

Julian Bonder

Sur les fonctions réalisant les représentations conformes et biunivoques d'un demi-plan sur les extérieurs des arcs de certaines courbes algébriques

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 1 (1951), No. 4, 203–228

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100030>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1951

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

SUR LES FONCTIONS RÉALISANT LES REPRÉSENTATIONS CONFORMES ET BIUNIVOQUES D'UN DEMI-PLAN SUR LES EXTÉRIEURS DES ARCS DE CERTAINES COURBES ALGÈBRIQUES

JULIAN BONDER, Gliwice.

(Reçu le 20 Mars 1951.)

L'auteur s'occupe de la construction de la fonction $z = f(t)$ réalisant une correspondance biunivoque et conforme entre le demi-plan $t = r + is$ ($s > 0$) et le plan complet $z = x + iy$, coupé suivant un arc \widehat{AB} d'une certaine courbe algébrique.

Les cas où \widehat{AB} est l'arc d'une conique ou d'une courbe de Cassini sont traités en détail.

D'après le théorème classique, dit de Riemann, une courbe simple de Jordan, étant fermée et sans points multiples, détermine déjà — à une transformation homographique près — une fonction analytique qui effectue la représentation conforme et biunivoque de l'intérieur de cette courbe, formant un domaine simplement connexe, sur le *domaine canonique* de la même connexité; par exemple: sur le demi-plan, sur l'intérieur ou l'extérieur d'une circonférence (dans ce dernier cas, le point à l'infini compris). Cette fonction définit simultanément une correspondance biunivoque et continue des contours envisagés.

Ce *théorème d'existence*, si fondamental et général, ne fournit pourtant que des indications trop vagues, lorsqu'il s'agit de l'influence de la forme du contour, définissant la représentation conforme étudiée — sur les propriétés caractéristiques de la fonction réalisant cette représentation. Et cela même dans des cas de contours composés des simples arcs analytiques. En fait, abstraction faite de quelques exemples tout élémentaires, on ne sait guère dévoiler ces enchaînements intimes qui doivent cependant lier le système d'équations, déterminant le contour donné, avec une certaine forme analytique de la fonction réalisant la représentation conforme, ainsi définie.

La circonstance suivante y est frappante.

On connaît bien des exemples des domaines formant l'extérieur d'une seule courbe algébrique (comme p. ex. l'extérieur d'une ellipse), dont la représentation conforme et biunivoque sur le domaine canonique

peut être exprimée facilement par une simple combinaison des fonctions analytiques élémentaires. Mais il suffit de changer un peu le problème: au lieu du domaine extérieur, prendre le domaine intérieur, par rapport à la même courbe algébrique, pour que de très grandes difficultés surgissent immédiatement. Ces complications se manifestent d'une façon encore plus accentuée, lorsque la frontière du domaine qui va être transformé — au lieu de former une courbe algébrique tout entière — ne constitue qu'une partie, qu'un arc AB de celle-ci (cela veut dire qu'il s'agit alors de la représentation conforme et biunivoque du domaine canonique sur tout le plan, excepté cet arc AB même, qui forme ainsi une „coupure“, le long de laquelle le plan est fendu, entaillé).

Voici un exemple. — La fonction, tout simple

$$z = \frac{1}{2}p(t + i)^2, \quad (z = x + iy)$$

réalise la représentation conforme et biunivoque du demi-plan $\text{Im } t > 0$ sur tout le domaine situé du côté convexe de la parabole $y^2 = 2px + p^2$. Au contraire, pour résoudre le même problème par rapport au domaine formant l'extérieur d'un arc de parabole, il est nécessaire d'introduire des fonctions et des intégrales elliptiques.¹⁾

Cet exemple, aussi bien que des autres (voir n° 14), montre la divergence extrême entre ces deux classes des représentations conformes: une — sur l'extérieur d'une courbe analytique L , tout entière; et l'autre — sur l'extérieur d'une partie seulement de cette courbe L , son arc AB , formant dans le plan entier une coupure. Néanmoins, compte tenant de la „parenté analytique“, très proche d'ailleurs, des contours, limitant ces deux classes de domaines, il paraît naturel de chercher, malgré tout, des liens intimes entre les fonctions réalisant ces deux classes corrélatives des représentations conformes. Outre intérêt théorique, chaque progrès dans cette direction, semble-t-il, aurait d'importance pour des applications, et cela non seulement par rapport aux applications de la théorie des représentations conformes mêmes, mais aussi: du potentiel, de l'écoulement autour des profils d'aviation, et cetera. Il est d'autant plus étonnant que des recherches correspondantes manquent — si je ne me trompe pas — complètement.²⁾

Dans le présent travail, je n'envisage pas le problème posé dans toute sa généralité; je me limite aussitôt à une classe des arcs algébriques.

1. Dans le plan de la variable complexe z est situé un arc régulier AB , appartenant à une courbe analytique L . Nous admettons que la

¹⁾ Voir — JULIAN BONDER: O pewnym zagadnieniu z dziedziny odwzorowań podobnych, Warszawa 1931.

²⁾ Dans le même ordre d'idées, j'ai posé en 1946, dans „Nouveau Livre Écosais“, un problème, un peu plus général (voir: Coll. Math., I, 1 (1947), 32). — Jusqu'à présent, on n'a pas donné la solution de ce problème.

courbe L est telle qu'il est possible de trouver une *fonction algébrique*, donc multiforme, soit — à n déterminations:

$$\zeta = \varphi(z), \quad (1)$$

qui transforme chaque arc AB de cette courbe L en n arcs *circulaires*: $A_j^{\varphi} B_j^{\varphi}$; ($j = 1, 2, \dots, n$); ajoutons que le terme „arc circulaire” englobe ici le segment rectiligne (arc à courbure nulle).

Il s'ensuit que la courbe L doit appartenir à quelque classe de courbes algébriques. Évidemment, cette circonstance restreint considérablement la généralité de résultats qui seront obtenus dans la suite.

La fonction (1) effectue une certaine représentation de deux plans z et ζ , l'un sur l'autre. N'étant pas biunivoque, cette représentation reste — quelques points exceptés — *conforme* partout.

Remarquons qu'en nombre de cas, cette fonction $\zeta = \varphi(z)$ transforme en systèmes de circonférences ou droites du plan ζ non seulement la courbe L , envisagée plus haut, mais simultanément la famille entière de certaines courbes algébriques, englobant notre courbe L .³⁾ Ce sont des cas importants, car alors une seule fonction $\zeta = \varphi(z)$ peut jouer son rôle de la fonction auxiliaire de représentation conforme demandée, non seulement par rapport à un arc donné AB , et non seulement par rapport aux différents arcs de la même courbe algébriques, mais encore — par rapport à une famille entière de courbes algébriques.³⁾

En supposant que cette fonction auxiliaire (1) nous est donnée, nous l'envisageons dès-à-présent dans tout son *domaine d'existence*, avec tous ses zéros, ses pôles et ses points de ramification:

$$H_1, H_2, \dots, H_q; \quad (q \leq n). \quad (2)$$

Or, cette *fonction algébrique* devient uniforme sur une *surface propre* d^e *Riemann*. Il convient d'envisager le „modèle plan” de cette surface — modèle à n *feuillet*s, mis sur le plan z . Désignons le par R_z . On trouve sur chaque feuillet de cette surface R_z un exemplaire de l'arc AB . Tous ces exemplaires ont d'ailleurs, sur R_z , les mêmes affixes z . — Ainsi, il s'établit une correspondance biunivoque entre les n arcs en cercle (ou segments rectilignes) $A_j^{\varphi} B_j^{\varphi}$ et les exemplaires respectifs $A_z^{\varphi} B_z^{\varphi}$ de l'arc donné.

Cela étant, nous précisons maintenant notre problème comme il suit: déterminer, en s'appuyant sur le caractère analytique de la fonction donnée (1) — les propriétés fondamentales de la fonction analytique cherchée

$$z = f(t), \quad (3)$$

dont une détermination convenable doit réaliser la représentation de-

³⁾ Voir les exemples à la fin du travail, où le rôle de la fonction auxiliaire $\zeta = \varphi(z)$ est joué tout simplement par la fonction qui représente sur un demi-plan ζ ou sur l'extérieur du cercle $|\zeta| = \text{Const.}$ — l'extérieur de la courbe L tout entière.

mandée, conforme et biunivoque, du demi-plan supérieur de $t = r + is$ sur tout l'extérieur de l'arc AB du plan z . Ensuite, en partant de cette analyse, nous allons chercher la méthode pour la construction *effective* de cette fonction (3).

Or, l'essentiel même de la représentation examinée exige que, dans le domaine du demi-plan supérieur de t , la frontière γ compris (c'est-à-dire pour $\text{Im } t \geq 0$), la détermination envisagée de la fonction (3) soit *holomorphe*, excepté un seul point P — image de l'infini $z = \infty$. Ce point P , avec l'affixe $t = t_\infty$, constitue un pôle simple de la fonction (3).

Ensuite, en vertu de la conformité de notre représentation, la dérivée $f'(t)$ ne peut pas s'y annuler, sauf les deux points: $t = a$ et $t = b$ — images de deux „pointes” de l'arc AB . Ces zéros de la dérivée de la fonction de représentation

$$f'(a) = f'(b) = 0$$

sont situés sur la frontière même du domaine à transformer (sur l'axe réel du plan t). Ce sont des *zéros simples*, si ce n'est que: $a = \infty$ ou $b = \infty$. Dans ces cas-là, très spéciaux d'ailleurs, on s'aperçoit facilement que le point $t = \infty$ devient alors un *zéro triple* de la dérivée $f'(t)$. Outre ces cas, la représentation étudiée reste *conforme* au point $t = \infty$, et par conséquent, la fonction $z = f(t)$ peut y être développée sous la forme:

$$z = f(t) = f(\infty) + \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \dots; (c_1 \neq 0). \quad (4)$$

Ajoutons encore que la fonction (3) n'est déterminée par les données géométriques du problème posé qu'à une transformation homographique près, à coefficients réels — donc, qui transforme le demi-plan supérieur en lui-même. En tenant compte de cela, nous pourrions toujours: à un point quelconque du plan z et à une direction, issue de ce point, faire correspondre dans le demi-plan supérieur de la variable t un point, avec une direction issue de ce point, tous les deux choisis arbitrairement (voir n° 12).

