Czechoslovak Mathematical Journal

Zygmunt Zahorski

Sur les courbes dont la tangente prend sur tout arc partiel toutes les directions

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 1 (1951), No. 3, 105–117

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100023

CZECHOSLOVAK MATHEMATICAL JOURNAL

*Center of Research and Technical Development * Central Mathematical Institute*

VOL. 1(76) * PRAHA, 15. II. 1952 * NO 3

SUR LES COURBES DONT LA TANGENTE PREND SUR TOUT ARC PARTIEL TOUTES LES DIRECTIONS

ZYGMUNT ZAHORSKI, Łódź (Pologne).

(Reçu le 22 mars 1951.)

Il existe une courbe (et même un arc simple et rectifiable) dans E_3 dont la tangente (orientée) prend, sur tout arc partiel, toutes les directions (orientées). Mais si l'on ajoute la condition que la tangente doit exister partout sauf un ensemble dénombrable de points, alors une telle courbe ne peut pas exister.

M. J. Krzyż a posé la problème de l'existence d'une courbe possédant la propriété énoncée dans le titre et M. Cz. Ryll-Nardzewski a démontré, que, si une telle courbe existe et possède une répresentation paramétrique partout différentiable (à dérivée finie), alors l'ensemble des valeurs du paramètre pour lesquels les dérivées premières des toutes les coordonnées sont simultannément égales à zéro est dense. Indépendamment j'ai obtenu le même résultat dont la démonstration facile soit laissée au lecteur (il faut s'appuyer sur le fait que le produit de 3 ensembles G_δ denses est dense). Ensuite j'ai obtenu la réponse à la question concernant l'existence de telles courbes. La réponse est négative si l'on suppose que la tangente existe partout, et même sous les conditions un peu plus faibles. D'autre part on peut construire un arc simple et rectifiable possédant la propriété demandée, mais sous la condition, que sur chaque arc partiel il existe un ensemble de puissance du continu de points auxquels la tangente n'existe pas. Comme on sait [1]), chaque courbe rectifiable possède une représentation paramétrique partout différentiable à dérivées bornées. Si l'on emploie une telle représentation, alors (entre autres) aux points, auxquels la tangente n'existe pas, correspondent les valeurs zéro des dérivées de toutes les coordonnées

[1]) *Choquet, G.:* Application des propriétés descriptives de la fonction contingent à la théorie des fonctions de variable réelle et à la géométrie différentielle des variétés cartésiennes, (Thèse), J. Math. Pures Appl., (9) **26** (1947), 115—226; (1948).

Загорский, З.: О Жордановых кривых обладающих в каждой точке касательной, Математический Сборник **22,** (1948), 3—26.

par rapport au paramètre. La solution exige une précisation de la notion de tangente; parmi les définitions différentes non équivalentes j'en choisis deux; le théorème est vrai pour toutes les deux. Je considère les courbes au sens de Peano-Jordan (comme images continues du segment). Je suppose donc l'existence d'une représentation paramétrique et cela d'une telle représentation qui ne possède pas d'intervalles de constance, c'est-à-dire je suppose que le contredomaine d'un point ne contienne aucun segment, donc (étant fermé) qu'il soit non dense. La transition d'une représentation paramétrique quelconque à une représentation ne possédant pas d'intervalles de constance ne présente pas des difficultés.

Pour les équations de la courbe $x = f_x(t)$, $y = f_y(t)$, $z = f_z(t)$ j'emploie l'abréviation $P = f(t)$, où P désigne le point à coordonnées x, y, z; par $(A; B)$ je désigne le vecteur ayant l'origine au point A et l'autre extrémité au point B. J'appelle quotient des différences d'un vecteur par rapport à t le vecteur qui est le quotient de la différence vectorielle par la différence scalaire de t.

Définition de la droite tangente. Une droite p passant par un point $P = f(t_0)$ de la courbe k définie sous la forme paramétrique pour $t \in [a, b]$ s'appelle tangente à k au point P, si à chaque nombre $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\delta > 0$ tel que l'image de l'ensemble $(t - \delta, t + \delta)\, [a, b]$ soit située dans la somme de l'intérieur d'un cône de révolution au sommet P, à l'axe p et ayant au sommet un angle $< \varepsilon$, plus le sommet P.

Remarque: On ne distingue pas dans cette définition si l'image mentionnée est située d'un côté ou de deux côtés du sommet P. On peut dire plus brièvement que la droite tangente est la limite de la droite sécante.

Définition de l'axe tangent. Un axe (c'est-à-dire une droite orientée) p passant par le point $P = f(t_0)$ de la courbe k, s'appelle tangent à k au point P, s'il est la limite de l'axe passant par P dont la direction et le sens sont ceux du quotient des différences du vecteur $[A; f(t)]$ par rapport à t, où un terme de la différence est le vecteur $[A; f(t_0)]$. A désigne un point constant quelconque, par ex. l'origine des coordonnées.

Dans les cas où j'emploie le mot tangente sans préciser s'il s'agit de la droite tangente ou de l'axe tangent, on peut substituer l'expression ,,tangente" par une de ces expressions et le résultat est le même pour l'axe comme pour la droite tangente. Dans le cas de la droite tangente j'appelle ,,directions" les classes par rapport à la relation du parallélisme ou de l'identité des droites, dans le cas de l'axe tangent j'appelle ,,directions" les classes par rapport à l' orientation égale des droites orientées.

