = \text{const.}$, $k_2 = \text{const.}$, $k_3 = \text{const.}$

Если имеют место условия а) или б) или в), то кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *имеет единственную сопряженную кривую и соответствующие постоянные* μ_2, a, b, c *суть*:

$$\mu_2 = \frac{k_2'}{k_1k_2' - k_1'k_2}, \quad a = -\frac{k_1'}{k_2'}, \quad b = \frac{k_1'}{k_4'} \cdot \frac{k_3k_4' - k_3'k_4}{k_1k_2' - k_1'k_2},$$

$$c = -\frac{k_3'}{k_4'} \cdot \frac{k_1'k_2'}{k_1'^2 + k_2'^2} \qquad (5,10)$$

соотв.

$$\mu_2 = \frac{1}{k_1}, \quad a = 0, \quad b = -\frac{k_2}{k_3}, \quad c = \frac{k_1k_2}{k_3k_4} \qquad (5,11)$$

соотв.

$$\mu_2 = \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2}, \quad a = \frac{k_2}{k_1}, \quad b = 0, \quad c = \frac{k_1k_2k_3}{(k_1^2 + k_2^2)\,k_4}. \qquad (5,12)$$

Наконец, в случае г), кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *имеет две различные сопряженные кривые; постоянная* b *определяется двузначно уравнением*

$$b^2 + \frac{1}{k_2k_3}(k_1^2 + k_2^2 - k_3^2)\,b - 1 = 0 \qquad (5,13)$$

---

4) Если $k_2 : k_4 = \text{const.}$, то должны иметь место дальнейшие условия между k_l и k_l' $(l = 1, 2, 3, 4)$.

и далее

$$\mu_2 = \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2 + bk_2k_3}, \quad a = \frac{k_2 + bk_3}{k_1}, \quad c = 0. \tag{5,14}$$

Доказательство. а) Пусть $k_1 \neq$ const., $k_1 : k_2 \neq$ const. Левые стороны уравнений (5,2)—(5,4) являются линейно независимыми и, следовательно, отношения (4,14) являются постоянными. Из (5,2 и (5,3) следует, что $ab \neq 0$ и уравнение (5,3) можно заменить уравнением

$$-ak_3 + (a^2 + 1)\,ck_4 = \frac{b}{\mu_2}. \tag{5,3'}$$

Из (5,2)—(5,4) найдем, что k_2, k_3, $k_4 \neq$ const. а также и остальные отношения $k_1 : k_3 : k_4$, $k_1 : k_2 : k_3$ не являются постоянными. Наоборот, из (5,2), (5,3′) и из уравнений, полученных из них дифференцированием по s, мы легко выведем (5,10). Неравенство (5,5) удовлетворяется и уравнение (5,4) в результате дает последнее приведенное условие.

б) Пусть $k_1 =$ const., $k_2 \neq$ const. Из (5,2) следует, что $a = 0$, $\mu_2 = \dfrac{1}{k_1}$, вследствие чего из (5,3) и (5,4) вытекает, что $k_2 : k_3 =$ const., $k_4 =$ const., что приводит к выражениям для b и c в (5,11). Неравенство (5,5) приводит к условию $k_1^2 \neq k_4^2$.

в) Пусть $k_1 =$ const., $k_2 =$ const., $k_3 \neq$ const. По (5,3) будет $b = 0$ и тогда из (5,2)—(5,4) легко следует $k_3 : k_4 =$ const. и (5,12).

г) Пусть k_1, k_2, $k_3 =$ const. Из (5,4) следует, что $c = 0$, так что из (5,3) и (5,4) мы получаем для b уравнение (5,13) (с разными вещественными корнями). Из него и (5,2) и (5,3) следует (5,14).

VI. Случай IV.: $a_2 = a_4 = 0$, $\mu_1\mu_3\mu_5 \neq 0$, $\mu_2\mu_4 = 0$, $\mu_2^2 + \mu_4^2 \neq 0$.

Из ($1,5_2$) и ($1,5_4$) следует

$$k_1 : k_2 = \text{const.}, \quad k_3 : k_4 = \text{const.}, \tag{6,1}$$

$$\mu_1 : \mu_3 : \mu_5 = \frac{k_2}{k_1} : 1 : \frac{k_3}{k_4}. \tag{6,2}$$

Сначала рассмотрим случай $\mu_2 = 0$, $\mu_4 \neq 0$.

Теорема (6,1). *Кривая* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *является кривой Бертрана с однопараметрической системой сопряженных кривых* (*с параметром* $\lambda \neq 0$)

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} - \frac{k_1}{k_2 k_3}\mathbf{t}_4 + \lambda\left(\frac{k_2}{k_1}\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_3 + \frac{k_3}{k_4}\mathbf{t}_5\right), \qquad (6,3)$$

если $k_3 = \text{const.}$, $k_4 = \text{const.}$, $k_1 : k_2 = \text{const.}$

Соответствие (1,2) *определяется уравнением* (4,2) *и для каждой из кривых* (6,3) *имеют место формулы* ($4,11_2$) *и* ($4,12_2$) *с постоянными* μ_4, a_1, a_3, b *данными в* (4,18).