2. Menons sur notre modèle R_z de la surface de Riemann, relative à la fonction $\zeta = \varphi(z)$, des coupures le long des arcs $A_z^{(\varphi)}B_z^{(\varphi)}$, et désignons la surface ainsi entaillée par R_z^0 . Or, la fonction $t = f^{-1}(z)$, inverse à (3), transforme cette surface R_z^0 en une surface R_t^0 dont la structure est facile à saisir. Son „modèle plan” se compose de nouveau de n feuillets, convenablement *ramifiés*. Chaque feuillet n'est qu'un exemplaire du demi-plan supérieur de t . Les images des arcs $A_z^{(\varphi)}B_z^{(\varphi)}$, fournies par $t = f^{-1}(z)$, tombent toutes sur son axe réel. Nous désignerons ces images respectivement par les symboles $\lambda^{(\varphi)}$. Elles forment des „droites frontières” de la surface R_t^0 . On peut distinguer sur chaque droite frontière $\lambda^{(\varphi)}$ deux segments: fini et infini, ce dernier traversant le point à l'infini $t = \infty$. Ce sont évidemment les images respectives de deux côtés opposés de chaque coupure $A_z^{(\varphi)}B_z^{(\varphi)}$.

Dans certains cas, il convient de joindre les droites frontières $\lambda^{(g)}$ à la surface même R_t^g . Il s'établit alors un *domaine fermé* $\overline{R_t^g}$. Or, comme nous avons indiqué au numéro précédent, la fonction fondamentale (3) de la représentation conforme étudiée y est bien déterminée. Par suite, on peut former dans ce domaine — par la simple *superposition de deux fonctions*, (1) et (3) — une nouvelle fonction. Évidemment, pour obtenir cette *fonction composée*

$$\varphi[f(t)] = \zeta(t) \quad (5)$$

dans tout son domaine d'existence, il faut *prolonger analytiquement son élément initial*:

$$\{\overline{R_t^g}, \zeta_0(t)\} \quad (5_0)$$

(par ce symbole nous voulons souligner que le domaine d'existence, et d'uniformité, de l'*élément analytique ramifié* $\zeta_0(t)$ — n'est que la surface $\overline{R_t^g}$).

Mais, avant d'aborder ce prolongement analytique, il sera utile de le faire précéder par quelques observations générales.

Comme nous avons indiqué au n° 1, le choix de la fonction auxiliaire $\zeta = \varphi(z)$ ne dépend guère de la position de l'arc AB sur la courbe algébrique L . Il est donc clair que les extrémités A et B de l'arc donné AB seront, en général, distinctes de tous les pôles, zéros et points de ramification de cette fonction algébrique $\zeta = \varphi(z)$. Leur coïncidence ne peut se présenter que dans quelques cas limites — cas, en règle, de dégénérescence de la famille de représentations examinées.

C'est pourquoi il est naturel de ne pas englober ces cas dans l'étude générale qui va suivre, mais plutôt de les en exclure, et de les examiner, au besoin, séparément (ce seront, d'ailleurs, des cas moins compliqués).

Cette convention simplifie l'analyse suivante. En effet, par suite de la condition supplémentaire admise, les images t des points de ramification (2) de la fonction $\zeta = \varphi(z)$ ne pourront coïncider avec les points, où $f'(t) = 0$ et où l'on a par conséquent:

$$z = f(t) = f(a) + \frac{1}{2}(t - a)^2 \cdot f''(a) + \dots$$

Il s'ensuit donc un résultat important: par l'introduction de $z = f(t)$ sous le signe de la fonction $\varphi(z)$ — ce qui conduit à la fonction (5) — les *poïnts algébriques de ramification* (2) passent simplement de la surface R_z^g aux points correspondants

$$H_1^{(g)}, H_2^{(g)}, \dots, H_q^{(g)} \quad (6)$$

de la surface R_t^g , *sans changer leur ordre de multiplicité*. Ainsi, le nombre et la multiplicité des points de ramification de deux surfaces (R_z^g et R_t^g) étant les mêmes, leur structure intérieure sera pareille.

De plus, et par les mêmes raisons, tous les *points réguliers* de la fonction auxiliaire (1) passent du domaine R_z^g au domaine R_t^g , en restant éga-

lement réguliers par rapport à $\zeta_0(t)$. De même, ses pôles et ses zéros se transforment en pôles et zéros respectifs de $\zeta_0(t)$, tout en conservant leurs ordres et leurs multiplicités.

Quant au pôle P ($t = t_\infty$) de la fonction $z = f(t)$, il peut conserver son caractère d'un pôle, aussi par rapport à la fonction $\zeta_0(t)$, sur tous les n feuillets de la surface R_z^0 ; mais il peut arriver que sur un ou plusieurs, ou bien sur tous les feuillets de cette surface R_z^0 , le point P deviendra un point régulier. Pour ceci, il faut et il suffit que la fonction $\zeta = \varphi(z)$ transforme le point à l'infini $z = \infty$, se trouvant sur le feuillet envisagé de R_z , en un point $\zeta \neq \infty$.

Il s'ensuit de cet examen que toute l'influence de la fonction propre de notre représentation conforme, $z = f(t)$, se manifeste uniquement, lorsqu'on passe de la surface R_z^0 à celle R_z^1 , par un changement de la configuration mutuelle des points caractéristiques dont il a été question plus haut; par contre, le nombre et l'ordre de ces points sont complètement déterminés par la seule fonction auxiliaire $\zeta = \varphi(z)$.

En tenant compte de ces faits fondamentaux, nous allons maintenant construire une chaîne convenable des prolongements analytiques de notre élément de départ (S_0). Or, et c'est le point capital: toutes les frontières dans le plan ζ ne se composant que de segments rectilignes ou d'arcs circulaires, on pourra faire ce prolongement analytique tout simplement par l'application directe du *principe de symétrie de Schwarz* — méthode déjà classique et seule qui conduit à des solutions véritablement effectives.

3. Traçons sur la surface R_z^0 une ligne $\Gamma_t^{(j)}$ venant d'un point intérieur G d'affixe $t_0 = r_0 + is_0$ jusqu'à un point quelconque de l'une de droites frontières de cette surface, par exemple, jusqu'au point $C_t^{(j)}$, situé sur $\lambda^{(j)}$ (fig. 1). A la réserve que cette ligne $\Gamma_t^{(j)}$ évite tous les *points de ramification* (6), nous ne posons pas d'autres restrictions à sa forme: elle peut, si c'est le cas, entourer bien des fois chaque point de ramification (6), en formant parfois des *lacets* assez compliqués.

Prolongeons ensuite cette ligne à travers $\lambda^{(j)}$ de telle manière que la courbe ainsi suppléée $\Gamma_t^{(j)}$, toute entière, soit symétrique par rapport à cette droite frontière $\lambda^{(j)}$. Désignons par G_j ($t = \bar{t}_0 = r_0 - is_0$) le point terminant cette nouvelle branche de $\Gamma_t^{(j)}$. Nous dirons que ce point G_j est l'*image symétrique* de G par rapport à $\lambda^{(j)}$.

Il faut insister ici sur ce point capital qu'il existe n différents points G_j , tous ayant le même affixe \bar{t}_0 et tous symétriques de G ($t = t_0$), mais chacun — par rapport à une autre droite frontière $\lambda^{(j)}$; ($j = 1, 2, \dots, n$).

Cela étant, nous allons maintenant faire prolonger analytiquement la fonction étudiée $\zeta(t)$ dans le demi-plan inférieur de la variable t . Nous l'effectuerons en partant de sa détermination initiale (S_0) et en suivant toujours la ligne $\Gamma_t^{(j)}$, tracée tout-à-l'heure. Or, les valeurs, prises par la

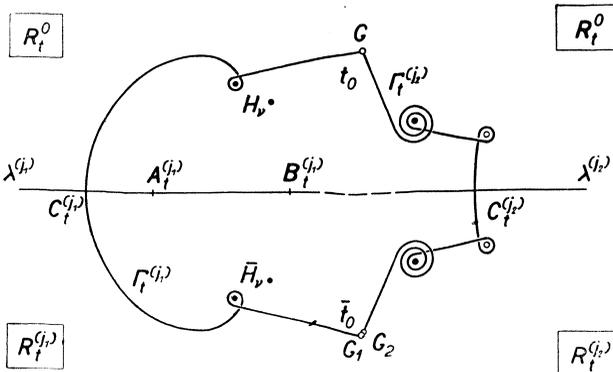


Fig. 1.

fonction $\zeta(t)$ sur $\Gamma_t^{(j)}$, déterminent, dans le plan ζ , une courbe $\Gamma_\zeta^{(j)}$ — image de $\Gamma_t^{(j)}$ fournie par la transformation (5).

Il est immédiat que cette courbe $\Gamma_\zeta^{(j)}$ coupe, en un certain point $C_\zeta^{(j)}$, l'arc $A_\zeta^{(j)}B_\zeta^{(j)}$ — l'image de la droite frontière $\lambda^{(j)}$, au travers de laquelle nous avons effectué le prolongement analytique en question. Or, d'après le principe de symétrie de Schwarz, les deux parties de la courbe $\Gamma_\zeta^{(j)}$, situées de deux côtés opposés du point $C_\zeta^{(j)}$, sont *symétriques* — l'une de l'autre — par rapport à $A_\zeta^{(j)}B_\zeta^{(j)}$ (si c'est un arc de cercle, „symétrie“ signifie alors: *inversion* ou *transformation par rayons vecteurs réciproques*).