Théorème I. *Si la courbe possède une tangente à l'exception d'un ensemble de points au plus dénombrable, alors il n'est pas possible que la* *tangente prenne deux directions différentes données d'avance sur chaque arc partiel.*

Remarque: Je laisse non résolu le problème si le théorème suivant est vrai: si une courbe possède une droite tangente à l'exception d'un ensemble de points au plus dénombrable, alors l'axe tangent (là où elle existe) ne peut pas prendre deux directions (incl. l'orientation) différentes fixes sur chaque arc partiel.

Démonstration: Considérons la droite passant par les points $f(t)$ et $f(t_0)$ resp. l'axe passant par ces deux points, orienté de $f(t_0)$ vers $f(t)$ si $t_0 < t$ et orienté de $f(t)$ vers $f(t_0)$ si $t_0 > t$. Evidemment cette droite ou cet axe peut ne pas être défini pour certaines valeurs de t(si $f(t) = f(t_0)$) mais en conséquence des hypothèses faites sur la fonction $f(t)$ l'esemble de telles valeurs de t (contredomaine d'un point multiple) est non dense. Donc, malgré cette indétermination, la position limite de la droite ou de l'axe peut être définie par rapport à l'ensemble de valeurs de t, pour lesquelles la droite sécante est déterminée. Il suffit de démontrer que le contredomaine d'une direction (resp. direction et orientation) est un ensemble de classe G_δ. En effet deux ensembles G_δ denses possèdent un point commun, mais au point corréspondant de la courbe la tangente aurait deux directions différentes, ce qui est impossible. Les directions (orientées ou non) peuvent être interprétées d'une manière bien connue comme points sur la surface d'une sphère (indicatrice, l'ensemble des extrémités des vecteurs à l'origine fixe, et à longueur constante, parallèles à la tangente). Dans le cas de *l'axe* tangent l'indicatrice est un ensemble de nombres complexes, parce que l'on peut interpréter les points sur la sphère de cette manière. Dans le cas de la droite tangente l'indicatrice est composée d'un ensemble de couples de points antipodiques sur la sphère; en choisissant un point de chaque couple, on peut placer l'indicatrice sur une hemisphère (d'une manière plus précise, il s'agit d'une hemisphère ouverte plus un demicercle ouvert sur sa frontière plus une extrémité de ce demicercle — ou bien d'une hemisphère fermée avec l'identification convenable des points frontières) — ce qui, comme on sait, est homéomorphe au plan projectif ou à la surface de Möbius. Pour avoir à faire dans les deux cas avec les nombres complexes, nous transformons event. une telle hemisphère de Möbius en une sphère.

Considérons un point quelconque A de l'indicatrice de la droite tangente. La frontière de l'hemisphère de Möbius peut être choisie de manière que le point A ne soit pas situé sur cette frontière. Entourons ce point par un cercle situé sur cette hemisphère et assez petit pour qu'il n'ait pas des points communs avec sa frontière et effectuons une représentation continue de l'hemisphère sur la sphère de sorte que l'intérieur du cercle soit transformé en l'ensemble de tous les nombres complexes finis d'une manière homéomorphe et que sa frontière et le reste de l'hemisphère soient transformés dans le point ∞. Si A' est l'image du point A par cette transformation, alors les contredomaines (en valeurs du paramètre) des points A et A' sont identiques en conséquence de l'homéomorphisme à l'intérieur du cercle au centre A et de la représentation des autres points au nombre ∞. Si $\varphi_n(t)$ est une suite de fonctions du paramètre, dont les valeurs sont les points de l'hemisphère et si $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$, et si enfin $\psi_n(t)$ $\psi(t)$ sont les fonctions que l'on obtient de φ_n, φ par la réprésentation mentionnée plus haut sur la sphère (les valeurs ψ_n, ψ sont des nombres complexes), alors $\psi_n(t) \to \psi(t)$ et si $\varphi_n(t)$ est continue au point t_0, alors $\psi_n(t)$ elle aussi est continue au point t_0. En particulier il suffit donc de démontrer que, si l'ensemble des valeurs de $\psi(t)$ est l'image de l'indicatrice, alors $\psi(t)$ est une fonction de la première classe de Baire, par rapport à l'ensemble des valeurs du paramètre auxquelles la tangente existe; car alors le contredomaine du point A' est un ensemble G_δ.