Доказательство. По ($1,5_5$) мы можем положить $a_5 = 1$ и тогда из ($1,5_1$), ($1,5_3$) и ($1,5_5$) следует

$$a_1 k_4 = \frac{1}{\mu_4}, \quad k_3 + a_3 k_4 = 0. \qquad (6,4)$$

Эти уравнения удовлетворяются тогда и только тогда, когда $k_3, k_4 = \text{const.}$ $b_2 \neq 0$, т. е. $a_1 k_1 - a_3 k_2 \neq 0$, невозможно, так как $\mu_1 k_1 - \mu_3 k_2 = 0$; следовательно,

$$a_1 k_1 - a_3 k_2 = 0, \qquad (6,5)$$

т. е. $k_1 : k_2 = \text{const.}$ Положим $b_4 = 1$. Уравнения (6,4) и (6,5) являются уравнениями ($4,6_2$), ($4,7_2$), и (4,10) с $b_2 = b = 0$ и из них следует (4,18).

Если $\mu_2 \neq 0$, $\mu_4 = 0$, то мы получим:

Теорема (6,2). *Кривая* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *является кривой Бертрана с однопараметрической системой сопряженных кривых (с параметром* $\lambda \neq 0$)

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2}\mathbf{t}_2 + \lambda\left(\frac{k_2}{k_1}\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_5 + \frac{k_3}{k_4}\mathbf{t}_5\right), \qquad (6,6)$$

если $k_1 = \text{const.}$, $k_2 = \text{const.}$, $k_3 : k_4 = \text{const.}$

Соответствие (1,2) *выражается уравнением* (5,6), *и для каждой кривой* (6,6) *имеют место уравнения* (5,7) *и* (5,8) *с постоянными* μ_2, a, b, c, *приведенными в* (5,12).

Доказательство. По ($1,5_1$), ($1,5_3$) и ($1,5_5$) мы можем положить $a_3 = 1$, $a_1 = a$ и тогда мы имеем $a_5 = 0$ и

$$k_1 + a k_2 = \frac{1}{\mu_2}. \qquad (6,7)$$

Ввиду $\mu_1 k_1 - \mu_3 k_2 = \mu_3 k_3 - \mu_5 k_4 = 0$ и ($1,6_2$) и ($1,6_4$) должно быть

$$a k_1 - k_2 = 0, \qquad (6,8)$$

т. е. $b_2 = 0$; положим $b_4 = 1$. Наконец из ($1,7_1$) и ($1,7_5$) вытекает, что можно положить $c_5 = 1$, $c_1 = c$ и тогда

$$a k_3 - c(a^2 + 1) k_4 = 0. \qquad (6,9)$$

Уравнения (6,7)—(6,9) являются уравнениями (5,2)—(5,4) с $b_2 = b = 0$. Из этого следует уже утверждение теоремы.

Замечание 12. Кривые (6,3), соотв. (6,6) возникают трансляцией кривой $'\mathbf{r} = \mathbf{r} - \frac{k_1}{k_2 k_3}\mathbf{t}_4$, соотв. $'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2}\mathbf{t}_2$ в направлении вектора (3,4).

VII. Случай V.: $a_2 a_4 \neq 0,\ a_3 = 0$

приводит к

Теореме (7,1). *Кривая* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *является кривой Бертрана с двухпараметрической системой сопряженных кривых (с параметрами* $\mu \neq 0,\ \lambda$*)*

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mu\left(\varepsilon \frac{k_3}{k_2}\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_5\right) + \lambda\left(\frac{k_3}{k_2}\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_4\right),\quad \varepsilon = \pm 1, \tag{7,1}$$

если $k_1 = -\varepsilon k_4 = \text{const.},\ k_2 : k_3 = \text{const.}$

Соответствие (1,2) *имеет вид*

$$'s = -\mu\lambda_1 k_4 s + \text{const.} \tag{7,2}$$

и для кривых системы (7,1) *имеет место*:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1{}'\mathbf{t}_1 &= a_1\mathbf{t}_1 + a_2\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_4 + a_5\mathbf{t}_5,\\
\lambda_2{}'\mathbf{t}_2 &= \varepsilon a_2\mathbf{t}_1 - \varepsilon a_1\mathbf{t}_2 - a_5\mathbf{t}_4 + \mathbf{t}_5, \qquad \lambda_3{}'\mathbf{t}_3 = \mathbf{t}_3;\\
\lambda_4{}'\mathbf{t}_4 &= d_1\mathbf{t}_1 + d_2\mathbf{t}_2 + d_4\mathbf{t}_4 + d_5\mathbf{t}_5,\\
\lambda_5{}'\mathbf{t}_5 &= d_2\mathbf{t}_1 - d_1\mathbf{t}_2 - \varepsilon d_5\mathbf{t}_4 + \varepsilon d_4\mathbf{t}_5,
\end{aligned}\right\} \tag{7,3}$$