Il en résulte que la valeur de la fonction étudiée (5) au point G_j , où se termine la courbe $\Gamma_t^{(j)}$, s'exprime par sa valeur au point de départ G à l'aide de l'une de deux formules suivantes:

$$\zeta_j = \frac{\varrho_j^2}{\zeta_0 - \alpha_j + i\beta_j} + \alpha_j + i\beta_j \quad (7_1)$$

ou

$$\zeta_j = \bar{\zeta}_0 e^{2i\gamma_j} + 2i\delta_j e^{i\gamma_j}. \quad (7_2)$$

La première formule correspond au cas où l'image de $\lambda^{(j)}$ dans le plan ζ , c'est-à-dire $A_\zeta^{(j)}B_\zeta^{(j)}$, constitue une partie d'une certaine circonférence

$$|\zeta - \alpha_j - i\beta_j| = \varrho_j; \quad (7_1^*)$$

la seconde — se rapporte au cas d'un segment d'une droite

$$\text{Im}(\zeta e^{-i\gamma_j}) = \text{const} = \delta_j; \quad (7_2^*)$$

(ici: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — paramètres réels dont la signification géométrique est immédiate).

Les formules (7₁) et (7₂) montrent — et les simples considérations sur les propriétés générales du prolongement analytique discuté le confirment — que la valeur ζ_j de la fonction étudiée, à laquelle on arrive en partant du point G et en suivant par continuité le chemin $\Gamma_t^{(\varphi)}$, ne peut dépendre ni de la position de son point d'intersection $C_t^{(\varphi)}$ avec la droite frontière $\lambda^{(\varphi)}$, ni de sa forme géométrique. Observons que même la restriction concernant la symétrie de $\Gamma_t^{(\varphi)}$ n'y est plus essentielle. Il est vrai que cette restriction rend facile et tout immédiate l'application directe du principe de symétrie, mais d'autre part, il est clair que sur le résultat final du prolongement analytique dont il s'agit ici, une déformation continue de chemin $\Gamma_t^{(\varphi)}$ — déformation faite sans franchir les points de ramification (6) — ne peut exercer aucune influence.

De là, la conclusion définitive: le résultat final de notre prolongement analytique ne dépend que du fait: laquelle des droites frontières on traverse (c'est précisément pour souligner cette circonstance fondamentale que nous avons écrit ζ_j , l'indice j indiquant quel est le numéro de la droite frontière franchie).

4. Il est évident que les considérations précédentes sont applicables, sans aucune modification, à tous les autres points du domaine de départ R_t^0 . Ainsi, on parvient tout d'un coup à une *nouvelle branche* $\zeta_j(t)$ de la fonction cherchée (5). Évidemment, $\zeta_j(t)$ n'est pas uniforme dans le demi-plan inférieur, de même que $\zeta_0(t)$ ne l'était pas dans le demi-plan supérieur. Le domaine d'uniformité de $\zeta_j(t)$ — c'est une partie inhérente à la surface totale de Riemann de la fonction $\zeta(t)$. Désignons donc cette partie tout court par $\overline{R_t^j}$, et examinons sa structure.

Traçons de nouveau la courbe symétrique $\Gamma_t^{(\varphi)}$, cette fois en décrivant autour du point M , donné sur R_t^0 , un *lacet à m circuits*. Sa transformée $\Gamma_t^{(\varphi)}$ décrit aussi un lacet autour de ce point ζ qui fait l'image de M . Donnons au nombre m une telle valeur que ce dernier *lacet* (dans le plan ζ) soit *simple*, à un *circuit*. Dans ces conditions, comme on sait: $m = 1$, si le point M est un point ordinaire, régulier ou pôle de la fonction (5); tandis que $m > 1$ montre que M est un point de ramification, algébrique, d'ordre égal à $m - 1$. — D'autre part, la courbe $\Gamma_t^{(\varphi)}$ étant symétrique, ses deux lacets sont également symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe réel du plan t . Par conséquent, ces deux lacets décrivent le même nombre des circuits, à savoir m . Cela étant, d'après le principe de Schwarz l'image de $\Gamma_t^{(\varphi)}$ dans le plan ζ décrit de même deux lacets; et si l'un est simple, l'autre doit être nécessairement de même nature.

Il suit de ce raisonnement: *deux points symétriques par rapport à une droite frontière $\lambda^{(\varphi)}$ ou bien sont, tous les deux, des points ordinaires, réguliers ou pôles ($m = 1$); ou bien, tous les deux — des points de ramification du même ordre ($m - 1 > 0$).*

Voici la première conséquence de cette relation fondamentale: sur la surface R_t^j , il n'y a pas de points singuliers essentiels, car il n'y avait pas

de tels points sur R_i^0 . — Au contraire, les pôles de ces deux branches, $\zeta_0(t)$ et $\zeta_j(t)$, de la fonction étudiée ne sont plus forcés à prendre des positions marquées par symétrie mutuelle. Cela dépend tout simplement de l'alternative: s'effectue-t-il, dans le plan ζ , le prolongement analytique de l'élément initial (5₀) par la transformation de symétrie propre, c'est-à-dire: par rapport à une droite, ou bien — par l'inversion par rapport à un cercle (comp. les form. 7₁ et 7₂).

Deuxièmement, il vient de la même relation démontrée plus haut: au système (6) des points de ramification de la surface R_i^0 correspondra sur la surface R_i^j un système tout pareil des *points de ramification*:

$$H_1^j, H_2^j, \dots, H_q^j, \quad (6_j)$$

les points correspondants de ces systèmes (6) et (6_j), c'est-à-dire les points avec les mêmes indices inférieurs possèdent le même ordre de multiplicité et occupent des positions symétriques par rapport à la droite frontière $\lambda^{(j)}$. Ainsi, la surface R_i^j apparaît ici comme une simple image de R_i^0 , fournie comme par réflexion dans un miroir.

Évidemment, on peut faire prolonger l'élément initial (5₀) non seulement au travers de la droite frontière choisie auparavant, mais encore — ne changeant que le chemin à suivre et en le faisant traverser des autres droites frontières $\lambda^{(j)}$ — parvenir de la même manière aux nouveaux éléments analytiques de la fonction cherchée (5):

$$\{R_i^j; \zeta_j(t)\}; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5_j)$$

Rappelons que toutes les surfaces R_i^j sont ramifiées algébriquement et qu'elles ont la même structure analytique. Du reste, au point de vue purement géométrique, ce sont des surfaces complètement identiques. — Et cependant, il faut les distinguer soigneusement. On ne peut pas les faire coïncider, les valeurs que prend la fonction $\zeta(t)$ aux *points homologues* de ces surfaces étant différentes en général. Ce fait se manifeste d'ailleurs dans la structure géométrique même de la *surface totale de Riemann* de la manière suivante: chaque surface partielle R_i^j est „collée“ à R_i^0 le long d'une autre droite frontière $\lambda^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) — à savoir: celle au travers de laquelle on a effectué le prolongement analytique considéré.

Par ce premier pas sur la voie d'étendre le domaine de départ R_i^0 de la fonction étudiée, nous sommes arrivés d'une manière naturelle au domaine dont la composition peut être représentée symboliquement:

$\overline{R_i^0} + \sum_{j=1}^n R_i^j$. La surface ainsi créée compte déjà $q(n + 1)$ points algébriques de ramification (6) et (6_j). Elle est limitée par $n(n - 1)$ droites frontières λ^{jk} ($j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, n - 1$), situées le long de l'axe réel du plan t . Il est facile à saisir, en considérant les *symétries* et les *inversions* convenables, que ces droites λ^{jk} se transforment, dans le plan ζ ,

de nouveau, en segments rectilignes ou en arcs des cercles; ils sont, en général, distincts aussi bien les uns des autres, que des segments ou arcs $A_{\zeta}^{\psi} B_{\zeta}^{\psi}$, définis au n° 1.

Il est clair que ce procédé du prolongement analytique ne se termine pas par cette étape; on peut le continuer indéfiniment, en s'aidant toujours du principe maniable de symétrie. En général, le résultat de chaque prolongement sera différent de ceux qui l'ont précédé, car dans le plan ζ , chaque fois, il faut effectuer l'inversion par rapport à un autre arc, ne coïncidant — sauf les cas spéciaux — avec aucun arc qui a joué ce rôle antérieurement. Donc, il en résulte que la *surface de Riemann*, relative à notre fonction $\zeta(t)$, présentera, dans le cas général, *une infinité de feuilletts*. De là, la conclusion importante: la fonction cherchée $\zeta(t)$, n'ayant sur sa surface de Riemann, nulle part, d'autres points singuliers que des *pôles et points algébriques de ramification*, n'est cependant une fonction algébrique, mais — quelques cas spéciaux exclus — c'est une *fonction multiforme transcendante*.

D'ailleurs, nous n'aurons plus besoin d'examiner dans tous les détails la structure, très compliquée sans doute, de cette surface de Riemann, car nous démontrerons dans la suite que la *fonction transcendante étudiée* $\zeta(t)$ *devient linéairement polymorphe* (voir n° 7) déjà sur une surface de Riemann relativement très simple, à savoir: *sur une surface algébrique, à n feuilletts seulement*. \triangle

5. Pour démontrer le théorème énoncé plus haut, envisageons — parmi les éléments analytiques (5_j) , déterminés au numéro précédent — deux éléments, choisis d'ailleurs tout arbitrairement:

$$\{R_{i_1}^{j_1}, \zeta_{j_1}(t)\} \text{ et } \{R_{i_2}^{j_2}, \zeta_{j_2}(t)\}; (j_1 \neq j_2).$$

Nous allons confronter les valeurs que prennent les déterminations $\zeta_{j_1}(t)$ et $\zeta_{j_2}(t)$ aux points homologues. Rappelons que deux *points homologues*, situés respectivement sur $R_{i_1}^{j_1}$ et $R_{i_2}^{j_2}$, proviennent par symétrie d'un même point de la surface R_i^j , le premier par rapport à $\lambda^{(j_1)}$ et le second par rapport à $\lambda^{(j_2)}$. Nous élargirons encore cette définition en entendant par points homologues aussi deux points qui sont homologues, chacun pour sa part, au même point, du reste quelconque.