Nous allons construire une telle suite respective des fonctions $\varphi_n(t)$, continues par intervalles, qui converge vers l'indicatrice. Soit $f(t, \tau)$ le point sur l'hemisphère de Möbius correspondant à la droite passant par les points $f(t)$, $f(\tau)$ si cette droite est déterminée, c'-est-à-dire si $f(t) \neq f(\tau)$. Si l'on suppose que $f(t, \tau)$ est déterminée, elle est continue par rapport à ces variables et déterminée dans un certaine voisinage du point de plan t, τ. Par conséquent l'ensemble des points du plan auxquels cette fonction est déterminée et continue est un ensemble ouvert (par rapport au carré $[a, b] \times [a, b]$). Nous allons considérer la suite des valeurs de $T: t+1,\ t+\frac{1}{2},\ \ldots,\ t+\dfrac{1}{n}$. On peut compléter la définition de la fonction $f(t, t+h)$ définie pour les points t, h, d'un certain ensemble ouvert par rapport à un carré fixe (dont une diagonale est parallèle au axe de coordonnées obliques) de sorte qu'elle soit définie dans tout le plan et qu'elle soit continue à l'extérieur du carré. Cette extension du domaine de définition de f ne change pas la limite $\lim f(t, t+h)$ sur la diagonale, c'est-à-dire pour $t \in [a, b]$. Ayant supposé que la fonction $f(t)$ ne possède pas d'intervalles de constance on voit que dans chaque bande $\dfrac{1}{n+1} < h < \dfrac{1}{n}$ et pour chaque valeur de t il existe une valeur $h(t) \in \left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right)$ pour laquelle $f(t, t+h(t))$ est définie et donc la fonction $f(t, t+h)$ est définie et continue dans un certain entourage du point $(t, h(t))$. On peut supposer que cet entourage soit situé dans la bande considérée et qu'il est un parallélogramme ayant les côtés parallèles aux axes de coordonnées. La projection de ce voisinage sur la droite $h = 0$ est un voisinage (linéaire) du point $(t, 0)$. La somme de ces voisinages recouvre l'intervalle $[a, b]$. Suivant le theorème de Heine-Borel on peut choisir un nombre fini de ces voisinages dont la somme recouvre $[a, b]$. Considérons un système dénombrable d'ensembles T_n (des valeurs du paramètre) denses, dénombrables et disjoints. On peut choisir, dans les voisinages linéaires choisis en nombre fini, d'intervalles fermés, un au plus de chaque voisinage, aux extrémités appartenant à l'ensemble T_n[2]) de sorte qu'ils n'ont pas des points intérieurs communs, et tels que leur somme soit $[a, b]$. En désignant par $I_{n1}, I_{n2}, \ldots, I_{nk_n}$ des intervalles égaux et parallèles (avec les mêmes valeurs de la coordonnée t) aux intervalles choisis plus haut sur axe $h = 0$, contenus dans les voisinages correspondants à deux dimensions, on voit que la fonction $f(t, t+h)$ est continue à l'intérieur des intervalles I_{nk}.

Désignons par $\varphi_n(t)$ la fonction qui, dans la projection de l'intérieur des intervalles I_{nk} sur l'axe $h = 0$, est égale à la fonction $f(t, t+h)$ à l'intérieur des intervalles I_{nk}. Les fonctions $\varphi_n(t)$ sont définies et continues à l'exception d'un nombre fini de points de l'ensemble T_n et l'on a évidemment $\lim\limits_{h\to 0} f(t, t+h) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$. Le domaine d'existence de $\lim \varphi_n(t)$ contient le domaine d'existence de $\lim f(t, t+h)$, la différence de ces ensembles est, d'après la supposition, au plus dénombrable. Les ensembles T_n étant disjoints on voit que, pour chaque t, une fonction φ_n au plus n'est pas définie. L'ensemble des valeurs de la fonction $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ est l'indicatrice plus évent. un ensemble au plus denombrable. Considérons les fonctions $\psi_n(t)$ que l'on obtient de $\varphi_n(t)$ par la transformation de l'hémisphère de Möbius sur la sphère des nombres complexes (dans le cas ou l'on considère l'axe tangent on peut poser $\psi_n(t) = \varphi_n(t)$). Posons $\psi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(t)$ pour les valeurs de t pour lesquelles la tangente existe, c'est-à-dire pour chaque t à l'exception d'un ensemble au plus dénombrable. Pour le contredomaine du point A', c'est-à-dire pour l'ensemble $\{\psi(t) = A'\}$ on a:

$$\{\psi(t) = A'\} - c = \{\Re\psi(t) = \alpha\}\,\{\Im\psi(t) = \beta\} - c,$$

où α et β sont des nombres réelles finis. c est l'ensemble au plus dénombrable des points, auquels la tangente n'existe pas. c étant un F_σ, il suffit donc de démontrer que les deux facteurs sont G_δ. Je vais donner la démonstration pour le premier facteur, la démonstration pour le deuxième facteur étant analogue. On a $\{\Re\psi(t) = \alpha\} = \{\lim\limits_{n\to\infty} \Re\psi_n(t) = \alpha\} = \{\limsup\limits_{n\to\infty} \Re\psi_n(t) \geqq \alpha\}\,\{\liminf\limits_{n\to\infty} \Re\psi_n(t) \leqq \alpha\} - C$, où C est l'ensemble au plus dénombrable de points, auxquels la limite n'existe pas. C étant un F_σ il suffit de démontrer que les deux facteurs sont G_δ, et

[2]) Excepté event. a et b.

pour cela il suffit évidemment de le démontrer pour le facteur $\{\limsup_{n\to\infty} \Re\psi_n(t) \geqq \alpha\}$. La valeur de limsup ne dépendant pas de la manière dont on définit $\Re\psi_n(t)$ aux points d'indétermination, posons dans ces points $\Re\psi_n(t) = -\infty$. On a

$$D = \{\limsup_{n\to\infty} \Re\psi_n(t) \geqq \alpha\} = \prod_{r=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{\infty}\sum_{n=r}^{\infty}\left\{\Re\psi_n(t) > \alpha - \frac{1}{k}\right\}.$$