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_5^2 + 1,\ \lambda_4^2 = \lambda_5^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_4^2 + d_5^2,\ \lambda_3^2 = 1;$$

$$\left.\begin{aligned}
'k_1 &= \frac{1}{\mu\lambda_2}, \qquad 'k_2 = \lambda_3 \frac{d_5}{\mu\lambda_1\lambda_2}\cdot\frac{k_2}{k_4},\\
'k_3 &= -\lambda_3\frac{\lambda_4}{\mu\lambda_1^3}\cdot\frac{k_2}{k_4}, \qquad 'k_4 = -\varepsilon\frac{\lambda_5}{\mu\lambda_1\lambda_4};
\end{aligned}\right\} \tag{7,4}$$

постоянными $a_1, a_2, a_5, d_1, d_2, d_4, d_5$ *являются*:

$$a_1 = \frac{-k_2 + \lambda k_1 k_3}{\mu k_2 k_4},\quad a_2 = \frac{k_3}{k_2},\quad a_5 = -\frac{\lambda}{\mu}; \tag{7,5}$$

$$\left.\begin{aligned}
d_1 &= \varepsilon a_2(\varepsilon a_1 - a_2 a_5), \quad d_2 = \lambda_1^2 - \varepsilon a_1(\varepsilon a_1 - a_2 a_5),\\
d_4 &= -a_2\lambda_1^2 - a_5(\varepsilon a_1 - a_2 a_5), \quad d_5 = \varepsilon a_1 - a_2 a_5;
\end{aligned}\right\} \tag{7,6}$$

$$d_1 d_5 \neq 0.$$

Доказательство. Если бы $\mu_3 \neq 0$, то мы бы легко получили из $(1,5_2)$, $(1,5_4)$, $(1,6_1)$, $(1,6_3)$, $(1,6_5)$, что отношения (1,15) являются постоянными. Следовательно, $\mu_3 = 0$ и по $(1{,}5_2)$ и $(1{,}5_4)$ $\mu_1\mu_5 \neq 0$; если положить по $(1{,}5_4)$

$$a_4 = 1, \quad \varphi_1 = -\mu_5 k_4, \tag{7,7}$$

то мы получим из $(1{,}5_1—5_5)$

$$\mu_2 k_1 - \mu_5 a_1 k_4 = 1, \tag{7,8}$$

$$\mu_1 k_1 + \mu_5 a_2 k_4 = 0, \tag{7,9}$$

$$\mu_2 k_2 - \mu_4 k_3 = 0, \tag{7,10}$$

$$\mu_4 + \mu_5 a_5 = 0. \tag{7,11}$$

По (7,8) и (7,9) должно быть

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 \neq 0 \tag{7,12}$$

и

$$k_1 = \text{const.}, \; k_4 = \text{const.} \tag{7,13}$$

Если мы положим по $(1{,}6_5)$

$$b_5 = 1, \; \varphi_2 = k_4, \tag{7,14}$$

то из $(1{,}6_1—6_5)$ следует

$$b_1 = \frac{\mu_5 a_2^2}{\mu_1}, \quad b_2 = -\frac{\mu_5 a_1 a_2}{\mu_1}, \quad b_4 = -a_5, \quad b_5 = 1; \tag{7,15}$$

$$a_2 k_2 - k_3 - b_3 k_4 = 0. \tag{7,16}$$

Соотношения $(1{,}7_1—7_5)$ можно по (7,14) и (7,15) переписать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
c_1\varphi_3 &= \frac{a_1}{\lambda_1^2}\left[\lambda_2^2 - \left(\frac{\mu_5 a_2}{\mu_1}\right)^2 \lambda_1^2\right] k_4,\\
c_2\varphi_3 &= -b_3 k_2 + \frac{a_2}{\lambda_1^2}\left[\lambda_2^2 - \left(\frac{\mu_5 a_2}{\mu_1}\right)^2 \lambda_1^2\right] k_4,\\
c_3\varphi_3 &= \frac{1}{\mu_1}[\mu_5 a_1 a_2 k_2 + \mu_1 a_5 k_3],\\
c_4\varphi_3 &= b_3 k_2 + \frac{1}{\lambda_1^2}[\lambda_2^2 - \lambda_1^2]\, k_4,\\
c_5\varphi_3 &= \frac{a_5}{\lambda_1^2}[\lambda_2^2 - \lambda_1^2]\, k_4.
\end{aligned}\right\} \tag{7,17$_1$—17$_5$}$$

Предположим, что $b_3 \neq 0$. Из (7,16) и (7,10) следует, что $\mu_2 = \mu_4 = 0$ и по $(1{,}5_1)$, $(1{,}5_5)$ и (7,15) $a_1 \neq 0$, $a_5 = b_4 = 0$. Должно быть $\lambda_2^2 - \left(\frac{\mu_5 a_2}{\mu_1}\right)^2 \lambda_1^2 = 0$, так как в противном случае по (7,13), $(7,17_1)$, $(7,17_2)$ и $(7,17_4)$ было бы $k_2 = \text{const.}$, $k_3 = \text{const.}$ Следовательно,

$$c_1 = 0,\ c_2 = -b_3,\ c_3 = \frac{\mu_5 a_2}{\mu_1} a_1,\ c_4 = a_2 b_3,\ c_5 = 0,\ \varphi_3 = k_2.$$