Les points homologues ont des affixes égales, mais il vient immédiatement de la définition même de ces points que le réciproque n'est pas vrai. Observons, par exemple, qu'aucune surface partielle R_i^j de la surface totale de Riemann, étudiée ici, ne renferme des points homologues.

Il est à peine utile d'insister sur ce que la fonction $\zeta(t)$ prend, aux points homologues des surfaces $R_{i_1}^{j_1}$ et $R_{i_2}^{j_2}$, en général, des valeurs différentes: $\zeta_{j_1}(t) \neq \zeta_{j_2}(t)$. Mais l'essentiel est tout autre: c'est le fait que ces valeurs, même étant différentes, peuvent être toutefois exprimées, comme nous l'avons prouvé au n° 3, respectivement à l'aide de deux formules qui renferment la même valeur variable $\zeta_0(t)$ (voir (7_1) et (7_2)), et qui

d'ailleurs ne diffèrent que par les coefficients; (dans le cas de la surface R_1^* , ces coefficients représentent les paramètres déterminant le cercle (7_1^*) ou la droite (7_2^*) dont une partie fait le $A_{\zeta}^{(j_1)}B_{\zeta}^{(j_1)}$; dans le cas de R_2^* , ces coefficients se rapportent à $A_{\zeta}^{(j_2)}B_{\zeta}^{(j_2)}$).

Il suffit maintenant d'éliminer $\zeta_0(t)$ entre les expressions mentionnées plus haut, pour en obtenir la formule définitive, d'une grande importance pour tout ce qui va suivre:

$$\zeta_{j_2} = \frac{a_{12}\zeta_{j_1} + b_{12}}{c_{12}\zeta_{j_1} + d_{12}}. \quad (8)$$

Donc, les valeurs, prises aux points homologues par les deux branches examinées de la fonction $\zeta(t)$, sont toujours liées par une *transformation homographique* (8); (qui, dans des cas particuliers, peut se réduire en une simple *transformation linéaire*).

Ce résultat est susceptible d'une généralisation immédiate. En effet, les transformations homographiques du type (8), formées avec les coefficients propres, sont valables, et sans aucune restriction, pour chaque couple de points homologues de la surface totale de Riemann (ces points y étant situés n'importe où). — Cela résulte de ce qu'en vertu du procédé décrit — chaque prolongement analytique de notre élément initial (5_0) , le plus „éloigné” y compris, se réduit en une „chaîne” convenable de „symétries” ou d’„inversions”. Mais alors, les valeurs de $\zeta(t)$, attachées à deux points homologues, et d'ailleurs quelconques, peuvent être aussi „enchaînées” par un *nombre pair* de symétries ou inversions. Et par là, la démonstration est finie, car chaque „produit” de deux symétries ou inversions engendre, comme on sait, une *transformation homographique*, du type (8).

Ce résultat même renferme déjà en germe le théorème, annoncé plus haut, sur la *polymorphie linéaire* de la fonction étudiée $\zeta(t)$ — voir n° 7.

En ce moment observons encore — ce qui est d'ailleurs immédiat — que toutes ces transformations forment un *groupe infini discontinu*. Ce groupe est engendré par n transformations convenablement choisies. Pour obtenir ces transformations spéciales, dites *génératrices*, on construit les n „produits”, chacun à deux symétries ou inversions successives, effectuées par rapport aux segments de droites ou arcs de cercles $A_{\zeta}^{(j)}B_{\zeta}^{(j)}$ (qui forment, dans le plan ζ , un sous-ensemble des frontières du domaine envisagé). Si les premières symétries ou inversions sont prises les mêmes dans tous les n „produits” (par exemple, en posant $j = j_1$), les deuxièmes, au contraire, doivent épuiser tous les cas possibles, exprimés par les égalités: $j = 1, 2, \dots, n$.

6. En vue des applications prochaines, il convient de distinguer les cas où le groupe de transformations (8) se simplifie considérablement, en se réduisant aux groupes de transformations linéaires.

1°. La fonction auxiliaire $\zeta = \varphi(z)$ fait transformer l'arc donné AB en un système des segments rectilignes ou en un système des arcs circulaires concentriques. — On s'aperçoit immédiatement que, sous l'hypothèse admise, le point à l'infini $\zeta = \infty$ constitue le *point fixe* pour toutes les transformations envisagées ici (voir n° 5). Or les transformations, ayant un point fixe à l'infini, sont de la forme:

$$\zeta_{j_2} = a_{12}\zeta_{j_1} + b_{12} \quad (8_1)$$

(on pourrait d'ailleurs obtenir directement ce résultat en partant des formules (7₁) et (7₂)).

2°. Toutes les images ζ de l'arc AB sont situées ou bien sur les rayons issus de l'origine $\zeta = 0$, ou bien — sur les circonférences concentriques de centre $\zeta = 0$. — Dans ces cas-là, les transformations (8) deviennent évidemment: ou des rotations de centre $\zeta = 0$, ou des homothéties de même centre:

$$\zeta_{j_2} = a_{12}\zeta_{j_1}. \quad (8_2)$$

3°. Les images en question se trouvant sur des droites parallèles, on parvient à la relation:

$$\zeta_{j_2} = \zeta_{j_1} + b_{12}. \quad (8_3)$$

4°. Enfin, on obtient le groupe le plus simple possible, ne renfermant que la transformation identique:

$$\zeta_j = \zeta_1; \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (8_4)$$

lorsque toutes les images de l'arc AB sont situées sur une seule droite ou sur une seule circonférence.

7. L'étude qui nous a conduit à la relation essentielle (8), suggère l'idée d'introduire, comme élément intermédiaire de notre analyse, l'expression différentielle suivante, dite la „*dérivée*” de Schwarz:

$$D(\zeta)_t \equiv \frac{2\zeta^m \zeta' - 3\zeta''^2}{2\zeta'^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\lg \frac{d\zeta}{dt} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \left(\lg \frac{d\zeta}{dt} \right) \right]^2 = \Psi(t). \quad (9)$$

Comme on sait et comme il est facile à vérifier, *cet algorithme différentiel reste invariable* par rapport à chaque substitution homographique de la fonction $\zeta(t)$:

$$D \left(\frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} \right)_t = D(\zeta)_t. \quad (10)$$

Observons que par rapport aux transformations linéaires (8₁₋₃), il existe des algorithmes différentiels fort simples qui jouissent déjà de cette propriété d'invariabilité — à savoir:

$$\frac{d}{dt} \left[\lg \frac{d}{dt} (a\zeta + b) \right] = \frac{d}{dt} \lg \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\zeta''}{\zeta'} = \Psi_1(t); \quad (11_1)$$

$$\frac{d}{dt} \lg(a\zeta) = \frac{d}{dt} \lg \zeta = \frac{\zeta'}{\zeta} = \Psi_2(t); \quad (11_2)$$

$$\frac{d}{dt} (\zeta + b) = \frac{d\zeta}{dt} = e^{i\alpha} \Psi_3(t). \quad (11_3)$$

Pour conserver l'uniformité des notations introduites — y compris le cas le plus simple (S_1), où déjà la fonction $\zeta(t)$ même reste invariable par rapport à ces transformations — nous posons dans ce cas:

$$\zeta(t) + C_0 = e^{i\alpha} \Psi_4(t), \quad (11_4)$$

(les constantes C_0 et α sont choisies de sorte que la fonction $\Psi_3(t)$ prenne, sur les droites frontières λ , des valeurs réelles, et $\Psi_4(t)$ — ou bien des valeurs réelles, ou bien des valeurs ayant un module constant).

Examinons maintenant les propriétés fondamentales de ces fonctions $\Psi(t)$ ou $\Psi_{1-4}(t)$, définies par les formules (9), resp. (11₁₋₄). La fonction $\Psi(t)$, invariante par la transformation homographique (form. 10), admet par conséquent des valeurs identiques aux points homologues de la surface de Riemann, relative à la fonction étudiée $\zeta(t)$ (voir n° 5, où nous avons démontré que les valeurs de $\zeta(t)$ aux points homologues sont liées par des relations homographiques (8)). Évidemment, ces propriétés appartiennent de même aux autres fonctions: $\Psi_{1,2,3,4}(t)$. — En raison de cela, quand il s'agit de ces fonctions, disparaissent toutes sortes de distinctions entre les points qui sont homologues. Il est donc naturel de les traiter comme identiques — ce qui entraîne en conséquence l'identification complète des surfaces $R_i^?$:

$$R_i^1 \equiv R_i^2 \equiv \dots \equiv R_i^n \equiv R_i^*, \quad (12)$$

autant qu'elles apparaissent ici comme pièces inhérentes à la surface de Riemann des fonctions $\Psi(t)$ et $\Psi_{1,2,3,4}(t)$. Ce modèle commun R_i^* des surfaces envisagées (12) se rattache donc à la surface initiale R_i^0 non pas le long d'une seule droite frontière, mais le long de toutes les n droites: $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(n)}$. Par là même, les surfaces: R_i^0 et son „image par réflexion” R_i^* (voir n° 4) — étant, pour ainsi dire, „collées” par leurs n bords correspondants — forment ensemble une nouvelle surface que nous désignons tout court:

$$R_i \equiv R_i^0 + \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} + R_i^*. \quad (13)$$

Tel est le domaine d'uniformité des fonctions: $\Psi(t)$ et $\Psi_{1-4}(t)$. Cette surface R_i , de structure nette et assez simple, à n feuilletts seulement, ne possède plus des frontières et, par conséquent, constitue une surface fermée, algébrique. Cela résulte du reste des formules (9) et (11) mêmes, qui prouvent que les fonctions $\Psi(t)$ et $\Psi_{1-4}(t)$ ne peuvent présenter d'autres points singuliers que des pôles et points algébriques de ramification, en nombre fini.