Mais les points d'indétermination des fonctions $\Re\psi_n(t)$ (après la définition supplémentaire $\Re\psi_n(t) = -\infty$) n'appartiennent pas à l'ensemble $\left\{\Re\psi_n(t) > \alpha - \frac{1}{k}\right\}$, et dans les autres points la fonction $\Re\psi_n(t)$ est continue; donc l'ensemble considéré est ouvert, donc D est un G_δ, *c. q. f. d.*

Théorème II. *Il existe un arc simple et rectifiable, dont l'axe tangent prend sur chaque arc partiel toutes les directions.*

Démonstration: Considérons une fonction $\alpha(t)$ continue et monotone, transformant l'intervalle $[0, 1]$ en lui-même et constante dans les intervalles contigus de l'ensemble de Cantor. Soit $\beta(T)$ une fonction continue réprésentant l'intervalle $[0, 1]$ sur la surface d'une hémisphère fermé, de sorte que $\beta(0) = \beta(1)$, que le point $\beta(0)$ est situé sur la frontière de l'hémisphère que nous fixons p. ex. par les formules $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geqq 0$, et enfin telle que sur aucun intervalle de valeurs de T on n'a pas identiquement $x = 0$. On peut obtenir une telle fonction aisément à partir de la fonction de Peano représentant les intervalles $[0, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, 1]$ sur le carré, en effectuant ensuite une représentation homéomorphe du carré sur l'hémisphère. Le symbole $\beta(T)$ est une abréviation pour $x = \beta_x(T)$, $y = \beta_y(T)$, $z = \beta_z(T)$. La fonction $\beta(\alpha(t))$ est continue, elle représente l'ensemble de Cantor sur l'hémisphère fermée, et elle est constante sur les intervalles contigus de cet ensemble. Considérons la courbe $P = f(t)$, ce qui est une abréviation pour

$$x = f_x(t) = \int_0^t \beta_x(\alpha(\tau))\, d\tau,\ y = f_y(t) = \int_0^t \beta_y(\alpha(\tau))\, d\tau,\ z = f_z(t) = \\ = \int_0^t \beta_z(\alpha(\tau))\, d\tau.$$

La continuité des fonctions sous le signe d'intégration entraîne que

$$f_x'(t) = \beta_x(\alpha(t)),\ f_y'(t) = \beta_y(\alpha(t)),\ f_z'(t) = \beta_z(\alpha(t)).$$

Ces dérivées étant les composantes d'un vecteur de longueur 1 la courbe $P = f(t)$ possède dans chaque point un axe tangent et son indicatrice est l'hémisphère fermée (ceci est vrai même si l'on se borne aux valeurs de t appartenant à l'ensemble de Cantor). Aux intervalles contigus de l'ensemble de Cantor correspondent les segments rectilignes de la courbe. La courbe considérée est un arc simple et elle continue de l'être même si l'on ajoute des segments tangents au point initial et final de la courbe. Ces tangentes sont parallèles, car $\beta(\alpha(0)) = \beta(\alpha(1))$. En effet, il suffit de prendre des valeurs $t_1 > t_2$ n'appartenant pas au même intervalle contigu de l'ensemble de Cantor. Entre eux est situé un tel point t_0 de l'ensemble de Cantor que $\beta(\alpha(t_0))$ est un point de l'hémisphère qui n'est pas situé sur sa frontière, donc $\beta_x(\alpha(t_0)) > 0$; en vertu de $\beta_x(\alpha(t)) \geqq 0$, on a $f_x(t_1) > f_x(t_2)$ et les points $f(t_1)$, $f(t_2)$ ne peuvent pas être identiques. Prenons un segment de la tangente au point final de la courbe assez longue pour que le plan perpendiculaire à ce segment construit dans son autre extrémité ne coupe pas la courbe. Construisons l'image symétrique par rapport à ce plan de notre courbe y compris les segments tangents dans les deux extrémités de la courbe. Il est aisé de voir que le vecteur tangent se transforme en un vecteur symétrique avec le changement de l'orientation. Donc l'indicatrice de l'image symétrique est l'autre hémisphère; les deux courbes ensemble donnent un arc simple dont l'indicatrice est la sphère toute entière. (Cet énoncé reste vrai, si l'on ne construit les axes tangents que pour un certain ensemble non dense des valeurs du paramètre.) Cet arc commence et finit par deux segments rectilignes situés sur une même droite. Ce qu'on voit aisément, la tangente initiale et finale étant perpendiculaires au plan du symétrie. Par une transformation linéaire du paramètre on peut atteindre que cet arc correspond à un intervalle $[a, b]$ des valeurs du paramètre donné d'avance. L'arc considéré possède une longueur finie, les fonctions $f'_x(t)$, $f'_y(t)$, $f'_z(t)$ étant bornées. Le segment rectiligne initial et final peuvent avoir une longueur donnée d'avance. À l'aide d'une transformation linéaire des coordonnées on peut donc atteindre que:

1. Le point initial et final de l'arc sont situés dans deux points A, B donnés d'avance (et le segment rectiligne initial et final sont situés sur le segment AB).