Исключая k_2 из $(1,8_1)$ и $(1,8_5)$ мы получим в силу (7,9) и (7,13) $\varphi_4 = \text{const.}$ и потом из $(1,8_4)$ и (7,16) получим $k_2 = \text{const.}$, $k_3 = \text{const.}$ Следовательно,

$$b_3 = 0,$$

т. е.

$$a_2 k_2 - k_3 = 0. \qquad (7,18)$$

Пусть $c_3 = 0$. Тогда $c_1^2 + c_2^2 + c_4^2 + c_5^2 \neq 0$ и из $(7,17_1)$, $(7,17_2)$, $(7,17_4)$ и $(7,17_5)$ следует по (7,13) $\varphi_3 = \text{const.}$ Если $d_3 \neq 0$, то должно быть

$$d_1 = d_2 = d_4 = d_5 = 0, \qquad (7,19)$$

так как иначе вследствие $(1,8_1 - 8_5)$ и (7,18) получилось бы $\varphi_4 = \text{const.}$ и тогда $k_2 = \text{const.}$, $k_3 = \text{const.}$ Но из (7,19), $(1,8_1)$, $(1,8_2)$, $(1,8_4)$, $(1,8_5)$, (7,15) и (7,9) следует $c_1 : c_2 : c_4 : c_5 = a_1 : a_2 : 1 : a_5$, что при $a_3 = c_3 = 0$ невозможно для действительной кривой. — Если $d_3 = 0$, то по $(1,8_3)$, $(7,17_2)$ и $(7,17_4)$

$$a_2 \left[\lambda_2^2 - \left(\frac{\mu_5 a_2}{\mu_1}\right)^2 \lambda_1^2\right] k_2 - [\lambda_2^2 - \lambda_1^2]\, k_3 = 0;$$

в силу (7,18) должно быть $\left(\frac{\mu_5 a_2}{\mu_1}\right)^2 = 1$. Но тогда по (7,15) $\lambda_2^2 = \lambda_1^2$ и, следовательно, $c_i = 0$ $(i = 1, \ldots, 5)$, что опять невозможно.

Следовательно, должно быть $c_3 \neq 0$. Но тогда

$$c_1 = c_2 = c_4 = c_5 = 0, \qquad (7,20)$$

так как в обратном случае по $(7,17_1 - 17_5)$ и (7,18) было бы $k_2 = \text{const.}$, $k_3 = \text{const.}$ По $(7,17_4)$, $(7,17_2)$, (7,20) должно быть

$$\lambda_2^2 = \lambda_1^2, \quad \frac{\mu_5 a_2}{\mu_1} = \varepsilon = \pm 1; \qquad (7,21)$$

$$b_1 = \varepsilon a_2,\ b_2 = -\varepsilon a_1,\ b_4 = -a_5,\ b_5 = 1. \qquad (7,15')$$

Соотношения (7,9) и (7,18) выполнены ввиду (7,21) тогда и только тогда, когда $k_1 = -\varepsilon k_4 = \text{const.}$, $k_2 : k_3 = \text{const.}$ и тогда из них следует

$$a_2 = \frac{k_3}{k_2},\quad \mu_1 = \varepsilon\mu \frac{k_3}{k_2},\ \mu_5 = \mu;\quad \mu \neq 0. \qquad (7,22)$$

Согласно (7,10) будет

$$\mu_2 = \lambda \frac{k_3}{k_2}, \ \mu_4 = \lambda.$$

Из этого и из (1,3), соотв. (7,8) и (7,11) мы можем вывести (7,1), соотв. (7,5). Неравенство (7,12) мы напишем в виде

$$\varepsilon a_1 - a_2 a_5 \neq 0 \tag{7,12'}$$

и с помощью (7,5) легко установим, что оно удовлетворено.

Согласно $(7,17_3)$, (7,21) и (7,18) мы положим

$$c_3 = 1, \ \lambda_3^2 = 1, \ \varphi_3 = (\varepsilon a_1 - a_2 a_5) k_2.$$

Из $(1,8_1—8_5)$, (7,20), (7,15') и (7,12') мы найдем (7,6) и

$$d_3 = 0, \ \varphi_4 = \frac{1}{a_2 \lambda_1^2} k_3$$

и, наконец, из $(1,9_1—9_5)$

$$e_1 = d_2, \ e_2 = -d_1, \ e_3 = 0, \ e_4 = -\varepsilon d_5, \ e_5 = \varepsilon d_4, \ \varphi_5 = \varepsilon k_4.$$

Из этого мы уже получим известным способом формулы (7,2) — (7,4), если принять во внимание, что согласно (7,7) и (7,22) $\varphi_1 = -\mu k_4$.