Ainsi nous sommes parvenus à démontrer le théorème, annoncé à la fin du n° 4:

Théorème. Soit $z = f(t)$ — la fonction analytique cherchée réalisant la représentation conforme et biunivoque du demi-plan supérieur de la variable complexe t sur tout l'extérieur de l'arc AB , tracé sur le plan z . S'il existe une *fonction algébrique* $\zeta = \varphi(z)$ qui transforme cet arc AB en n segments de droites ou arcs de cercles, il existe de même un certain *invariant différentiel de la fonction composée* $\zeta(t) = \varphi[f(t)]$ — voir les form. (9) et (11) — qui sera, lui aussi, une *fonction algébrique* $\Psi(t)$ ou $\Psi_{1+4}(t)$, et du même ordre de multiplicité n que la fonction auxiliaire donnée $\zeta = \varphi(z)$.

De plus, la structure de la surface de Riemann R_t de ces fonctions $\Psi(t)$ et $\Psi_{1+4}(t)$ (c'est-à-dire: son *genre*, le *nombre* et l'*ordre des points de ramification*, etc. — voir n° 10), est intimement rattachée à la structure de la surface de Riemann R_z , relative à la fonction $\zeta = \varphi(z)$.

Observons que la fonction $\zeta(t)$ même, sauf le cas 4° du numéro 6, n'est point uniforme sur cette surface R_t . Elle y est *linéairement polymorphe*; cela veut dire précisément que $\zeta(t)$ n'y possède pas des *points singuliers essentiels*, et deuxièmement: lorsque le point t décrit sur la surface R_t une courbe fermée, γ entourant un nombre arbitraire des points de ramification, la fonction $\zeta(t)$ subit une transformation homographique (8), qui peut se réduire dans les cas particuliers à (S_{1+4}) .

8. L'analyse développée plus haut nous montre qu'il suffit de déterminer, sous la forme effective, la fonction $\Psi(t)$, pour réduire par là tout le problème à l'intégration de l'équation différentielle

$$2\zeta'\zeta''' - 3\zeta''^2 - 2\Psi(t) \cdot \zeta'^2 = 0$$

— du troisième ordre, non linéaire (quant aux équations (11_{1+3}) , elles s'intègrent par des quadratures immédiates).

On sait d'ailleurs que l'intégration de cette équation se ramène à celle de l'équation linéaire, du second ordre:

$$T'' + \frac{1}{2}\Psi(t) \cdot T = 0.$$

A savoir: l'intégrale générale $\zeta(t)$ s'exprime à l'aide de deux intégrales particulières $T_1(t)$ et $T_2(t)$ par la formule

$$\zeta(t) = C_1 \frac{T_1(t) + C_2 T_2(t)}{T_1(t) + C_3 T_2(t)}.$$

Ainsi, l'essentiel consiste dans la détermination effective de la fonction $\Psi(t)$ (ou $\Psi_{1+4}(t)$). A ce sujet, il convient de faire quelques observations.

Lorsque le point t passe le long d'une droite frontière λ (t — réel), le point ζ décrit un arc de cercle, ou un segment de droite. Or, on peut toujours, par des simples transformations homographiques (et même,

quelquefois, linéaires), faire représenter ces cercles et droites sur l'axe réel. Par suite, et de plus en conséquence des relations exprimées par les formules (9), (10) et (11₃), les fonctions $\Psi(t)$ et $\Psi_3(t)$ et dans des cas indiqués plus bas, aussi les fonctions $\Psi_{1,2,4}(t)$ — n'admettent que des valeurs réelles pour t réel. De là, par le principe même de symétrie de Schwarz, il vient que ces fonctions prennent des *valeurs conjuguées aux points symétriques*, G et G_* , de la surface R_t :

$$\begin{aligned}\Psi(G_*) &= \overline{\Psi(G)}; & \Psi_3(G_*) &= \Psi_3(G). \\ \Psi_{1,2,4}(G_*) &= \overline{\Psi_{1,2,4}(G)}.\end{aligned}\tag{14}$$

Rappelons que la dernière relation ne s'applique qu'à des cas où tous les $A_\xi^j B_\xi^j$ sont des segments rectilignes.

Grâce à cette propriété importante (14), nous sommes débarrassés de la nécessité d'examiner ces fonctions dans leur domaine d'existence R_t tout entier. Il suffit de le faire sur une seule demi-surface, en choisissant une d'entre les deux moitiés symétriques de R_t , par exemple $\overline{R_t^0}$.

Il ne sera, peut-être, inutile d'ajouter que notre assertion (14) n'est point équivalente à $\overline{\Psi(t)} = \Psi(\overline{t})$ (ce qui marquerait l'uniformité de la fonction $\Psi(t)$ sur le plan t même, et alors, ce serait une fonction rationnelle!). Notre assertion est plus faible: il n'y s'agit pas des points symétriques du plan t (c'est-à-dire, points d'affixes conjuguées), mais — des *points symétriques de la surface R_t* (pour la définition précise de ces derniers points — voir n° 3).

Une remarque encore. Quant aux fonction $\Psi(t)$ et $\Psi_3(t)$, la propriété discutée ici se vérifie toujours; au contraire, s'il s'agit des autres fonctions $\Psi_{1,2,4}(t)$, elle peut ne plus subsister. C'est pourquoi, dans un certain nombre des cas particuliers, il sera préférable d'introduire l'*invariant différentiel* de „degré plus élevé“ (plus compliqué) que celui qui est nécessaire pour faire ces fonctions (11) uniformes sur la surface R_t .

De plus, les invariants plus compliqués se légitiment par une plus grande possibilité de transformer les points algébriques de ramification en points réguliers (comparez la succession des expressions: (11₄), (11₃), (11₂), (11₁) et (9)). Quelquefois, on peut en réussir à écarter même tous les points critiques. Mais alors, on parvient à une *fonction rationnelle* de t , dont on sait écrire l'expression analytique sans peine et sous une forme bien effective (voir les exemples I et IV, au n° 14).

9. Dans le cas général, lorsque les procédés spéciaux, dont il a été question à la fin du numéro précédent, échouent, il convient de recourir à l'*uniformisation* des fonctions y envisagées (l'uniformisation des fonctions algébriques réussissant toujours à l'aide des *fonctions automorphes*).

Soit $t = F(w)$ cette fonction qui sert à réaliser l'uniformisation en question:

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= \Phi(w); & t &= F(w); \\ \Psi_{1,2,3,4} &= \Phi_{1,2,3,4}(w); & t &= F_{1,2,3,4}(w), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

les fonctions y écrites étant déjà des fonctions analytiques *uniformes* de la nouvelle variables w (*paramètre uniformisant*).

En changeant maintenant, dans les équations différentielles (9) et (11), la variable indépendante par la relation $t = F(w)$, on parvient à :

$$D(\zeta)_w = \Phi(w) \cdot [F'(w)]^2 + \frac{F'''(w)}{F'(w)} - \frac{3}{2} \left[\frac{F''(w)}{F'(w)} \right]^2; \quad (16)$$

$$\frac{\zeta''(w)}{\zeta'(w)} = \Phi_1(w) \cdot F_1'(w) + \frac{F_1''(w)}{F_1'(w)}; \quad (16_1)$$

$$\frac{\zeta'(w)}{\zeta(w)} = \Phi_2(w) F_2'(w); \quad (16_2)$$

$$\zeta'(w) = \Phi_3(w) \cdot F_3'(w). \quad (16_3)$$

L'intégration de ces équations accomplie, on exprime la fonction cherchée $z = f(t)$ par une *représentation paramétrique, effective* :

$$t = F(w); \quad z = \varphi^{-1}(\zeta) = \varphi^{-1}[\zeta(w)] = z(w). \quad (17)$$

10. Le problème de l'uniformisation des fonctions algébriques dépend intimement du *genre* p des surfaces de Riemann correspondantes. Il se complique extrêmement à mesure que ce genre s'accroît. Dans le cas le plus simple possible $p = 0$ — qui n'est nullement, comme nous allons voir, le nôtre — l'uniformisation peut être déjà obtenue par des fonctions élémentaires, rationnelles.

La *genre de la surface algébrique fermée de Riemann, à n feuillet*, s'exprime par la formule :

$$p = \frac{1}{2}\sigma - n + 1, \quad (18)$$

où σ désigne la somme des ordres de tous les points de ramification. — Appliquons cette formule aux surfaces R_z et R_t . Il est clair que $n_t = n_z = n$, tandis que $\sigma_t = 2\sigma_z$; par suite :

$$p_t = 2p_z + n - 1. \quad (19)$$

Il en résulte immédiatement *le théorème*: $p_t \geq 1$, car évidemment $n = n_z \geq 2$. Plus précisément encore: la surface R_t ne peut être de *genre un* ($p_t = 1$) qu'à condition que la surface R_z soit de *genre nul* ($p_z = 0$). Dans les autres cas, comme il suit de (19): $p_t \geq 3$.

11. Dans ce numéro et dans les suivants, nous examinerons de près le cas: $p_t = 1$, le plus simple et, en même temps, le plus important pour les applications.

Comme nous avons montré (n° 10), dans ce cas-là :

$$p_z = 0; \quad n_z = 2; \quad \sigma_z = 2; \quad (\sigma_t = 4). \quad (20)$$

Ainsi, la fonction auxiliaire $\zeta = \varphi(z)$ ne peut posséder que deux déterminations, et les deux points algébriques de ramification, H_1 et H_2 , d'ordre un. Elle transforme l'arc donné AB en $A\frac{1}{\zeta}B\frac{1}{\zeta}$ et $A\frac{2}{\zeta}B\frac{2}{\zeta}$.

Sans diminuer la généralité du problème, on peut se borner à n'envisager dans le plan ζ que des configurations de trois types suivants:

- (a) deux segments rectilignes, situés sur les rayons issus de l'origine $\zeta = 0$;
- (b) deux arcs de cercles concentriques, de centre $\zeta = 0$;
- (c) deux segments de droites parallèles à l'axe réel.

Les autres configurations se ramènent à celles-ci par des transformations homographiques convenables.

L'*invariant différentiel*, dont le problème exige l'introduction (voir n° 7), sera dans les cas (a) et (b) de la forme (II₂): $\frac{d}{dt} \ln \zeta = \Psi_2(t)$, et dans

le cas (c): $\zeta'(t) = \Psi_3(t)$ (form. II₃). Dans les cas limites, lorsqu'il arrive, dans le plan ζ , que les deux segments s'y trouvent sur une seule droite, ou deux arcs — sur une seule circonférence, nous aurons tout simplement la relation (II₄).