2. La partie de l'arc qui n'est pas située sur AB est située à l'intérieur de la sphère dont le centre est situé sur le segment AB dans un point donné et dont le rayon r est donné (en particulier, arbitrairement petit).

3. La longueur de l'arc surpasse la longueur AB de moins de ε, où ε est un nombre positif donné d'une manière arbitraire.

Par un procédé d'itération (condensation) nous allons construire à partir de tels arcs, que j'appelle élémentaires, un arc, satisfaisant aux conditions du theorème II. Cette itération consiste en ce que l'on remplace quelques segments rectilignes (en nombre fini) dans la n-ème approximation par les arcs élémentaires — de cette manière on obtient la $(n + 1)$-ère approximation; la première approximation est elle-même un arc élémentaire. On obtient l'équation de l'approximation $(n + 1)$-ère de l'équation de l'approximation n-ème en posant $f_{n+1}(t) = f_n(t)$ pour les valeurs de t auxquelles correspondent ou bien les points de la courbe $P = f_n(t)$ qui ne sont pas situés sur les segments rectilignes changés ou bien les points des segments rectilignes changés qui sont situés sur le segment initial ou final de la tangente de l'arc élémentaire remplaçant le segment changé de l'approximation n-ème dans l'approximation $(n + 1)$-ère. Sur les autres segments des valeurs du paramètre nous allons changer $f_n(t)$, mais on voit que ce changement, dist $(f_n(t), f_{n+1}(t)) <$ $< 4r_n$, où r_n est le plus grand rayon des sphères mentionnées en 2) pour les arcs élémentaires construits pendant la transition de l'approximation n-ème à l'approximation $(n + 1)$-ère. En possant $P = f(t) = \lim f_n(t)$, on obtient l'équation d'une courbe, si les fonctions $f_n(t)$ sont continues et si la suite $f_n(t)$ est uniformément convergente, par ex. si $r_n \leqq 2^{-n}$. Puisque on change $f_n(t)$ pendant la transition à $f_{n+1}(t)$ sur un nombre fini seulement de segments du paramètre, la continuité de toutes les fonctions $f_n(t)$ est claire par induction. De même on voit aisément par induction que chaque courbe $P = f_n(t)$ possède un ensemble partout dense de segments rectilignes. Nous allons montrer qu'en choisissant d'une manière convenable les arcs élémentaires la courbe $P = f(t)$ est un arc simple satisfaisant à toutes les conditions du théorème II. Ceci exige une définition plus précise de la transition de $f_n(t)$ à $f_{n+1}(t)$. En désignant par l_n la longueur de la courbe $P = f_n(t)$ et par l la longueur de la courbe $P = f(t)$ on a évidemment $l \leqq \liminf l_n$; pourque la courbe $P = f(t)$ soit rectifiable il suffit donc que $l_n \leqq 1$. Puisque $1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$, il suffit de supposer $l_1 \leqq 2^{-1}$, et de choisir pendant la transition de la n-ème à la $(n + 1)$-ère approximation les nombres ε de la condition 3.) assez petits pour que leur somme soit $< 2^{-n-1}$. Puisqu'on peut choisir les nombres ε et r de la condition 2.) simultanément aussi petits que l'on veut, cette condition est compatible avec la condition $r_n \leqq 2^{-n}$ et avec les conditions pour le nombre r_n qui seront indiquées plus bas. Pour un arc simple l quelconque nous définissons la construction (A) de la manière suivante: on mène un plan arbitraire par chaque segment rectiligne de l'arc et l'on considère la fonction $\Theta(P)$ égale à la distance du point P du segment considéré de l'ensemble que l'on obtient de l'arc tout entier en supprimant les points intérieurs de ce segment. On a évidemment $\Theta(P) > 0$ à l'intérieur du segment, $\Theta(P) = 0$ dans ses extrémités. Du point P on construit la droite perpendiculaire au segment dans le plan choisi et l'on construit sur cette perpendiculaire deux points, des deux côtés du point P, à distances égales $\leqq \min^2 \frac{1}{3}(\Theta(P), 1)$ mais positives, si P est un point intérieur du segment de sorte que ces points forment une courbe simple fermée dont l'axe de symétrie est le segment considéré. Nous formons des corps de révolution par rotation de ces courbes autour les segments correspondants (axes de symétrie) et nous les ajoutons à l'arc considéré. On obtient un ensemble fermé Z qui est le résultat de la construction (A) sur l'arc l. Nous allons montrer que les corps de révolution correspondant aux segments différents n'ont pas des points communs excepté au plus les extrémités du segment et que les points de l'arc qui ne sont pas situés sur le segment sont à l'extérieur de ce corps. En effet, si C était un point commun de deux tels corps, alors, en désignant par P_1, P_2 ses projections orthogonales sur leurs axes de révolution, on aurait $CP_1 + CP_2 \geqq P_1P_2$, mais $P_1P_2 \geqq \Theta(P_1)$ et $P_1P_2 \geqq \Theta(P_2)$; mais d'après la définition de ces corps on a $CP_1 \leqq \min^2\frac{1}{3}(\Theta(P_1), 1) \leqq \leqq \min(\frac{1}{3}\Theta(P_1), 1) \leqq \frac{1}{3}\Theta(P_1) \leqq \frac{1}{3}P_1P_2$ et d'une manière analogue $CP_2 \leqq \leqq \frac{1}{3}\Theta(P_2) \leqq \frac{1}{3}P_1P_2$, donc $CP_1 + CP_2 \leqq \frac{2}{3}P_1P_2 < P_1P_2$ si $P_1P_2 > 0$, ce qui est une contradiction. D'une manière analogue si C était un point de l'arc non situé sur le segment mais situé dans le corps considéré, on aurait $CP_1 \leqq \frac{1}{3}\Theta(P_1) \leqq \frac{1}{3}CP_1$ ce qui est impossible car $CP_1 > 0$. Considérons maintenant un point arbitraire C de l'arc qui n'est pas situé à l'intérieur d'aucun des corps considérés et une courbe arbitraire composée de tous les points de l'arc non situés à l'intérieur de ces corps et des courbes quelconques situées chacune dans un corps et joignant les extrémités du segment rectiligne correspondant (les pôles du corps). Cette courbe est donc située dans Z et contient le point C. On fait correspondre aux points de l'arc non situés à l'intérieur de ces corps la même valeur du paramètre sur la courbe comme sur l'arc. Si l'arc possède au point C l'axe tangent p alors la courbe construite de la manière indiquée possède en C le même axe tangent p. En effet, considérons un point voisin C_1 de la courbe. S'il est un point de l'arc, alors le vecteur $C_1\,C$ est identique pour l'arc et pour la courbe. Si, d'autre part, C_1 est situé dans un des corps, désignons par C_2 la projection perpendiculaire du point C_1 sur l'axe de ce corps, donc C_2 est un point de l'arc et