Замечание 13. Из (7,1) и (7,3) мы получим

$$\mathbf{r} = {}'\mathbf{r} + {}'\mu\left({}'\varepsilon \frac{'k_2}{'k_2}\, {}'\mathbf{t}_1 + {}'\mathbf{t}_5\right) + {}'\lambda\left(\frac{'k_3}{'k_2}\, {}'\mathbf{t}_2 + {}'\mathbf{t}_4\right),$$

где

$$'\mu = \mu, \ '\lambda = -\frac{a_2 d_2 d_4}{d_5} \lambda, \quad '\varepsilon = \frac{\lambda_2 \lambda_5}{\lambda_1 \lambda_4} \varepsilon.$$

VIII. Заключение.

Пять следующих теорем мы докажем одновременно.

Теорема (8,1). *a) Необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы к кривой Бертрана* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *существовала двухпараметрическая система*

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mu\left(\varepsilon \frac{k_3}{k_2} \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_5\right) + \lambda\left(\frac{k_3}{k_2} \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_4\right), \ \mu \neq 0, \ \varepsilon = \pm 1 \tag{7,1}$$

или однопараметрическая система

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \frac{k_2}{(a k_2 - \varepsilon k_3) k_4}\left(\frac{k_3}{k_2} \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_4\right), \quad -\frac{k_2}{k_3} \neq \varepsilon a \neq \frac{k_3}{k_2} \tag{4,1_4}$$

сопряженных кривых, являются:

$$k_1 = -\varepsilon k_4 = \text{const.},\ k_2 : k_3 = \text{const.}$$

б) Для

$$\mu = 0,\quad \lambda = \frac{k_2}{(ak_2 - \varepsilon k_3)\, k_4},\quad -\frac{k_2}{k_3} \mp \varepsilon a \mp \frac{k_3}{k_2}$$

система (7,1) *перейдет в систему* $(4{,}1_4)$ *и для* $a = 0$ *система* $(4{,}1_4)$ *дает кривую* (4,5).

Теорема (8,2). *Необходимыми и достаточными условиями, чтобы кривая Бертрана* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *имела однопараметрическую систему сопряженных кривых*

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \lambda \mathbf{u},\text{*)} \tag{3,2}$$

соотв.

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} - \frac{k_1}{k_2 k_3}\mathbf{t}_4 + \lambda \mathbf{u}, \tag{6,3}$$

соотв.

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2}\mathbf{t}_2 + \lambda \mathbf{u} \tag{6,6}$$

являются

$$k_1 : k_2 = \text{const.},\ k_3 : k_4 = \text{const.}, \tag{3,1}$$

соотв.

$$k_3 = \text{const.},\ k_4 = \text{const.},\ k_1 : k_2 = \text{const.}, \tag{8,1}$$

соотв.

$$k_1 = \text{const.},\ k_2 = \text{const.},\ k_3 : k_4 = \text{const.} \tag{8,2}$$

Если имеет место (8,1) *соотв.* (8,2), *то тогда кроме системы* (3,2) *мы имеем еще систему* (6,3) *соотв.* (6,6) *сопряженных кривых, о кривизнах которых можно утверждать:*

$$'k_1 = \text{const.},\ 'k_2 = \text{const.},\ 'k_3 : 'k_4 = \text{const.}$$

соотв.

$$'k_3 = \text{const.},\ 'k_4 = \text{const.},\ 'k_1 : 'k_2 = \text{const.}$$

Теорема (8,3). *Кривая* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *является кривой Бертрана с тремя сопряженными тогда и только тогда, когда*

1. $k_1 = \text{const.},\ k_2 : k_3 = \text{const.},\ k_3 : k_4 = \text{const.},$ (8,3)

или

2. $k_1 = \text{const.},\ k_2 = \text{const.},\quad k_3 = \text{const.},$ (8,4)

или

3. $k_1 = \text{const.},\ k_4 = \text{const.},\ k_2 : k_3 = \text{const.},\ k_1^2 \mp k_4^2.$ (8,5)

---

*) См. (3,4).

Одна из сопряженных кривых будет всегда

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \frac{k_2}{k_1k_3}\left(\frac{k_3}{k_2}\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_4\right); \tag{4,1$_5$}$$

остальными двумя являются в случае

$$1.: \; '\mathbf{r}_j = \mathbf{r} + \frac{1}{bk_1}(b\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_4), \quad j = 1, 2,$$

b *определено уравнением* (4,19);

$$2.: \; '\mathbf{r}_j = \mathbf{r} + \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2 + bk_2k_3}\mathbf{t}_2, \quad j = 1, 2,$$

b *является корнем уравнения* (5,13);

$$3.: \; '\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \frac{k_1k_2}{(k_1^2 - k_4^2)\,k_3}\left(\frac{k_3}{k_2}\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_4\right),$$

$$'\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \frac{1}{k_1}\mathbf{t}_2.$$

Во всех трех случаях кривизны двух кривых из четырех

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \; '\mathbf{r} = '\mathbf{r}('s), \; '\mathbf{r}_j = '\mathbf{r}_j('s_j), \quad j = 1, 2,$$

удовлетворяют (8,5) *а кривизны двух остальных удовлетворяют соотношениям* (8,3) *и* (8,4).