Il est facile à vérifier que ces fonctions $\Psi_{2,3,4}(t)$ prennent, pour t réel, des valeurs réelles — sauf le cas (b), dans lequel la fonction $\Psi_2(t)$ admet des valeurs purement imaginaires. Par conséquent (voir n° 8), dans tous les cas, il suffit d'examiner ces fonctions en se bornant à la seule demi-surface \bar{R}_t^0 .

Or, ayant égard aux restrictions fixées au numéro 2, concernant la position des extrémités de l'arc donné par rapport aux points singuliers de la fonction auxiliaire $\zeta = \varphi(z)$ — nous sommes sûrs que les *ordres des points de ramification* de la fonction $\zeta(t) = \varphi[f(t)]$ seront les mêmes que les ordres des points correspondants de la fonction donnée $\zeta = \varphi(z)$, c'est-à-dire, de premier ordre.

Cela étant, il est immédiat que les développements valables *aux voisinages des points de ramification de la fonction cherchée* $\zeta(t)$, sont de la forme:

$$\zeta(t) = \frac{\mu + |\mu|}{2} \cdot \zeta(t_H) + \sum_{r=\mu}^{\infty} c_r (t - t_H)^{r/2} \quad (21)$$

où t_H désigne l'affixe du point de ramification considéré, (l'entier μ est négatif, lorsque dans le plan ζ l'image du point de ramification correspondant passe à l'infini: $\zeta(t_H) = \infty$).

En partant de ces développements, et de ceux qui se rapportent aux pôles et aux zéros de la même fonction $\zeta(t)$, il est aisé de déterminer des points correspondants des fonctions $\Psi_2(t)$ et $\Psi_3(t)$. C'est ainsi que l'on constate immédiatement, en tenant compte de la form. (21), que tous les qua-

tre points H_1, H_2, \bar{H}_1 et \bar{H}_2 , d'affixes $t_{H_1}, t_{H_2}, \bar{t}_{H_1}$ et \bar{t}_{H_2} , sont aussi pour la fonction $\Psi_3(t)$ des points de ramification d'ordre 1. Quant à la fonction $\Psi_2(t)$, tout cela reste vrai, sauf le cas, où tous les coefficients c_ν , ayant des indices paires, s'annulent: $c_{\nu=2\kappa} = 0$, et de plus $\zeta(t_{H_1}) = 0$ ou bien $\zeta(\bar{t}_{H_1}) = \infty$; (dans ces cas, et dans ces cas seulement, ces points de ramification H se transforment en pôles de la fonction $\Psi_2(t)$).

Quant aux pôles et zéros de la fonction $\zeta(t)$ même, de l'ordre r et de la multiplicité s respectivement, ils se transforment en pôles simples de $\Psi_2(t)$, et de résidus égaux resp. à $-r$ et $+s$. Ensuite, par rapport à $\Psi_3(t)$, les pôles de la fonction $\zeta(t)$ ne changent qu'en augmentant leur ordre d'une unité.

12. Comme nous avons déjà mentionné à la fin du n° 1, les contours des domaines à transformer ne précisent la fonction, réalisant la représentation demandée, qu'à une transformation homographique près, à coefficients réels.

Pour enlever ce caractère arbitraire et pour simplifier l'aspect formel du problème, il suffit de *normaliser* d'une façon appropriée la fonction de la représentation cherchée, $\zeta(t)$, en y fixant trois de quatre paramètres réels qui déterminent la position, sur la surface R_t , des points algébriques de ramification.⁴⁾ Dans le cas simple, envisagé ici ($p_t = 1$), nous posons (comparer aussi la fig. 2):

$$t_{H_1} = i; \quad t_{H_2} = \frac{i}{k'}; \quad \bar{t}_{H_1} = -i; \quad \bar{t}_{H_2} = -\frac{i}{k'}; \quad (21^*)$$

le quatrième paramètre réel doit rester variable pour pouvoir faire satisfaire à toutes les conditions géométriques du problème (nous l'avons désigné par $1:k'$, et non par k , en vue de simplifier l'écriture ultérieure des fonctions elliptiques dont nous ferons usage courant dans la suite).

13. Dans le cas actuel ($p_t = 1$), la surface R_t est de *genre un* (voir n° 10 et 11). Comme on sait, toutes les fonctions uniformes sur une telle surface peuvent être uniformisées à l'aide des *fonctions elliptiques* (c'est pourquoi, on appelle les surfaces de Riemann de ce genre — „surfaces elliptiques“).

D'ailleurs, il reste toujours une grande liberté de choix d'une telle ou telle fonction elliptique, menant à l'effet. Dans la suite, nous ne ferons usage que des *fonctions elliptiques, dites de Jacobi*, et de leurs expressions analytiques par les *fonctions entières périodiques*, dites „*théta*“.⁵⁾ car ces

4) Observons encore une fois que la fonction $\zeta(t)$ même (ainsi que sa surface de Riemann, tout entière) possède des points de ramification en nombre infini, mais tous de mêmes affixes que ceux qui font partie de la surface simple algébrique R_t .

5) Ayant égard à une grande variété entre leurs notations, même les plus usuelles, remarquons que dans tout ce travail, nous suivons, d'une manière conséquente, le système des notations qu'avaient employé Tannery et Molk dans leur oeuvre: „Fonctions Elliptiques“ (Paris 1893—1902).

fonctions semblent être les mieux appropriées aux diverses applications, et particulièrement, aux exigences des calculs numériques, souvent fort pénibles.

Nous précisons donc la form. (15) sous la forme:

$$t = F_{2,3}(w) = -i \operatorname{sn}(2iKw; k') = \frac{\operatorname{sn}(2Kw; k)}{\operatorname{cn}(2Kw; k)} = \frac{1}{\sqrt{k'}} \cdot \frac{\vartheta_1(w | \tau)}{\vartheta_2(w | \tau)}. \quad (22)$$

Cette fonction elliptique $F(w)$ qui est l'inverse de l'intégrale elliptique de première espèce:

$$2Kw = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1+k'^2t^2)}}, \quad (23)$$

$$\left(K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}; K' = K(k'); k' = \sqrt{1-k^2} \right)$$

possède deux périodes: l'une réelle et l'autre purement imaginaire; elles sont égales respectivement à 1 et 2τ , où:

$$\tau = i \frac{K'}{K};$$

inversement:

$$K = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2(0 | \tau) \text{ et } \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_4(0 | \tau)}{\vartheta_3(0 | \tau)}. \quad (24)$$

Le fait que la fonction (22) uniformise localement les fonctions étudiées s'explique très facilement: elle admet, aux voisinages des points (voir la fig. 2):

$$\left. \begin{aligned} w_{H_1} &\equiv w_{\bar{H}_1} \equiv \frac{\tau}{2} \pmod{1, \tau} \\ w_{H_2} &\equiv w_{\bar{H}_2} \equiv \frac{1+\tau}{2} \pmod{1, \tau}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

qui représentent des images des points de ramification (21*) — des développements en séries entières, de forme

$$t - i = 2ik^2K^2 \left(w - \frac{\tau}{2} \right)^2 + \dots, \quad (26)$$

donc, ne renfermant pas le terme en premier degré.

Quant à sa propriété principale, à savoir: de réaliser l'uniformisation non seulement localement, mais aussi globalement, sur toute la surface de

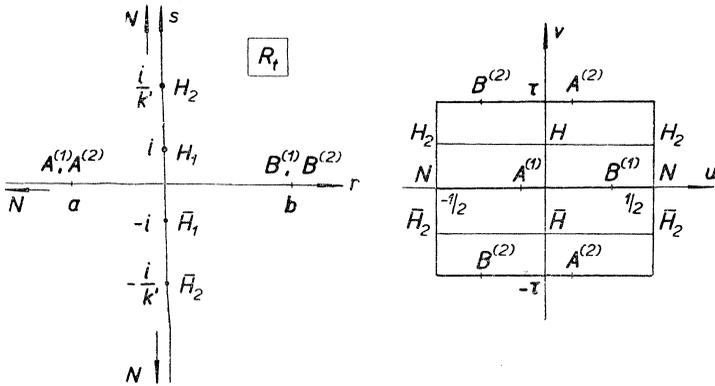


Fig. 2.

Riemann R_t — elle tient à ce que la fonction (22) réalise la représentation biunivoque de chaque *rectangle de périodes*⁶⁾ sur toute la „surface elliptique“ de Riemann, à deux feuillets, R_t ; (ce que montre, d’une manière schématique, la figure 2). — Cette représentation est conforme partout, sauf les points (25), où (voir 26): $F'_{2,3}(w) = 0$.

Ajoutons en outre que la fonction elliptique (22), du second ordre, impaire, et qui n’a dans un rectangle de périodes que deux pôles simples, aux points $w \equiv \frac{1}{2} \pmod{1, \tau}$, et deux zéros simples, aux points $w \equiv 0 \pmod{1, \tau}$ — prend des valeurs égales non seulement aux *points congruents* (mod $1, 2\tau$), mais aussi aux points symétriques par rapport à chacun de points (25).

Insistons de plus sur ce qu’il est, en général, préférable d’introduire le *paramètre uniformisant* w directement aux équations différentielles (16_2 ou 16_3), car on y supprime, par là, les points de ramification. — Dans le cas examiné ($p_t = 1$), les deuxièmes membres de ces équations étant des fonctions elliptiques, il est relativement aisé de les exprimer, sous la forme finie et effective, par les fonctions *théta* de Jacobi et leurs *dérivées logarithmiques*. Observons ici que l’on connaît deux modes de décomposition des fonctions elliptiques en éléments simples (analogie avec décomposition d’une fonction rationnelle en fractions simples): en facteurs simples, exprimés par fonctions *théta*, ou en somme des dérivées logarithmiques de ces fonctions. Pour établir cette décomposition sous la première forme, il est nécessaire de connaître tous les pôles et zéros qui sont

⁶⁾ Comme on sait, le „domaine du rectangle de périodes“ ne contient qu’un côté de chaque couple des côtés opposés; quant à ses sommets, on ne compte au domaine propre qu’un seul — celui qui fait l’intersection de deux côtés englobés au domaine.

situés dans un seul *rectangle de périodes*. La deuxième, au contraire, n'exige que la connaissance des pôles seuls, mais alors il faut connaître aussi leurs *parties principales*. Tantôt l'une, tantôt l'autre forme est donc préférable.