$$CC_2 \leqq C_1C_2 + CC_1 \leqq CC_1 + \tfrac{1}{3}\Theta(C_2) \leqq CC_1 + \tfrac{1}{3}CC_2,\ \tfrac{2}{3}CC_2 \leqq CC_1$$

donc $CC_2 \to 0$ si $CC_1 \to 0$. Mais $C_1C_2 \leqq \frac{1}{9}\Theta(C_2)^2 \leqq \frac{1}{9}C_2C^2$, donc $\sin\beta \leqq \leqq C_1C_2 \,/\, C_2C \leqq \frac{1}{9}C_2C$ d'où $\sin\beta \to 0$ pour $C_1C \to 0$, ou β est l'angle des vecteurs $(C_1;\ C)$ et $(C_2;\ C)$. Parce que, d'après la supposition, on a $\gamma \to 0$ pour $C_2C \to 0$, où γ est l'angle entre C_2C et l'axe p (en supposant que la valeur du paramètre est plus petite pour C_2 que pour C), donc en désignant par γ_1 l'angle entre C_1C et l'axe p, on obtient de $\gamma_1 \leqq \beta + \gamma$ que $\gamma_1 \to 0$ pour $C_1C \to 0$. (Si la valeur du paramètre pour C_2 est plus grande il suffit de changer l'orientation des vecteurs considérés.) En même temps on voit que, si C n'est pas le point final de l'arc, c'est-à-dire si les points de l'arc (situés dans les corps ou non), situés dans les cônes du sommet C et de l'axe p, se trouvent de deux côtés du sommet, alors les points de la courbe, eux mêmes, sont situés aussi de deux côtés du sommet. Si les courbes situées dans ces corps sont des arcs simples, alors la courbe nouvelle que l'on obtient ainsi est elle-même un arc simple. En effet, si deux points P_1, P_2 sont situés tous les deux sur l'arc l et correspondent aux valeurs différentes du paramètre, alors ils sont différents; si l'un deux est situé sur l'arc et l'autre dans le corps, alors il n'est pas le pôle du corps et par suite il ne se trouve pas sur l'arc, d'ou $P_2 \neq P_1$; si enfin les deux points sont situés dans deux corps différents, alors $P_1 \neq P_2$ découle du fait que les corps sont disjoints, et s'ils sont contenus dans le même corps, ils sont différents entre eux parce qu'on a supposé que la courbe, dans chaque corps, est formée par un arc simple.