Теорема (8,4). *Пусть кривая Бертрана* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *имеет единственную сопряженную кривую* $'\mathbf{r} = '\mathbf{r}('s)$. *Тогда могут встретиться эти и мoлько эти случаи* ($\mu_2, \mu_4, '\mu_2, '\mu_4 = \text{const.}$, $\mu_2\mu_4{}'\mu_2{}'\mu_4 \neq 0$):

1а—в) $'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mu_2\mathbf{t}_2 + \mu_4\mathbf{t}_4$ *и наоборот*

а) $\mathbf{r} = '\mathbf{r} + '\mu_2{}'\mathbf{t}_2 + '\mu_4{}'\mathbf{t}_4$ *или*

б) $\mathbf{r} = '\mathbf{r} + '\mu_4{}'\mathbf{t}_4$ *или*

в) $\mathbf{r} = '\mathbf{r} + '\mu_2{}'\mathbf{t}_2$;

2) $'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mu_4\mathbf{t}_4$ *и наоборот* $\mathbf{r} = '\mathbf{r} + '\mu_2{}'\mathbf{t}_2 + '\mu_4{}'\mathbf{t}_4$ *или*

3) $'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mu_2\mathbf{t}_2$ *и наоборот* $\mathbf{r} = '\mathbf{r} + '\mu_2{}'\mathbf{t}_2 + '\mu_4{}'\mathbf{t}_4$.

Приведем необходимые и достаточные условия для того, чтобы имел место случай

1а): *если* $k_2 : k_3 \neq \text{const.}$ *то должны быть выполнены условия а*) *теоремы* (4,3б) *с* $e_1 \neq 0$; *если* $k_2 : k_3 = \text{const.}$ *то должно иметь место* (4,38) *и* $k_4 \neq \text{const.}$;

1б): *имеют место условия в*) *из теоремы* (4,3б);

1в): *имеют место условия а*) *из теоремы* (4,2б);

2): *имеют место условия б*) *из теоремы* (4,3б);

3): *имеют место условия а*) *из теоремы* (5,1б).

Случаи 1б) и 2) а также и 1в) и 3) тождественны с точностью до обмена местами кривых $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *и* $'\mathbf{r} = '\mathbf{r}('s)$.

Замечание 14. Решение а) из теоремы (4,3б) будет при $e_1 = 0$ тождественно с решением а) из теоремы (4,2б).

Теорема (8,5). *Кривыми, приведенными в теоремах* (8,1) — (8,4), *исчерпываются все кривые Бертрана в пятимерном пространстве.*

Доказательство. Часть а) теоремы (8,1) и затем теоремы (8,2)—(8,4), являются только иной формулировкой результатов, полученных в отделах III—VII, если воспользоваться также формулами, определяющими кривизны сопряженных кривых. Часть б) теоремы (8,1) можно проверить на основании соотношений, приведенных в теоремах (7,1), (4,4) и (4,5).

Résumé.

Les courbes de Bertrand dans l'espace à cinq dimensions

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha.

(Reçu le 24 Juillet 1951.)

Le travail est consacré aux certaines courbes de l'espace à 5 dimensions qui sont une généralisation des courbes de Bertrand de l'espace à 3 dimensions; on les appelle aussi courbes de Bertrand. On y trouvera les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe donnée soit une courbe de Bertrand.

Soit R_5 l'espace euclidien à 5 dimensions aux coordonnées cartésiennes rectangulaires. Soient $\mathbf{r}$ resp. $'\mathbf{r}$ les radiusvecteurs de deux courbes aux arcs s resp. $'s$, c'est à dire

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad '\mathbf{r} = '\mathbf{r}('s). \tag{1,1}$$

Désignons par k_i resp. $'k_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ leur courbures et par $\mathbf{t}_j$ resp. $'\mathbf{t}_j$ $(j = 1, \ldots, 5)$ les vecteurs unitaires dans les directions de la tangente et de la première etc. jusqu' à la quatrième normale des courbes (1,1).

Supposons les courbes (1,1) réelles et différentes et ne considérons que les intervalles des paramètres s et $'s$, dans lesquels les courbures k_i et de même $'k_i$ ne sont pas toutes constantes et dans lesquels

$$k_1 k_2 k_3 k_4 {'k_1} {'k_2} {'k_3} {'k_4} \neq 0.$$

Sous ces suppositions nous allons résoudre le problème suivant:

Sous quelles conditions existe dans l'espace euclidien à 5 dimensions au moins un couple de courbes (1,1) en correspondance mutuelle

$$'s = f(s) \tag{1,2}$$

et tel que le couple de repères de Frenet correspondants forme une figure invariable par rapport au groupe de mouvements euclidiens?

Nous appellerons chaque courbe du couple (1,1), qui est une solution de notre problème, *une courbe de Bertrand* (dans l'espace à 5 dimensions).

Nous convenons encore d'appeler la courbe $'\mathbf{r} = '\mathbf{r}('s)$ *la courbe associée* à la courbe $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ et inversement.