Il est clair que les pôles et zéros de la fonction $\Psi_{2,3}(t)$ étant connus (voir n° 11), et la fonction (22) fixée, on peut déjà déterminer les pôles et les zéros des deuxièmes membres des équations (16₂ ou 16₃), et par suite établir, sous l'une ou l'autre *forme effective*, leurs expressions analytiques. Cela étant, l'intégration se fait par les fonctions elliptiques et fonctions *théta* (voir l'exemple II au numéro suivant).

14. Pour ne pas se limiter aux considérations générales et, de plus, pour montrer la mise en œuvre de la méthode développée dans ce travail, nous allons maintenant l'appliquer à la recherche des solutions de quelques exemples. — Bien que, dans tous les exemples, le genre de notre surface fondamentale de Riemann R_t est le même ($p_t = 1$), le mode dont il y faudra appliquer la méthode générale, sera chaque fois quelque peu différent.

Exemple I. *Trouver la fonction analytique réalisant la représentation conforme et biunivoque du demi-plan t sur tout l'extérieur d'un arc quelconque de parabole.*⁷⁾

Dans le plan $z = x + iy$ est donné un arc AB de parabole, appartenant à la famille à un paramètre η_0 : $y^2 = 4\eta_0^2 x + 4\eta_0^4$. — La fonction

$$\zeta = \xi + i\eta = \varphi(z) = \sqrt{z}, \quad (27)$$

dont les points de ramification sont: $z_{u_1} = \infty$ et $z_{u_2} = 0$ — transforme cet arc AB en deux segments $A_\xi^{\text{①}} B_\xi^{\text{①}}$ et $A_\xi^{\text{②}} B_\xi^{\text{②}}$, situés sur les droites $\eta = \pm \eta_0$, symétriquement par rapport au point $\zeta = 0$.

La *polymorphie linéaire* de la fonction fondamentale (5) se manifeste, cette fois, par le groupe simple de *translations*, du type (8₃), à savoir:

$$\zeta_2 = \zeta_1 - 4i\eta_0. \quad (28)$$

Il est donc immédiat que (11₃): $\zeta'(t) = \Psi_3(t)$ forme déjà l'invariant différentiel de ce groupe. — Dès lors, deux procédés s'offrent à suivre.

Le premier, plus typique, c'est l'uniformisation, de $\Psi_3(t)$ par les fonctions elliptiques. Mais dans cet exemple, l'autre procédé, indiqué au n° 8, se montre plus approprié. Son essentiel consiste en ceci que l'on passe à l'invariant „plus haut“:

$$\Psi_1(t) = \frac{\zeta''(t)}{\zeta'(t)} = \frac{d}{dt} \lg \frac{d\sqrt{z}}{dt} = \frac{f''(t)}{f'(t)} - \frac{1}{2} \frac{f'(t)}{f(t)}, \quad (29)$$

⁷⁾ Voir plus haut note 1); il y faut cependant tenir compte d'un certain manque de conformité entre les notations employées ici et dans le travail y cité.

(l'algorithme intermédiaire $\frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)}$ n'est pas convenable, car il ne reste pas invariable par rapport au groupe de translations).

La fonction $z = f(t)$ n'ayant dans le domaine \overline{R}_t^0 des points de ramification, il vient de la form. (29) et des remarques générales, faites au n° 11, que la fonction $\Psi_1(t)$ doit être une *fonction rationnelle*. D'ailleurs, on arrive aux mêmes résultats en formant les développements de $\zeta(t)$, valables aux voisinages des points (21*). Pour les obtenir, il faut songer à ce que la fonction $z = f(t)$ possède au point H_1 un pôle simple, et au point H_2 — un zéro simple. Par suite (comp. 21):

$$\zeta(t) = \sqrt{f(t)} = 4im\eta_0 + (t - t_H)^{\mp \frac{1}{2}} \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_{2\alpha \mp 1} (t - t_H)^\alpha, \quad (30)$$

où: $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $c_{2\alpha \mp 1}$ — coefficients réels, et $c_1 \neq 0$; l'exposant $-\frac{1}{2}$ se rapporte à un ensemble infini des points de ramification de la fonction $\zeta(t)$, situés par-dessus des points H_1 et \overline{H}_1 , tandis que l'exposant $+\frac{1}{2}$ concerne les points qui se trouvent au-dessus de H_2 et \overline{H}_2 .

Il vient de ce même développement que la fonction $\Psi_1(t)$ a, aux points (21*), des *pôles simples* dont les *résidus* sont égaux resp. à $-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. De plus, elle a des *pôles simples avec les résidus = 1* aux points $t = a$ et $t = b$. Ce sont déjà tous les pôles possibles de cette fonction. Il s'ensuit donc, ayant égard encore à ce que le point $t = \infty$ forme, pour $\Psi_1(t)$, le *zéro simple* (cf. form. 4 et 29), que sa décomposition en fractions simples se présentera sous la forme:

$$\frac{\zeta''(t)}{\zeta'(t)} = \frac{1}{t-a} + \frac{1}{t-b} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{t-i} + \frac{3}{t+i} + \frac{1}{t-\frac{i}{k'}} + \frac{1}{t+\frac{i}{k'}} \right). \quad (31)$$

En intégrant cette équation, il faut tenir compte de la normalisation admise: $\zeta(H_2) = \zeta\left(\frac{i}{k'}\right) = 0$; par conséquent:

$$\zeta(t) = c \int_{i:k'}^t \frac{(t-a)(t-b) dt}{(1+t^2) \sqrt{(1+t^2)(1+k'^2 t^2)}}. \quad (32)$$

Chaque intégration faisant entrer des constantes, leur nombre peut dépasser le nombre de paramètres nécessaires pour obtenir toutes les configurations géométriques possibles et conformes au problème traité. Tel est le cas étudié: l'expression (32) renferme quatre constantes réelles, tandis que le nombre de paramètres indépendants, comme il est facile à s'apercevoir, doit être égal à trois. Cela tient à ce qu'il faut ici satisfaire à la condition géométrique évidente: les deux bords opposés de la cou-

pure $A_{\zeta}^{(1)}B_{\zeta}^{(1)}$ (et de même $A_{\zeta}^{(2)}B_{\zeta}^{(2)}$) doivent constituer un *contour fermé*, ce qui exige analytiquement que l'intégrale (32), prise tout le long de l'axe réel ($-\infty < r < +\infty$), soit égale à zéro. De là vient la relation:

$$\frac{1}{ab} = 1 - \frac{k^2 K}{K - E}; \quad ab \leq -1; \quad \left(E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 s^2}{1 - s^2}} ds \right). \quad (33)$$

De plus, l'image ζ_1 de l'arc AB se trouvant sur la droite $\eta = \eta_0$ ($\text{Im } \zeta_1(r) = \eta_0$), on peut exprimer le paramètre c comme il suit:

$$0 \leq c = \frac{2\eta_0}{\pi} (E - k'^2 K) \leq \frac{2\eta_0}{\pi} k^2. \quad (34)$$

C'est ainsi qu'il ne reste, en effet, que trois paramètres indépendants, p. ex.: η_0 , k' et a (ou b).

Exemple II. Arc d'ellipse.

Considérons, dans le plan z , une famille d'ellipses confocales, dont les foyers sont situés aux points $z = \mp ih$ et dont les axes sont égaux à $\varrho_1 + \varrho_2$ et $\varrho_1 - \varrho_2$; ($4\varrho_1\varrho_2 = h^2$).

La fonction algébrique auxiliaire

$$\zeta = \varphi(z) = \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - h^2}), \quad \left(z = \zeta + \frac{h^2}{4\zeta} \right) \quad (35)$$

transforme un arc AB , arbitrairement choisi sur une ellipse appartenant à la famille indiquée, en deux arcs $A_{\zeta}^{(1)}B_{\zeta}^{(1)}$ et $A_{\zeta}^{(2)}B_{\zeta}^{(2)}$, situés sur les cercles concentriques: $|\zeta| = \varrho_1$ et $|\zeta| = \varrho_2$.

Il en résulte que *l'invariant différentiel*, se rapportant au cas actuel, a la forme (11₂). Cependant, il sera mieux de s'appuyer sur l'équation (16₂) qui renferme déjà des fonctions uniformisées. — Cherchons à décomposer son deuxième membre $\Phi_2(w) \cdot F_2'(w)$ en éléments simples (n° 12).

C'est une *fonction elliptique*.

D'abord, tous les points (25) (qui forment les images des points de ramification de la fonction $\zeta(t)$), deviennent *points réguliers* du produit étudié. Pour montrer cela, envisageons, par exemple, le point $w_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\tau$ et écrivons le développement, valable à son voisinage (voir form. 26):

$$\begin{aligned} \Phi_2(w) &= \frac{f'(t)}{\zeta(t)} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{f'(t)}{2\zeta(t)} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - h^2}} \right) = \\ &= \frac{C_{-1}}{w - \frac{1}{2}\tau} + C_0 + C_1 \cdot (w - \frac{1}{2}\tau) + \dots \end{aligned} \quad (36)$$

d'autre part (voir form. 22), la dérivée:

$$\frac{dt}{dw} = F'_2(w) = \frac{2kK}{k'} \frac{\vartheta_3(w|\tau) \vartheta_4(w|\tau)}{\vartheta_2^2(w|\tau)} \quad (37)$$

possède au point $w_{n_1} = \frac{1}{2}\tau$ un zéro simple — ce qui achève la démonstration.