Nous allons définir maintenant une construction (B), à l'aide de laquelle nous allons passer d'un arc simple l_1 muni des corps de révolution [voir la construction (A)] à un autre arc simple analogue l_2 muni des corps analogues formés pour lui à l'aide de la construction (A). Nous allons considérer les segments rectilignes de l'arc l_1 et les segments correspondants des valeurs du paramètre. Parmi eux nous choisissons ceux dont la longueur dépasse $\varepsilon°$, nous les divisions en parties égales $\leqq \varepsilon°$ (en choisissant le nombre de ces parties le plus petit possible) et nous marquons sur l'arc les points de division de ces segments rectilignes et les points correspondants aux points de division des segments des valeurs du paramètre. De cette manière un nombre fini de segments rectilignes de l'arc l_1 est soumis à une subdivision en un nombre fini de segments plus courts. Au centre de chacun de ces segments je choisis le centre d'une sphère, dont le rayon est assez petit pourque cette sphère soit située à l'intérieur du corps construit dans la construction (A), plus petit que la moitié de ce segment et event. encore plus petit qu'un nombre positif η dépendant du segment. Ensuite nous remplaçons le segment par un arc élémentaire situé dans la somme de cette sphère et du segment (suivant les propriétés 1), 2) et event. 3). De cette manière on obtient de l'arc l_1 un arc l_2 dont les segments rectilignes sont situés dans les corps définis pour l'arc l_1 et en même temps ou bien sont situés entièrement à l'intérieur de ces corps ou bien ne possèdent qu'une ou deux extrémités sur leur surface (les pôles des corps de l'arc l_1). Nous définissons ensuite les corps pour l'arc l_2 suivant la construction (A), mais en même temps de sorte qu'ils sont situés à l'intérieur des corps définis pour l_1 ou bien que tous les points des corps nouveaux sont situés dans leur intérieur à l'exception de quelques pôles communs, situés sur la surface des corps de l'arc l_1. Si le segment rectiligne de l'arc l_2 est situé à l'intérieur d'un corps construit pour l'arc l_1, il suffit de prendre pour le méridien de la surface de révolution la courbe $y = \alpha \min^2(\frac{1}{3}\Theta(P), \frac{1}{3})$, $0 < \alpha < 1$ où α est un nombre assez petit dépendant du segment. Mais si une extrémité du segment de l'arc l_2 est un pôle du corps de l_1 (et donc le segment de l'arc l_2 est situé sur l'axe de ce corps), alors on prend pour le corps de l'arc l_2 la partie commune du corps possédant le même axe que l_1, mais à rayons des parallèles deux fois plus petits et du corps construit pour le segment de l'arc l_2

au méridien $y = \min^2(\frac{1}{3}\Theta(P), \frac{1}{3})$. Comme on le voit de la construction (B), les segments rectilignes de l'arc l_2 ont des longueurs $\leqq \min(\varepsilon^\circ, 2\eta)$ et $\Theta(P)$ est au plus égal à la moitié de la longueur du segment; donc chaque corps pour l'arc l_2 possède un diamètre au plus égal à $\min(\varepsilon^\circ, 2\eta)$. Considérons l'arc $P = f_1(t)$. En appliquant à cet arc les constructions (A) et (B) (avec $\varepsilon^\circ = 2^{-1}$, $\eta = 2^{-1}$ et donc $r_1 \leqq 2^{-1}$ et $\Sigma\varepsilon < 2^{-2}$) on obtient l'arc $P = f_2(t)$ etc.; de la même manière, on obtient de l'arc $P = f_n(t)$ à l'aide des constructions (A) et (B) avec $\varepsilon^\circ = 2^{-n}$, $\eta = 2^{-n}$ et $\Sigma\varepsilon < 2^{-n-1}$ l'arc l_{n+1} c'est-à-dire $P = f_{n+1}(t)$. En même temps on obtient une suite décroissante d'ensembles Z_n, $Z_n \supset l_n$, donc la courbe l: $P = f(t)$ est contenue dans $\prod_{n=1}^{\infty} Z_n$. Démontrons que $l = \prod_{n=1}^{\infty} Z_n$ et que l est un arc simple. En désignant par A_n l'ensemble des points de l'arc l_n qui ne sont pas contenus à l'intérieur des segments rectilignes et par B_n la somme des intérieurs des corps de révolution construits pour l_n, on a $\prod_{n=1}^{\infty} Z_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n + \prod_{n=1}^{\infty} B_n$, $A_n B_n = 0$, $A_n \subset A_{n+1}$, $B_{n+1} \subset B_n$. De la construction des courbes l_n il s'ensuit qu'aux points de l'ensemble A_n correspondent les points de l'ensemble A'_n des valeurs du paramètre et qu'à l'intérieur de chaque corps de révolution (c'est-à-dire à chaque composante de B_n) on peut faire correspondre un intervalle ouvert des valeurs du paramètre (une composante de l'ensemble B'_n) c'est-à-dire l'intervalle correspondant à l'intérieur du segment rectiligne de l'arc l_n situé dans ce corps. Alors l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} A'_n + \prod_{n=1}^{\infty} B'_n$ est égal au segment, dont l'image sont les courbes l_n et l et la représentation paramétrique de la courbe l peut être fixée de la manière suivante: si $t \in A'_n$, alors il lui correspond un point unique $P \in A_n$; d'autre part, si $t \in \prod_{n=1}^{\infty} B'_n$, alors $[t] = \prod_{n=1}^{\infty} I_n$, où I_n est un intervalle (une composante de l'ensemble B'_n) de longueur $< 2^{-n}$ selon la construction. Au segment I_n correspond l'intérieur du corps G_n (à diamètre $< 2^{-n}$) et nous faisons correspondre à la valeur t le point $[P] = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$. Cette correspondance est continue, comme on a déjà remarqué (le point P appartient à la courbe $l = \lim_{n\to\infty} l_n$). Elle est aussi reversible. En effet si t_1, t_2 tous les deux appartiennent à $\sum_{n=1}^{\infty} A'_n$, alors ils appartiennent à un certain ensemble A'_n et les points P_1, P_2 de l'ensemble A_n sur l'arc simple l_n qui leur correspondent, sont différents. Selon la définition ces mêmes points correspondent aux valeurs t_1, t_2 sur la courbe l. Si une valeur seulement, par exemple t_1, appartient à $\sum_{n=1}^{\infty} A'_n$ et $t_2 \in \prod_{n=1}^{\infty} B'_n$