Le mémoire présent contient les démonstrations des théorèmes suivants:

Théorème (1,1). *Si les courbes* (1,1) *sont des courbes de Bertrand associées, il existe des constantes* $\mu_i, a_i, b_i, c_i, d_i, e_i$ *et des fonctions* $\varphi_i = \varphi_i(s) \neq 0$ $(i = 1, \ldots, 5)$ *telles que*

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \sum_{i=1}^{5} \mu_i \mathbf{t}_i, \tag{1,3}$$

$$\lambda_1' \mathbf{t}_1 = \sum_{i=1}^{5} a_i \mathbf{t}_i, \quad \lambda_1^2 = \sum_{i=1}^{5} a_i^2; \text{ cycl.}; \tag{1,4$_1$—4$_5$}$$

$$a_1\varphi_1 = 1 - \mu_2 k_1, \; a_h\varphi_1 = \mu_{h-1}k_{h-1} - \mu_{h+1}k_h, \; a_5\varphi_1 = \mu_4 k_4; \tag{1,5$_1$—5$_5$}$$

$$b_1\varphi_2 = -a_2k_1, \; b_h\varphi_2 = a_{h-1}k_{h-1} - a_{h+1}k_h, \; b_5\varphi_2 = a_4k_4; \tag{1,6$_1$—6$_5$}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1\varphi_3 &= -b_2k_1 + a_1\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\varphi_2, \; c_h\varphi_3 = b_{h-1}k_{h-1} - b_{h+1}k_h + a_h\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\varphi_2, \\ c_5\varphi_3 &= b_4k_4 + a_5\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}\varphi_2; \end{aligned}\right\} \tag{1,7$_1$—7$_5$}$$

$$\left.\begin{aligned} d_1\varphi_4 &= -c_2k_1 + b_1\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\varphi_3, \; d_h\varphi_4 = c_{h-1}k_{h-1} - c_{h+1}k_h + b_h\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\varphi_3, \\ d_5\varphi_4 &= c_4k_4 + b_5\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^2}\varphi_3; \end{aligned}\right\} \tag{1,8$_1$—8$_5$}$$

$$\left.\begin{aligned} e_1\varphi_5 &= -d_2k_1 + c_1\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\varphi_4, \; e_h\varphi_5 = d_{h-1}k_{h-1} - d_{h+1}k_h + c_h\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\varphi_4, \\ e_5\varphi_5 &= d_4k_4 + c_5\frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2}\varphi_4; \end{aligned}\right\} \tag{1,9$_1$—9$_5$}$$

$$h = 2, 3, 4.$$

La correspondance (1,2) *est*

$$'s = \lambda_1 \int \varphi_1 \, ds \tag{1,10}$$

et les courbures de la courbe $'\mathbf{r} = '\mathbf{r}('s)$ *sont données par les formules*:

$$'k_l = \frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_1 \lambda_l} \cdot \frac{\varphi_{l+1}}{\varphi_l}; \quad l = 1, \ldots, 4. \tag{1,11}$$

Théorème (1,2). *Si* (1,1) *sont des courbes de Bertrand associées et* $'\mathbf{t}_1 \neq p\mathbf{t}_1$, *où* $p =$ const., *alors les rapports*

$$k_1 : k_2 : k_3 : k_4$$

ne sont pas constants et de plus $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 = a_2a_3a_4 = 0$.

Théorème (1,3). *Supposons que les courbes* (1,1) *soient des courbes de Bertrand. Alors on n'a q'un de cinq cas suivants*:

$$\begin{array}{rll} I. & a_2 = a_3 = a_4 = 0, & \mu_1\mu_3\mu_5 \neq 0,\ \mu_2 = \mu_4 = 0, \\ II. & a_2 = a_4 = 0, & \mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = 0,\ \mu_4 \neq 0, \\ III. & a_2 = a_4 = 0, & \mu_1 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0,\ \mu_2 \neq 0, \\ IV. & a_2 = a_4 = 0, & \mu_1\mu_3\mu_5 \neq 0,\ \mu_2\mu_4 = 0,\ \mu_2^2 + \mu_4^2 \neq 0, \\ V. & a_3 = 0,\ a_2a_4 \neq 0. & \end{array}$$

Ces cas sont étudiés. Aussi les résultats de M. E. Čech obtenus pour les courbes de Bertrand dans l'espace euclidien à 4 dimensions sont énoncés.

Les résultats finaux du travail sont:

Théorème (8,1). *Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la courbe* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *soit une courbe de Bertrand avec le système de courbes associées à deux paramètres* $\mu \neq 0, \lambda$

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mu\left(\varepsilon\frac{k_3}{k_2}\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_5\right) + \lambda\left(\frac{k_3}{k_2}\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_4\right) \quad (\varepsilon = \pm 1) \qquad (7,1)$$

resp. avec le système de courbes associées à un paramètre a

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \frac{k_2}{(ak_2 - \varepsilon k_3)\,k_4}\left(\frac{k_3}{k_2}\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_4\right), \quad -\frac{k_2}{k_3} \neq \varepsilon a \neq \frac{k_3}{k_2}, \qquad (4,1_4)$$

sont:

$$k_1 = -\varepsilon k_4 = \text{const.},\ k_2 : k_3 = \text{const.}$$

Théorème (8,2). *Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la courbe* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *soit une courbe de Bertrand avec le système à un paramètre* λ *des courbes associées*

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \lambda\mathbf{u}^{*)} \qquad (3,2)$$

resp.