En deuxième lieu, remarquons que les points $w_N \equiv \frac{1}{2} \pmod{1, \tau}$, formant les pôles doubles de la dérivée $F'_2(w)$, sont néanmoins réguliers par rapport au produit $\Phi_2 F'_2$, car le premier facteur Φ_2 y a des zéros doubles (en effet: $t_N = F(\frac{1}{2}) = \infty$ et, d'après (4) et (35); au voisinage de ce point $\zeta = \zeta_N + \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \dots$).

Outre ces points, les fonctions $\frac{\zeta'(w)}{\zeta(w)}$ et $\frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)}$ sont, aux points correspondants, ou bien toutes les deux régulières, ou bien y possèdent des pôles simples et, de plus, avec les résidus égaux.

Par conséquent, en tenant compte des propriétés principales des fonctions $\zeta(t)$ et $t = F'_2(w)$, et de celles qui en résultent immédiatement par le principe même de symétrie de Schwarz, on peut dresser le tableau suivant, où l'on trouve la position de tous les pôles de la fonction elliptique, formant le deuxième membre de l'équation (16₂):

$$\begin{aligned} w \equiv w_\infty = u_\infty + iv_\infty \pmod{1, 2\tau}; & \quad t = \overline{t_\infty}; & \zeta = \infty \\ w \equiv \overline{w}_\infty = u_\infty - iv_\infty \pmod{1, 2\tau}; & \quad t = t_\infty; & \zeta = 0 \\ w \equiv \tau - w_\infty \pmod{1, 2\tau}; & \quad t = \overline{t_\infty}; & \zeta = 0 \\ w \equiv \tau - \overline{w}_\infty \pmod{1, 2\tau}; & \quad t = t_\infty; & \zeta = \infty \end{aligned} \quad (38)$$

Ce sont, comme il est aisé à vérifier, des pôles simples, avec des résidus: $-1, +1, +1, -1$.

Il vient donc de cette analyse:⁸⁾

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(w)}{\zeta(w)} = & -\frac{\vartheta'_1}{\vartheta_1}(w - w_\infty | 2\tau) + \frac{\vartheta'_1}{\vartheta_1}(w - \overline{w}_\infty | 2\tau) + \frac{\vartheta'_4}{\vartheta_4}(w + w_\infty | 2\tau) - \\ & - \frac{\vartheta'_4}{\vartheta_4}(w + \overline{w}_\infty | 2\tau) + A + iB; \end{aligned} \quad (39)$$

d'où:

$$\zeta(w) = -\varrho_1 e^{2i\pi w} \cdot \frac{\vartheta_1(w - \overline{w}_\infty | 2\tau) \vartheta_4(w + w_\infty | 2\tau)}{\vartheta_1(w - w_\infty | 2\tau) \vartheta_4(w + \overline{w}_\infty | 2\tau)}. \quad (40)$$

Dans cette formule, nous avons posé $A = 0$ et $B = 2\pi$ — ce qui est nécessaire pour que les conditions géométriques du problème: $|\zeta(w)| =$

⁸⁾ On trouvera les mêmes résultats, mais obtenus par l'application d'une autre méthode (et exprimés dans les notations un peu différentes) dans le travail: J. BONDERS: „Odwzorowanie podobne zewnętrzza dwóch dowolnych łuków kół na zewnętrzze dwóch kół“, Warszawa 1935, 114—120.

= Const. = ϱ_1 et $\zeta(\frac{1}{2}\tau) = -\zeta(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau) = (-\frac{1}{2}h)$, soient satisfaites. De là, en utilisant les formules connues, concernant les transformations des fonctions *théta*, nous trouverons:

$$h = 2\varrho_1 e^{i\pi(\tau - 2i\varpi_\infty)} \text{ et } \varrho_2 = |\zeta(u + \tau)| = \varrho_1 e^{2i\pi(\tau - 2i\varpi_\infty)} = \frac{h^2}{4\varrho_1}. \quad (41)$$

Ainsi, par le système des formules (35), (40) et (22), nous avons obtenu une représentation paramétrique, et expressément effective, de la fonction cherchée $z = f(t)$.

Exemple III. Arc d'hyperbole.

Envisageons une famille d'hyperboles confocales ayant leurs foyers aux mêmes points que précédemment: $z = \mp h$.

La même fonction auxiliaire (35) transforme aussi un arc arbitraire d'une hyperbole de la famille indiquée — en deux segments, situés sur les rayons issus de l'origine $\zeta = 0$ et faisant avec l'axe réel les angles: $\pm \gamma$.

Au fond, cet exemple ne diffère du précédent que par le fait que dans le cas actuel — au lieu de l'inversion par rapport aux circonférences concentriques $|\zeta| = \text{Const.}$ — nous rencontrons des symétries par rapport à des droites passant par $\zeta = 0$. Il en résulte que dans l'équation différentielle (39), il ne faut que de transposer les résidus de son deuxième membre, à savoir: ils sont maintenant, aux points correspondants, égaux resp. à $-1, -1, +1, +1$.

Par suite, on arrive définitivement à une formule tout analogue à (40). Une différence se manifeste seulement par ceci que toutes les deux fonctions ϑ_4 se trouvent au numérateur, tandis que les ϑ_1 , toutes les deux, sont au dénominateur; et l'autre différence: au lieu du coefficient — $\varrho_1 e^{2i\pi w}$, il y apparaît: $\frac{1}{2} h e^{i\gamma}$; ($\gamma = 2\pi u_\infty$).

Exemple IV. Arc d'un ovale de Cassini.⁹⁾

La fonction auxiliaire

$$\zeta = \varphi(z) = \sqrt{z^2 - h^2} \quad (42)$$

transforme un arc arbitraire AB d'un *ovale de Cassini* $(x^2 + y^2)^2 - 2h^2(x^2 - y^2) = \varrho^4 - h^4$ en deux arcs, situés, d'une manière symétrique, sur la même circonférence $|\zeta| = \varrho$. Par suite de cette configuration particulière, on trouve, d'après n° 6, p. 4°, que la fonction $\zeta(t) = \varphi[f(t)]$ même est déjà une *fonction algébrique, uniforme sur la surface de Riemann „elliptique”* R_1 . Il est donc immédiat, par la form. (42), que la fonction cherchée $z = f(t)$ sera de même une fonction algébrique.

On voit ici clairement, comment dans certains cas, tels que le pré-

⁹⁾ Il semble que la fonction, réalisant la représentation conforme et biunivoque dont il s'agit dans cet exemple, a été établi, pour la première fois, mais en se basant sur des considérations moins générales qu'ici, dans la communication présentée par l'auteur au VI Congrès Polonais de Mathématique en 1948 — voir: Supplément aux Annales de la Soc. Polon. de Mathém., T. XXII, Kraków 1950, 40—42.

sent, on peut — sans aucun calcul, en utilisant seulement la méthode développée dans ce travail — établir aisément la propriété caractéristique de la fonction réalisant la représentation conforme demandée.

Quant à la détermination effective de cette fonction, on pourrait évidemment faire dès lors l'uniformiser par les fonctions elliptiques. Mais, dans ce cas, il s'offre (comparer n° 8 et l'exemple I) un autre point de départ: l'équation différentielle $\frac{\zeta'(t)}{\zeta(t)} = \Psi_2(t)$, car la fonction $\Psi_2(t)$,

dans les conditions actuelles, est déjà une fonction *uniforme sur le plan t* même (on peut s'en convaincre facilement en écrivant, dans la form. (42), sous le signe de radical, le développement en série entière de la fonction $z = f(t)$, aux voisinages des points $t = i$ et $t = i:k'$, et en prenant ensuite sa dérivée logarithmique). C'est donc une *fonction rationnelle* dont les pôles H_1, H_2, \bar{H}_1 et \bar{H}_2 sont *simples* (avec les résidus égaux à $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$).

Comme il est facile à vérifier, outre ces pôles, la fonction $\Psi_2(t)$ a encore des pôles, aussi simples, avec les résidus -1 et $+1$, aux points: $t = t_\infty$ et $t = \bar{t}_\infty$.

En se rendant compte encore de ceci que le point $t = \infty$ est un *zéro double* de la dérivée $f'(t)$, et de $\zeta'(t)$ aussi — nous parvenons, quelques calculs simples effectués, à la formule:

$$\zeta(t) = \varrho e^{i\sigma} \frac{t - \bar{t}_\infty}{t - t_\infty} \sqrt{\frac{(t - i)(k't - i)}{(t + i)(k't + i)}}. \quad (43)$$

D'entre les six paramètres réels qui figurent aux form. (42) et (43), seulement quatre peuvent être indépendants. Pour obtenir la relation qui manifeste ceci, il faut exprimer analytiquement le fait suivant. Soit t_* le point du demi-plan supérieur qui est représenté sur $z = 0$ et, par conséquent, sur $\zeta = \pm ih$. Ainsi, on a: $h^2 + [\zeta(t_*)]^2 = 0$. D'autre part:

$$\zeta'(t_*) = \left[\frac{d\zeta}{dz} \right]_{z=t_*} \cdot f'(t_*) = \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 - h^2}} \right]_{z=0} \cdot f'(t_*) = 0, \quad (44)$$

d'où il vient que t_* est un zéro de $\zeta'(t)$, mais un *zéro simple*, car $f'(t_*) \neq 0$. Par suite, c'est un *zéro double* de l'équation algébrique:

$$h^2(t - t_\infty)^2(t + i)(k't + i) + \varrho^2 e^{2i\sigma} (t - \bar{t}_\infty)^2(t - i)(k't - i) = 0. \quad (45)$$

De là vient la relation cherchée; plus exactement: quatre relations en nombres réels, (44) et (45); et encore: le fait que le point t_* n'est plus, pour la fonction $z = f(t)$, un point de ramification.

En terminant, ajoutons encore une observation générale: dans des nombreux cas spéciaux (comme, par exemple, lorsque l'arc AB est un arc symétrique), les résultats obtenus plus haut, concernant cet exemple et les précédents, subissent des simplifications essentielles.