alors $P_1 \in \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, $P_2 \in \prod_{n=1}^{\infty} B_n$ et $P_1 \neq P_2$, parceque $\prod_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n = 0$. Enfin si t_1 et t_2 appartiennent à $\prod_{n=1}^{\infty} B'_n$ alors il existe un tel indice n qu'ils sont situés dans deux composantes différentes de l'ensemble B'_n, d'où, en tenant compte du fait que les intérieurs des corps de révolution sont disjoints, il suit que P_1 et P_2 sont situés dans les intérieurs de deux corps différents (composantes de l'ensemble B_n). L'arc l_n possédant partout l'axe tangent, les points de l'ensemble A_n n'étant pas situés à l'intérieur des corps de révolution construits sur l_n et l'arc l étant contenu dans Z_n c'est-à-dire dans la somme de l'arc l_n et de ces corps, alors selon la propriété de la construction (A) l'arc l possède aux points de l'ensemble A_n (communs avec l_n) le même axe tangent comme l_n. Pour chaque arc élémentaire employé dans la construction de l'arc l_n l'ensemble non dense, dans lequel l'axe tangent prend toutes les directions d'orientation étant situé hors de l'intérieur des segments rectilignes, appartient à A_n et par suite l'axe tangent à l dans ces points prénd de même toutes les directions (orientées). Mais de tels ensembles dans $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ — ou ce qui revient au même, les ensembles correspondants des valeurs du paramètre dans $\sum_{n=1}^{\infty} A'_n$ se trouvent sur chaque arc (event. sur chaque segment des valeurs du paramètre). En effet, considérons un segment arbitraire des valeurs du paramètre. L'ensemble de segments correspondants aux segments rectilignes de l'arc l_1 étant partout dense, il s'ensuit qu'il contient un intervalle L, auquel correspond une partie rectiligne de l'arc l_1. Les intervalles de valeurs du paramètre correspondant aux segments rectilignes de l'arc l_n étant de longueur $\leq 2^{-n}$, il existe un indice N tel que l'intervalle L ne corresponde à aucune partie rectiligne de l'arc l_N et parceque cet arc l_N, lui aussi, possède un ensemble dense de segments rectilignes alors il existe un segment $L' \subset L$ correspondant à un segment rectiligne tout entier de l'arc l_N. Si $N_1 \geqq -\lg_2|L'|$ cet intervalle est subdivisé en sousintervalles, auxquels correspondent dans l'approximation suivante les arcs élémentaires; donc sur l'intervalle L est située une partie de l'ensemble A_{N_1+1} à laquelle correspond la sphère toute entière comme indicatrice de l'arc situé sur l (c'est-à-dire de l'image de l'intervalle L). Donc l'axe tangent prend sur chaque arc partiel de l'arc l toutes les directions (orientées), c. q. f. d.

La généralisation des theorèmes I et II aux courbes dans l'espace à plusieurs dimensions ne fait pas des difficultés, les démonstrations étant analogues.

M. Krzyż a démontré qu'une courbe dans l'espace à trois dimensions, possédant partout une tangente et telle que sur chaque sousarc il existe une tangente parallèle à la sécante joignant les extrémités de cet arc est une courbe plane si l'on suppose ou bien

a) qu'il existe une représentation paramétrique, possédant les dérivées jusqu'au troisième ordre — ou bien,

b) si l'indicatrice possède une dimension plus petite que deux — la dernière partie étant fondée sur certains résultats des MM. A. Denjoy et A. Bielecki. D'autre part il est facile de donner un exemple d'une courbe dans R_3 possédant partout une tangente continue dont l'indicatrice a la dimension deux sur chaque arc. On peut la construire d'une manière analogue à celle employée dans la démonstration du theorème II mais sans la représentation de l'ensemble de Cantor sur un segment, en appliquant immédiatement la courbe de Peano et cela une telle courbe, que l'image de chaque intervalle est un ensemble à deux dimensions. Les exemples de telles courbes (les courbes de M. W. Sierpiński et de D. Hilbert) sont bien connues et leur construction est facile. En représentant ensuite une telle courbe sur une partie de la surface d'une sphère (d'une manière homéomorphe) on obtient l'indicatrice de la courbe cherchée dont aucun arc évidemment n'est situé dans un plan.

D'une manière analogue à la construction de l'arc du theorème II., mais plus facilement, on peut construire un arc simple dont la sécante prend sur chaque arc partiel toutes les directions orientées. (La direction orientée de la sécante est définie selon les valeurs croissantes du paramètre). C'est une réponse positive à un problème posé par M. K. Borsuk.

En 1940 j'ai construit un exemple dans la direction opposée, dans un certain sens, c'est-à-dire l'exemple d'un arc simple possédant partout un axe tangent, dont l'indicatrice possède une fermeture à dimension zéro. J'ai publié ces résultats sans démonstration.[3]) La démonstration se trouve dans un manuscrit que j'ai envoyé à la rédaction du Journal of the Chinese Mathematical Society en 1947. mais dont je n'ai pas de nouvelles jusqu'aujourd'hui.

[3]) *Z. Zahorski:* Problèmes de la théorie des ensembles et des fonctions, C. R. Acad. Sc. Paris, **223** (1946), 451, IIIc.