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} - \frac{k_1}{k_2k_3}\mathbf{t}_4 + \lambda\mathbf{u} \qquad (6,3)$$

resp.

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2}\mathbf{t}_2 + \lambda\mathbf{u} \qquad (6,6)$$

sont:

$$k_1 : k_2 = \text{const.},\ k_3 : k_4 = \text{const.} \qquad (3,1)$$

---

*) Voir (3,4).

resp.

$$k_3 = \text{const.},\ k_4 = \text{const.},\ k_1 : k_2 = \text{const.} \tag{8,1}$$

resp.

$$k_1 = \text{const.},\ k_2 = \text{const.},\ k_3 : k_4 = \text{const.} \tag{8,2}$$

Les conditions (8,1) *resp.* (8,2) *étant satisfaites, on a à côté du système* (3,2) *encore le système* (6,3) *resp.* (6,6) *des courbes associées dont les courbures satisfont aux relations*

$$'k_1 = \text{const.},\ 'k_2 = \text{const.},\ 'k_3 : 'k_4 = \text{const.}$$

resp.

$$'k_3 = \text{const.},\ 'k_4 = \text{const.},\ 'k_1 : 'k_2 = \text{const.}$$

Théorème (8,3). *La courbe* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *est une courbe de Bertrand aux trois courbes associées alors et seulement alors si*

1. $k_1 = \text{const.},\ k_2 : k_3 = \text{const.},\ k_3 : k_4 = \text{const.}$ (8,3)

ou

2. $k_1 = \text{const.},\ k_2 = \text{const.},\ k_3 = \text{const.}$ (8,4)

ou

3. $k_1 = \text{const.},\ k_4 = \text{const.},\ k_2 : k_3 = \text{const.},\ k_1^2 \neq k_4^2.$ (8,5)

L'une des courbes associées est toujours

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \frac{k_2}{k_1 k_3}\left(\frac{k_3}{k_2}\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_4\right); \tag{4,1$_5$}$$

les deux autres sont dans le cas

1. $'\mathbf{r}_j = \mathbf{r} + \dfrac{1}{bk_1}(b\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_4),\ (j = 1, 2),$

où b *satisfait à l'équation* (4,19);

2. $'\mathbf{r}_j = \mathbf{r} + \dfrac{k_1}{k_1^2 + k_2^2 + bk_2k_3}\mathbf{t}_2,\ (j = 1, 2),$

où b *est la racine de l'équation* (5,13);

3. $'\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \dfrac{k_1k_2}{(k_1^2 - k_4^2)\,k_3}\left(\dfrac{k_3}{k_2}\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_4\right),$

$$'\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \frac{1}{k_1}\mathbf{t}_2.$$

Dans tous les trois cas, les courbures de deux courbes de l'ensemble:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s),\ '\mathbf{r} = '\mathbf{r}('s),\ '\mathbf{r}_j = '\mathbf{r}_j('s_j),\ (j = 1, 2)$$

satisfont aux relations (8,5) *et les courbures de deux autres aux relations* (8,3) *et* (8,4).

Théorème (8,4). *Soit* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ *une courbe de Bertrand avec une seule courbe associée* $'\mathbf{r} = '\mathbf{r}('s)$. *Ensuite seulement les cas suivants peuvent avoir lieu* $(\mu_2, \mu_4, '\mu_2, '\mu_4 = \text{const.} \neq 0)$:

1a—c) $'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mu_2\mathbf{t}_2 + \mu_4\mathbf{t}_4$ *et d'autre part*

a) $\mathbf{r} = '\mathbf{r} + '\mu_2{}'\mathbf{t}_2 + '\mu_4{}'\mathbf{t}_4$ *ou*

b) $\mathbf{r} = '\mathbf{r} + '\mu_4{}'\mathbf{t}_4$ *ou*

c) $\mathbf{r} = '\mathbf{r} + '\mu_2{}'\mathbf{t}_2$,

2) $'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mu_4\mathbf{t}_4$ *et d'autre part* $\mathbf{r} = '\mathbf{r} + '\mu_2{}'\mathbf{t}_2 + '\mu_4{}'\mathbf{t}_4$,

3) $'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mu_2\mathbf{t}_2$ *et d'autre part* $\mathbf{r} = '\mathbf{r} + '\mu_2{}'\mathbf{t}_2 + '\mu_4{}'\mathbf{t}_4$.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence du chaque cas mentioné sont trouvées.

Il s'en suit que *toutes les courbes de Bertrand dans l'espace à 5 dimensions sont épuisées par les courbes introduites dans les théorèmes* (8,1)—(8,4).